



الکترومغناطیس ۲

(رشته فیزیک)

دکتر سعید محمدی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

نه	پیشگفتار
۱	فصل اول. معادلات ماکسول
۱	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ قانون فاراده
۵	۳-۱ مبدل و emf های حرکتی
۱۶	۴-۱ جریان جابه‌جایی
۲۰	۵-۱ معادلات تعمیم یافته ماکسول
۲۴	۶-۱ میدان‌های هماهنگ زمانی
۳۶	۷-۱ خلاصه مطالب
۳۷	۸-۱ سؤالات مروری
۴۰	۹-۱ جواب سؤالات مروری
۴۰	۱۰-۱ مسائل
۴۷	فصل دوم. انتشار امواج الکترومغناطیسی
۴۷	۱-۲ مقدمه
۴۸	۲-۲ انتشار موج در دی‌الکتریک‌های اتلافی
۵۵	۳-۲ امواج تخت در دی‌الکتریک‌های بدون اتلاف
۵۶	۴-۲ امواج تخت در فضای آزاد
۵۸	۵-۲ امواج تخت در رساناهای خوب
۶۹	۶-۲ توان و بردار پوئین تینگ
۷۴	۷-۲ انعکاس یک موج تخت در فرود عمودی
۷۵	۱-۷-۲ موج فرودی
۷۵	۲-۷-۲ موج انعکاسی
۷۵	۳-۷-۲ موج انتقالی
۸۷	۸-۲ انعکاس یک موج تخت در فرود مایل
۹۰	۱-۸-۲ قطبش موازی
۹۴	۲-۸-۲ قطبش عمودی

۱۰۲	۹-۲ خلاصه مطالب
۱۰۴	۱۰-۲ سؤالات مروری
۱۰۶	۱۱-۲ پاسخ سؤالات مروری
۱۰۶	۱۲-۲ مسائل

۱۱۳	فصل سوم. امواج الکترومغناطیس و خطوط انتقال
۱۱۳	۱-۳ مقدمه
۱۱۵	۲-۳ نظریه مداری خطوط انتقال
۱۱۸	۱-۲-۳ معادلات خط انتقال
۱۲۳	۲-۲-۳ خط بدون اتلاف ($R = 0 = G$)
۱۲۳	۳-۲-۳ خط بی‌اعوجاج ($\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$)
۱۲۶	۳-۳ نظریه میدانی خطوط انتقال
۱۳۰	۱-۳-۳ امواج TE و TM
۱۳۱	۲-۳-۳ امواج TEM
۱۳۶	۳-۳-۳ میدان یک کابل هم‌محور
۱۴۰	۴-۳-۳ انتشار امواج بین دو صفحه رسانای موازی (آینه‌های فلزی)
۱۴۲	۱-۴-۳-۳ امواج TEM
۱۴۴	۲-۴-۳-۳ امواج TE
۱۵۵	۳-۴-۳-۳ امواج TM
۱۵۹	۴-۳ خلاصه مطالب
۱۶۳	۵-۳ سؤالات مروری
۱۶۵	۶-۳ پاسخ سؤالات مروری
۱۶۵	۷-۳ مسائل

۱۶۹	فصل چهارم. موجرها
۱۶۹	۱-۴ مقدمه
۱۷۰	۲-۴ موجرهای مستطیلی
۱۷۶	۱-۲-۴ مُدهای مغناطیسی عرضی (TM)
۱۸۱	۲-۲-۴ مُدهای الکتریکی عرضی (TE)
۱۹۵	۳-۴ موجرهای دایروی
۱۹۷	۱-۳-۴ مُد TEM
۱۹۷	۲-۳-۴ مُدهای TE
۱۹۸	۳-۳-۴ مُدهای TM
۱۹۸	۴-۳-۴ مُدهای TE موجر دایروی
۲۰۱	۵-۳-۴ مُدهای TM موجر دایروی
۲۰۵	۴-۴ انتشار موج در یک موجر
۲۰۹	۵-۴ انتقال و میرایی توان در موجرها
۲۱۳	۶-۴ جریان موجر و برانگیزش مُد

