



دانشگاه ساری
پیت

آنالیز تابعی مقدماتی

(رشته ریاضی)

دکتر ثریا طالبی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

نه	پیشگفتار مؤلف
۱	فصل اول: فضاهای برداری (فضاهای خطی)
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۲	مقدمه
۲	۱-۱ فضاهای برداری
۶	۲-۱ زیرمجموعه‌های فضای برداری
۶	۳-۱ زیر فضاها و پایه همل
۶	۱-۳-۱ تعریف زیر فضای برداری
۱۰	۴-۱ فضاهای خارج‌قسمتی
۱۱	۵-۱ جمع مستقیم و تصاویر
۱۳	۶-۱ نامساوی‌های هولدر و مینکوفسکی
۱۶	خودآزمایی تشریحی فصل اول
۱۹	فصل دوم: فضاهای برداری نرم‌دار
۱۹	هدف کلی
۱۹	هدف‌های یادگیری
۲۰	مقدمه
۲۰	۱-۲ تعریف تابع نرم و مثال‌هایی از فضاهای نرم‌دار
۲۵	۲-۲ نرم‌های هم‌ارز
۳۰	۳-۲ نرم خارج‌قسمتی و نگاشت خارج‌قسمتی
۳۲	۴-۲ فضای برداری نرم‌دار کامل
۴۰	۵-۲ فضاهای برداری نرم‌دار متناهی‌البعد
۴۵	۶-۲ فشردگی در فضای متریک

۴۹	۷-۲ فشردگی زیرمجموعه‌های کامل و کراندار کلی فضای متریک (X, d)
۵۲	۸-۲ فشردگی گوی واحد بسته
۵۴	۹-۲ فضاهای نرم‌دار جدایی‌پذیر و پایه‌های شودر
۵۸	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۶۱	فصل سوم: فضاهای ضرب داخلی و فضاهای هیلبرت
۶۱	هدف کلی
۶۱	هدف‌های یادگیری
۶۲	مقدمه
۶۲	۱-۳ ضرب داخلی
۷۱	۲-۳ تعامد
۷۶	۳-۳ متمم متعامد
۸۴	۴-۳ پایه‌های یک‌امتعامد در فضای‌های هیلبرت نامتناهی‌البعد
۹۷	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
۹۹	فصل چهارم: تبدیلات خطی کراندار
۹۹	هدف کلی
۹۹	هدف‌های یادگیری
۱۰۰	مقدمه
۱۰۰	۱-۴ تبدیلات خطی کراندار (عملگرها)
۱۰۸	۲-۴ نرم عملگرها
۱۱۹	۳-۴ دوگان فضای هیلبرت
۱۲۲	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۱۲۵	فصل پنجم: قضیه هان-باناخ و نتایج آن
۱۲۵	هدف کلی
۱۲۵	هدف‌های یادگیری
۱۲۵	مقدمه
۱۲۶	۱-۵ لم زورن
۱۲۸	۲-۵ قضیه هان - باناخ
۱۳۵	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۱۳۷	فصل ششم: قضیه رسته‌ای بئر و نتایج آن
۱۳۷	هدف کلی
۱۳۷	هدف‌های یادگیری
۱۳۸	مقدمه
۱۳۸	۱-۶ قضیه رسته‌ای بئر

- ۱۴۶ ۲-۶ قضیه کرانداري يکنواخت يا اصل کرانداري يکنواخت
- ۱۴۷ ۳-۶ قضیه نگاشت باز و قضیه گراف بسته
- ۱۵۴ خودآزمایی تشریحی فصل ششم

۱۵۷ منابع

پیشگفتار مؤلف

این کتاب به معرفی مقدماتی از ایده‌ها و روش‌های آنالیز تابعی می‌پردازد که برای دانشجویان سال آخر کارشناسی مناسب می‌باشد. پیش‌نیاز مطالعه این کتاب داشتن اطلاعات پایه در مورد جبر خطی و آنالیز ریاضی است که شامل نظریه فضاها و متریک نیز می‌باشد.