۲۲۰	۷-۴ مشددهای موجبر
۲۲۲	۱-۷-۴ مُدهای TM_{mnp} در یک مشدد مستطیلی
۲۲۵	۲-۷-۴ مُدهای TE_{mnp} در یک مشدد مستطیلی
۲۲۷	۸-۴ عامل Q یک حفره
۲۳۰	۹-۴ خلاصه مطالب
۲۳۱	۱۰-۴ سؤالات مروری
۲۳۳	۱۱-۴ پاسخ سؤالات مروری
۲۳۳	۱۲-۴ مسائل

فصل پنجم. گسیل تابش و آنتن‌ها

۲۳۹	۱-۵ مقدمه
۲۳۹	۲-۵ دوقطبی هرتزی
۲۴۱	۳-۵ آنتن دوقطبی نیم موج
۲۴۷	۴-۵ آنتن تک‌قطبی ربع موج
۲۵۳	۵-۵ آنتن حلقه‌ای کوچک
۲۵۴	۶-۵ ویژگی‌های آنتن‌ها
۲۶۰	۱-۶-۵ الگوهای آنتن
۲۶۰	۲-۶-۵ شدت تابش
۲۶۲	۳-۶-۵ بهره جهتی
۲۶۳	۴-۶-۵ بهره توان
۲۶۴	۷-۵ آرایه‌های آنتنی
۲۶۹	۸-۵ سطح مؤثر و معادله فریس
۲۸۴	۹-۵ معادله رادار
۲۸۸	۱۰-۵ خلاصه مطالب
۲۹۲	۱۱-۵ سؤالات مروری
۲۹۴	۱۲-۵ پاسخ سؤالات مروری
۲۹۶	۱۳-۵ مسائل

فصل ششم. پتانسیل‌ها و میدان‌های تأخیری و تابش توسط ذرات باردار

۳۰۳	۱-۶ مقدمه
۳۰۳	۲-۶ پتانسیل‌های اسکالر و برداری
۳۰۴	۳-۶ تبدیلات پیمانه‌ای
۳۰۶	۴-۶ پیمانه کولن و پیمانه لورنتس
۳۰۹	۵-۶ پتانسیل‌های تأخیری
۳۱۰	۶-۶ میدان‌های تأخیری
۳۱۷	۷-۶ پتانسیل‌های لینارد-ویشرت
۳۲۱	۸-۶ میدان‌های لینارد-ویشرت
۳۲۷	۹-۶ میدان‌های تولید شده توسط یک ذره باردار در حرکت یکنواخت
۳۳۳	۱۰-۶ تابش یک ذره باردار شتابدار در سرعت‌های کم
۳۳۷	

۳۴۰	۱۱-۶ تابش یک ذره باردار دارای سرعت و شتاب هم خط
۳۴۶	۱۲-۶ تابش یک ذره باردار در یک مسیر دایروی
۳۵۴	۱۳-۶ خلاصه مطالب
۳۵۷	۱۴-۶ سؤالات مروری
۳۵۸	۱۵-۶ پاسخ سؤالات مروری
۳۵۹	۱۶-۶ مسائل
۳۶۵	پیوست الف. واحدهای الکترومغناطیسی
۳۶۹	پیوست ب. مشتق‌های برداری
۳۷۱	پیوست ج. جداول
۳۷۳	پیوست د. فرمول‌های ریاضی
۳۸۵	واژگان انگلیسی به فارسی
۳۸۹	واژگان فارسی به انگلیسی
۳۹۳	منابع

پیشگفتار

پس از آشنایی با الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک در الکترومغناطیس (۱)، اینک دانشجوی آمادگی آن را دارد که با معادله موج و نحوه انتشار آن آشنا شده و کاربردهای آن را در خطوط انتقال، موجبرها و آنتن‌ها مطالعه کند.

این کتاب در شش فصل تنظیم شده است. فصل اول در مورد معادلات ماکسول می‌باشد. فصل دوم انتشار امواج الکترومغناطیسی را بحث می‌کند. فصل سوم در مورد نحوه انتشار امواج الکترومغناطیسی در خطوط انتقال است، فصل چهارم به بررسی انتشار این امواج در موجبرها می‌پردازد، فصل پنجم نحوه تولید امواج الکترومغناطیسی توسط آنتن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهد و بالاخره فصل ششم در مورد تابش توسط ذرات باردار است. سعی شده است کتاب به صورت خودآموز باشد. در هر فصل مثال‌ها و خودآزمایی‌های متعددی با حل داده شده‌اند و در انتهای هر فصل نیز تمرین‌های زیادی آورده شده‌اند. به منظور آشنایی دانشجویان با نحوه سؤالات تستی، در انتهای هر فصل تعدادی سؤال تستی با پاسخ نیز داده شده‌اند. پاسخ کلیه تمرین‌های آخر هر فصل نیز به صورت یک CD راهنما در اختیار دانشجویان قرار داده می‌شود.

بدینوسیله از شورای محترم تخصصی گروه فیزیک دانشگاه پیام نور به خاطر تصویب این متن به عنوان یک کتاب درسی، از جناب آقای دکتر عبدالرسول قرائتی جهرمی به خاطر ویرایش علمی کتاب و از سرکار خانم پروا مرادی صالح به خاطر تایپ و آماده‌سازی متن و از کلیه همکاران گروه تدوین و انتشارات دانشگاه پیام نور تشکر و قدردانی می‌نمایم.

دکتر سعید محمدی
دانشیار فیزیک هسته‌ای دانشگاه پیام‌نور
خرداد ۱۳۸۹

فصل اول

معادلات ماکسول

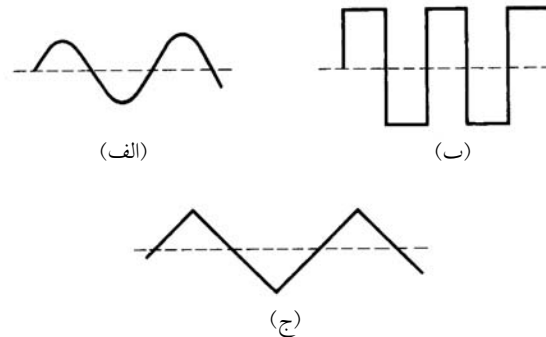
۱-۱ مقدمه

در درس الکترومغناطیس یک، میدان‌های الکترواستاتیکی و مغناطواستاتیک، یا میدان‌های مستقل از زمان مورد بحث قرار گرفتند. در الکترومغناطیس ۲، وضعیت‌هایی را مورد بحث قرار می‌دهیم که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، دینامیکی یا وابسته به زمان هستند.

اولاً باید متذکر شد که در میدان‌های EM^1 استاتیک، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مستقل از یکدیگر هستند، در حالی که در میدان‌های EM دینامیک، دو میدان وابسته به یکدیگر می‌باشند. به عبارت دیگر، میدان الکتریکی وابسته به زمان لزوماً با میدان مغناطیسی وابسته به زمان مرتبط است.

ثانیاً، میدان‌های EM وابسته به زمان که با $\vec{E}(x,y,z,t)$ و $\vec{H}(x,y,z,t)$ نمایش داده می‌شوند دارای ارزش عملی بیشتری نسبت به میدان‌های EM استاتیک هستند. اما آشنایی با میدان‌های استاتیک زمینه خوبی برای درک میدان‌های دینامیک فراهم می‌کند. ثالثاً، به یاد آورید که میدان‌های الکترواستاتیک معمولاً توسط بارهای الکتریکی استاتیک تولید می‌شوند، در حالی که میدان‌های مغناطواستاتیک به دلیل حرکت بارهای الکتریکی با سرعت یکنواخت (جریان مستقیم) یا قطب‌های مغناطیسی (آهنربا) می‌باشند. میدان‌های وابسته به زمان یا امواج معمولاً به دلیل بارهای شتابدار یا جریان‌های وابسته به زمان، مشابه شکل ۱-۱ تولید می‌شوند.

هر نوع جریان پالسی (تپنده) تولید تابش (میدانهای وابسته به زمان) می‌کند. لازم به یادآوری است که جریان تپنده از نوع نشان داده شده در شکل ۱-۱ (ب) باعث گسیل تابش در مدارهای منطقی رقمی^۱ می‌شود.



شکل ۱-۱. انواع مختلف جریان وابسته به زمان، (الف) سینوسی، (ب) مستطیلی، (ج) مثلثی.

به طور خلاصه می‌توان گفت:

- (الف) بارهای ساکن باعث ایجاد میدانهای الکترواستاتیک می‌گردند.
- (ب) جریانهای پایا باعث ایجاد میدانهای مغناطواستاتیک می‌شوند.
- (ج) جریانهای وابسته به زمان باعث ایجاد میدانهای الکترومغناطیسی (یا امواج) می‌گردند.

هدف ما در این فصل، بنا نهادن اصولی برای مباحث بعدی است. برای این کار، دو مفهوم اصلی را معرفی می‌کنیم: ۱- نیروی محرکه الکتریکی بر مبنای آزمایشهای فاراده، و ۲- جریان جابجایی که حاصل فرضیه ماکسول است. به خاطر این مفاهیم، معادلات ماکسول معرفی شده در فصل پنجم الکترومغناطیس (۱) و شرایط مرزی برای میدانهای EM استاتیک، اندکی تغییر داده خواهند شد تا دربرگیرنده تغییرات زمانی میدانها باشند. باید تأکید نمود که معادلات ماکسول خلاصه قوانین الکترومغناطیس بوده و کاربردهای آن در بقیه این کتاب مورد بحث قرار می‌گیرند. به همین خاطر بخش (۵-۱) حائز اهمیت زیادی است.

۲-۱ قانون فاراده

بعد از کشف تجربی اورستد (که قوانین بیو- ساوار و آمپر بر مبنای آن است) که یک جریان پایا یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند، باید منطقی به نظر برسد که میدان مغناطیسی نیز الکتريسته تولید کند. در سال ۱۸۳۱ میلادی، ۱۱ سال بعد از کشف اورستد، مایکل فاراده در لندن و جوزف هنری در نیویورک به‌طور مستقل کشف کردند که یک میدان مغناطیسی متغیر (وابسته به زمان) یک جریان الکتریکی تولید می‌کند. بر طبق آزمایش‌های فاراده، یک میدان مغناطیسی ساکن جریانی تولید نخواهد کرد، اما یک میدان وابسته به زمان تولید یک ولتاژ القایی (بنام نیروی محرکه الکتریکی یا به‌طور خلاصه emf^1) در یک مدار بسته می‌کند که باعث جاری شدن جریان می‌گردد.

بر طبق کشف فاراده، emf القایی، V_{emf} (برحسب ولت)، در هر مدار

بسته برابر است با آهنگ تغییر زمانی شار مغناطیسی از میان مدار.

این قانون فاراده است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_{emf} = -N \frac{d\psi}{dt} \quad (1-1)$$

که N تعداد دورها در یک مدار و ψ شار عبوری از هر دور است.

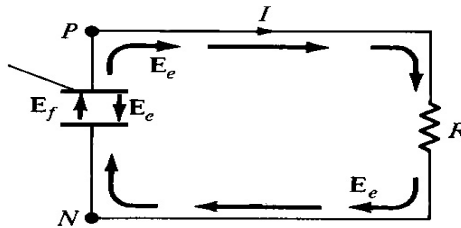
علامت منفی بدان معنی است که ولتاژ القایی طوری عمل می‌کند که با شار به وجود آورنده آن مخالفت می‌کند. این موضوع معروف است به *قانون لنز*، که بر این نکته تأکید می‌کند که جهت جریان در مدار به نحوی است که میدان مغناطیسی القایی تولید شده توسط جریان القایی با میدان مغناطیسی اولیه مخالف می‌کند.

در گذشته یک میدان الکتریکی را به‌عنوان میدانی توصیف کردیم که بر بارهای الکتریکی نیرو وارد کند. میدان‌های الکتریکی در نظر گرفته شده تاکنون توسط بارهای الکتریکی تولید می‌شدند. در چنان میدان‌هایی، آغاز و پایان خطوط شار بر روی بارها بوده است. اما انواع دیگری از میدان‌های الکتریکی وجود دارند که مستقیماً توسط بارهای الکتریکی ایجاد نمی‌شوند. اینها میدان‌های تولید شده توسط emf هستند. برخی از منابع emf عبارتند از مولدهای الکتریکی، باتری‌ها،

ترموکوپل‌ها، پیل‌های سوختی و فوتولتایی که همگی انرژی غیرالکتریکی را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کنند.

مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲-۱ را در نظر بگیرید که باطری منبع emf است. اثر الکتروشیمیایی باطری منجر به یک میدان $\vec{E}_f$ تولید شده توسط emf می‌گردد. به دلیل انباشت بار در پایانه‌های باطری، میدان الکترواستاتیک $\vec{E}_e (= -\vec{\nabla} V)$ نیز وجود دارد. میدان الکتریکی کل در هر نقطه برابر است با

$$\vec{E} = \vec{E}_f + \vec{E}_e \quad (2-1)$$



شکل ۲-۱. یک مدار نشان‌دهنده میدان $\vec{E}_f$ تولیدی توسط emf و میدان الکترواستاتیک $\vec{E}_e$.

توجه کنید که میدان $\vec{E}_f$ در بیرون از باطری صفر است، $\vec{E}_f$ و $\vec{E}_e$ دارای جهت‌های مخالف در باطری هستند، و جهت $\vec{E}_e$ در داخل باطری مخالف جهت آن در بیرون از باطری است. با انتگرال‌گیری معادله (۲-۱) پیرامون مدار بسته:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_f \cdot d\vec{l} + 0 = \int_N^P \vec{E}_f \cdot d\vec{l} \quad (3-1)$$

که $\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0$ زیرا $\vec{E}_e$ پایستار است. emf باطری انتگرال خطی میدان تولید شده توسط emf است، یعنی:

$$V_{emf} = \int_N^P \vec{E}_f \cdot d\vec{l} = - \int_N^P \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = IR \quad (4-1)$$

چون $\vec{E}_e$ و $\vec{E}_f$ در داخل باطری مساوی و مخالف هم هستند. رابطه فوق را می‌توان به عنوان اختلاف پتانسیل $(V_P - V_N)$ بین پایانه‌های باطری نیز در نظر گرفت. باید توجه نمود که:

۱- یک میدان الکترواستاتیک $\vec{E}_e$ نمی‌تواند یک جریان پایا در یک مدار بسته به

$$\oint_L \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0 = IR \quad \text{وجود آورد چون}$$

۲- یک میدان $\vec{E}_f$ تولید شده توسط emf ناپایستار است.

۳- غیر از الکترواستاتیک، ولتاژ و اختلاف پتانسیل معمولاً یکسان نیستند.

۳-۱ مبدل^۱ و emf های حرکتی

با در نظر گرفتن ارتباط بین emf و میدان الکتریکی، می‌خواهیم بررسی کنیم چگونه قانون فاراده میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به هم مربوط می‌سازد. برای مداری با یک دور $(N=1)$ ، معادله (۱-۱) عبارت است از:

$$V_{emf} = -\frac{d\psi}{dt} \quad (۵-۱)$$

رابطه فوق را برحسب $\vec{E}$ و $\vec{B}$ می‌توان نوشت:

$$V_{emf} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (۶-۱)$$

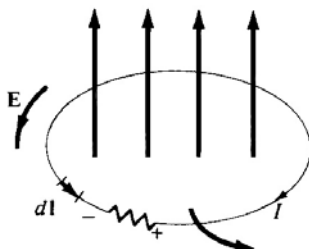
که به جای ψ رابطه $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ قرار داده‌ایم و S سطح مقطع مداری است که با مسیر بسته L مشخص می‌شود. طبق رابطه (۶-۱)، در یک وضعیت وابسته به زمان، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هر دو حضور داشته و مرتبط با یکدیگر هستند. در رابطه فوق، $d\vec{l}$ و $d\vec{s}$ بر طبق قاعده دست راست و قضیه استوکس هستند. این موضوع را می‌توان در شکل ۳-۱ مشاهده کرد. تغییر شار با زمان در معادله (۱-۱) یا (۶-۱) می‌تواند به سه طریق ایجاد شود.

- ۱- با داشتن یک حلقه ثابت در یک میدان $\vec{B}$ وابسته به زمان.
 - ۲- با داشتن یک حلقه وابسته به زمان در یک میدان $\vec{B}$ پایا.
 - ۳- با داشتن یک حلقه وابسته به زمان در یک میدان $\vec{B}$ وابسته به زمان.
- هر یک از موارد فوق را به طور جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم.

الف) حلقه ثابت در یک میدان $\vec{B}$ وابسته به زمان (emf مبدلی)

این همان مواردی است که در شکل ۳-۱ نشان داده شده است. معادله (۶-۱) تبدیل می‌شود به

$$V_{emf} = \oint_I \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (۷-۱)$$



۳-۱. emf القا شده ناشی از یک حلقه ساکن در یک میدان $\vec{B}$ وابسته به زمان.

این نوع emf القایی که توسط یک جریان متغیر (که میدان $\vec{B}$ متغیر را تولید می‌کند) در یک حلقه ساکن تولید می‌شود اغلب به‌عنوان emf مبدلی در بحث توان معروف است، چون شبیه به عملکرد مبدل است. با اعمال قضیه استوکس به جمله وسط معادله (۷-۱)، داریم:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (۸-۱)$$

با تساوی قرار دادن انتگرال‌ده‌ها، رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9-1)$$

رابطه فوق، یکی از معادلات ماکسول برای میدان‌های متغیر است. این رابطه نشان می‌دهد که میدان $\vec{E}$ وابسته به زمان پایستار نیست ($\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0$). این بدان معنی نیست که اصول پایستگی انرژی نقض شده‌اند. مثلاً کار انجام شده در بردن یک بار پیرامون یک مسیر بسته در یک میدان الکتریکی متغیر به دلیل گرفتن انرژی از یک میدان مغناطیسی متغیر است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید شکل ۱-۳ از قانون لنز پیروی می‌کند، جریان القایی I طوری است که میدان مغناطیسی تولید شده برخلاف $\vec{B}(t)$ است.

ب) حلقه متحرک در میدان $\vec{B}$ پایا (emf حرکتی)

وقتی که حلقه رسانا در یک میدان $\vec{B}$ پایا حرکت می‌کند یک نیروی emf در حلقه القا می‌شود. دیدیم که نیروی وارد بر یک بار Q در حال حرکت با سرعت یکنواخت $\vec{u}$ در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر است با

$$\vec{F}_m = Q\vec{u} \times \vec{B}$$

میدان الکتریکی $\vec{E}_m$ حرکتی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{F}_m}{Q} = \vec{u} \times \vec{B} \quad (10-1)$$

اگر حلقه رسانایی را که با سرعت یکنواخت $\vec{u}$ حرکت می‌کند به عنوان تعداد زیادی از الکترون‌های آزاد در نظر بگیریم، emf القا شده در حلقه برابر است با

$$V_{emf} = \oint_L \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (11-1)$$

این نوع emf به emf حرکتی یا emf برش شاری^۱ معروف است چون وابسته به عمل حرکتی است. این نوع emf در ابزار الکتریکی مانند موتورها و مولدهای متناوب

یافت می‌شود. شکل ۴-۱ یک مولد DC دوقطبی با یک پیچه آرمیچر و دو میله سوی گردان را نشان می‌دهد. با چرخش پیچه در میدان مغناطیسی ولتاژ تولید می‌شود. مثال دیگری از emf حرکتی در شکل ۵-۱ نشان داده شده است که در آن میله‌ای بین یک جفت ریل حرکت می‌کند. در این مثال $\vec{B}$ و $\vec{u}$ عمود بر هم هستند. در نتیجه معادله (۱۰-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (12-1)$$

یا

$$F_m = IlB \quad (13-1)$$

و معادله (۱۱-۱) برابر می‌شود با

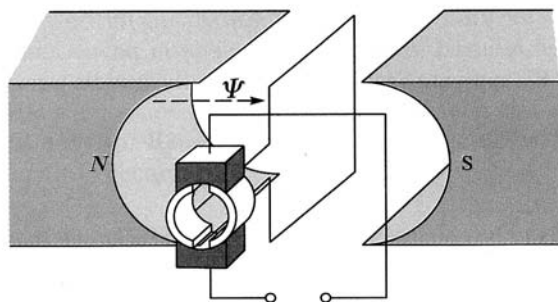
$$V_{emf} = uBl \quad (14-1)$$

با اعمال قضیه استوکس به معادله (۱۱-۱)

$$\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{E}_M) \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

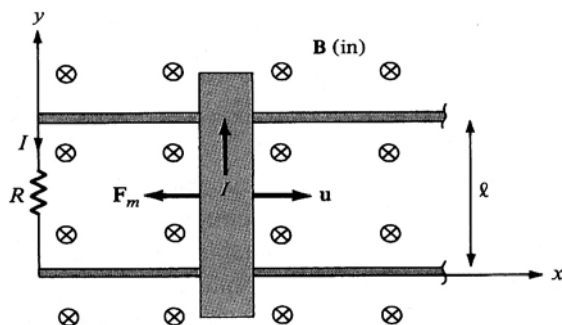
یا

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_m = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (15-1)$$



شکل ۴-۱. یک ابزار جریان مستقیم.

همان طور که دیده می شود در معادله (۱۱-۱) برخلاف معادله (۷-۱) علامت منفی نیازی نیست چون قانون لنز قبلاً در نظر گرفته شده است.



۵-۵. emf القایی به دلیل حرکت میله در یک میدان $\vec{B}$ پایا.

به کار بردن رابطه (۱۱-۱) همیشه ساده نبوده و باید محتاط بود از جمله:

۱- انتگرال رابطه (۱۱-۱) در امتداد قسمتی از حلقه که $\vec{u} = 0$ است، صفر می باشد. در نتیجه عنصر $d\vec{l}$ در امتداد قسمتی از حلقه در نظر گرفته می شود که میدان را قطع کند (مثلاً در امتداد میله در شکل ۵-۱)، جایی که $\vec{u}$ مقدار غیر صفر دارد.

۲- جهت جریان القایی همانند $\vec{E}_m$ یا $\vec{u} \times \vec{B}$ است. حدهای انتگرال در رابطه (۱۱-۱) برخلاف جهت جریان القایی انتخاب می شوند تا در قانون لنز صدق کند. مثلاً در معادله (۱۳-۱)، انتگرال روی L در امتداد $-\hat{a}_y$ است در حالی که جریان القایی در میله در راستای $\hat{a}_y$ است.

ج) حلقه متحرک در یک میدان متغیر

این یک حالت کلی است که در آن یک حلقه رسانای متحرک در یک میدان مغناطیسی متغیر قرار دارد. هر دو اثر emf مبدلی و حرکتی در این حالت حضور دارند. با ترکیب معادلات (۷-۱) و (۱۱-۱)، emf کلی به دست می آید:

$$V_{\text{emf}} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_L (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (16-1)$$

یا از معادلات (۹-۱) و (۱۵-۱) خواهیم داشت:

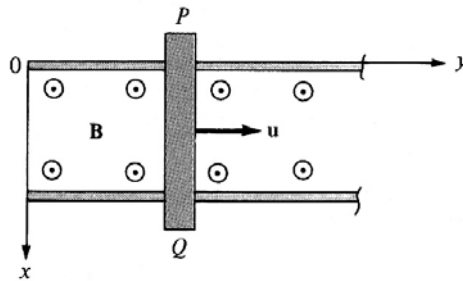
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (17-1)$$

توجه شود که معادله (۱۶-۱) معادل معادله (۵-۱) است، در نتیجه V_{emf} را می‌توان از هر کدام از این معادلات به‌دست آورد. در حقیقت، معادله (۵-۱) را می‌توان به‌جای معادلات (۷-۱)، (۱۱-۱) و (۱۶-۱) به‌کار برد. مثال (۱-۱): یک میله رسانا می‌تواند طبق شکل (۶-۱) روی دو ریل رسانا آزادانه حرکت کند. ولتاژ القایی در میله را حساب کنید اگر

الف) میله در $y = 8 \text{ cm}$ ساکن بوده و $\vec{B} = 4 \cos 10^6 t \hat{a}_z \frac{mW_b}{m^2}$ باشد.

ب) میله با سرعت $\vec{u} = 20 \hat{a}_y \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند و $\vec{B} = 4 \hat{a}_z \frac{mW_b}{m^2}$ باشد.

ج) میله با سرعت $\vec{u} = 20 \hat{a}_y \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند و $\vec{B} = 4 \cos(10^6 t - y) \hat{a}_z \frac{mW_b}{m^2}$ باشد.



۱-۶. برای مثال ۱-۱

حل: الف) در این حالت، emf مبدلی داریم که عبارت است از:

$$V_{emf} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_{y=0}^{1.8} \int_{x=0}^{1.6} 4(1.0^{-3}) (1.0^6) \sin 1.0^6 t \, dx \, dy$$

$$= 4(1.0^{-3}) (1.0^8) (1.0^6) \sin 1.0^6 t = 19.2 \sin 1.0^6 t \, (V)$$

قطبیت ولتاژ القایی (برطبق قانون لنز) طوری است که نقطه P روی میله وقتی که میدان $\vec{B}$ در حال افزایش است، در پتانسیل پایین‌تری نسبت به Q قرار دارد.

(ب) این یک حالت emf حرکتی است:

$$V_{emf} = \int (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_{x=l} (u \hat{a}_y \times B \hat{a}_z) \cdot dx \hat{a}_x$$

$$= -uBl = -2.0(4 \times 1.0^{-3})(1.0^6) = -4.8 \, mV$$

(ج) در این حالت هر دو emf مبدلی و حرکتی حضور دارند. این مسئله را به دو روش می‌توان حل کرد.

روش اول: با استفاده از معادله (۱-۱۶)،

$$V_{emf} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \int (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{x=0}^{1.6} \int_y 4 \times 1.0^{-3} (1.0^6) \sin(1.0^6 t - y') dy' dx$$

$$+ \int_{1.0^6} \left[2.0 \hat{a}_y \times 4 \times 1.0^{-3} \cos(1.0^6 t - y) \hat{a}_z \right] \cdot dx \hat{a}_x$$

$$= 24.0 \cos(1.0^6 t - y') \Big|_0^{1.6} - 8.0 (1.0^{-3}) (1.0^6) \cos(1.0^6 t - y)$$

$$= 24.0 \cos(1.0^6 t - y) - 24.0 \cos 1.0^6 t - 4.8 (1.0^{-3}) \cos(1.0^6 t - y)$$

$$\approx 24.0 \cos(1.0^6 t - y) - 24.0 \cos 1.0^6 t$$

چون emf حرکتی در مقایسه با emf مبدلی قابل صرف‌نظر است، با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

V_{emf} به صورت زیر خواهد شد.

$$V_{emf} = 4 \cdot \sin \left(10^6 t - \frac{y}{2} \right) \sin \frac{y}{2}$$

روش دوم: با استفاده از معادله (۵-۱) خواهیم داشت:

$$\psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{y=0}^y \int_{x=0}^{10^6} 4 \cos \left(10^6 t - y \right) dx dy$$

$$= -4 \times 10^{-3} (10^6) \sin \left(10^6 t - y \right) \Big|_{y=0}^y = -0.724 \times 10^{-3} \sin \left(10^6 t - y \right) + 0.724 \times 10^{-3} \sin 10^6 t$$

اما

$$\frac{dy}{dt} = u \Rightarrow y = ut = 2 \cdot t$$

$$\psi = -0.724 \times 10^{-3} \sin \left(10^6 t - 2 \cdot t \right) + 0.724 \times 10^{-3} \sin 10^6 t$$

$$V_{emf} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.724 \times 10^{-3} \left(10^6 - 2 \right) \cos \left(10^6 t - 2 \cdot t \right) - 0.724 \times 10^{-3} (10^6) \cos 10^6 t$$

$$\approx 240 \cos \left(10^6 t - y \right) - 240 \cos 10^6 t$$

که همان نتیجه روش اول است.

خودآزمایی ۱-۱

حلقه شکل ۵-۱ را در نظر بگیرید. اگر $\vec{B} = 0.5 \hat{a}_z \frac{W_b}{m}$ ، $R = 20 \Omega$ ، $l = 10 \text{ cm}$ و میله

با سرعت ثابت $v \hat{a}_x \frac{m}{s}$ در حال حرکت باشد، پیدا کنید:

(الف) emf القایی در میله،

(ب) جریان عبوری از مقاومت،

(ج) نیروی حرکتی روی میله،

(د) توان اتلاف شده توسط مقاومت.