از ابزار موردنیاز آنالیز تابعی فضای برداری توابع حقیقی یا مختلط مقدار است که روی یک مجموعه تعریف شده‌اند. در حالت کلی چنین فضاها را نامتناهی البعد هستند. هرچند فضاها برداری متناهی البعد و نامتناهی البعد خواص مشترکی دارند ولی بسیاری از خواص آن‌ها هم مشترک نیستند.

روی بیشتر فضاها که موردنظر ما هستند نرم تعریف شده‌است. یک تابع حقیقی یا مختلط مقدار را «تابعی» می‌نامند و نام آنالیز تابعی نیز به همین مناسبت انتخاب شده‌است. مطالعه این کتاب به علاقه‌مندان ادامه تحصیل در رشته‌های ریاضی کمک خواهد کرد تا مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی که در دروس پیشرفته آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیاموزند. زیرا در حین گذراندن این دروس فرصت کافی برای تأکید روی این مقدمات و مفاهیم وجود ندارد و در نتیجه به درک بهتر و عمیق‌تر مطالب پیشرفته آنالیز کمک خواهد کرد.

در فصل اول به مفاهیم اولیه‌ای که در تمام فصول کتاب موردنیازند پرداخته‌ایم. در فصل دوم یک مفهوم اساسی آنالیز تابعی یعنی فضاها برداری نرم‌دار معرفی شده‌است. یک نرم روی یک فضای برداری در واقع توسیعی از ایده طول یک بردار است. خواص پایه‌ای فضاها برداری نرم‌دار در این فصل بیان شده‌است فضاها باناخ

تعریف می‌شوند و بسیاری از قضایای آنالیز روی این فضاها بیان و اثبات می‌شوند. در خاتمه رابطه بین فشردگی و کامل و کراندار کلی بودن مجموعه‌ها بیان شده‌است.

در فصل سوم خواص ضرب داخلی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در فضاها برداری متناهی‌البعد علاوه بر طول یک بردار زاویه بین دو بردار هم مورد بحث قرار می‌گیرد لذا برای تعمیم آن به سایر فضاها برداری ضرب داخلی معرفی می‌شود که تعمیم ضرب نقطه‌ای شناخته شده در $\mathbb{R}^3$ است. روی هر فضای ضرب داخلی نرم تعریف می‌شود. در این فصل یکی از مهم‌ترین فضاها ضرب داخلی کامل یعنی فضای هیلبرت بررسی می‌شود.

فصل چهارم تبدیلات خطی بین دو فضای برداری را مطالعه می‌کنیم. تبدیلات خطی پیوسته اهمیت زیادی دارند. این تبدیلات خطی پیوسته، عملگر نیز نامیده می‌شوند. می‌دانیم که کلیه تبدیلات خطی در فضاها متناهی‌البعد پیوسته‌اند ولی در فضاها نامتناهی‌البعد چنین نیست. لذا باید پیوستگی آن‌ها به دقت مطالعه شود. مجموعه عملگرهای بین دو فضای نرم‌دار تشکیل یک فضای برداری نرم‌دار می‌دهند. اگر عملگرها از یک فضای نرم‌دار به میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشند آن‌ها را تابعی‌های خطی و کراندار می‌نامند که درواقع همان دوگان فضای برداری نرم‌دار است. قضیه هان باناخ یکی از مهم‌ترین ابزار اصلی آنالیز تابعی است که در فصل پنجم بیان می‌شود. به ما امکان می‌دهد یک تابعی خطی و کراندار را که روی زیر فضایی از یک فضای نرم‌دار تعریف شده‌است به کل فضا توسیع دهیم. همچنین نشان می‌دهد به حد کافی تابعی خطی و کراندار روی هر فضای نرم‌دار وجود دارد که مطالعه فضای دوگان آن را جالب کند.

در فصل ششم قضیه کتگوری بئر نشان می‌دهد در یک فضای متریک کامل اشتراک هر تعداد شمارا از مجموعه‌های بازو چگال، بازو چگال است. سه قضیه مهم که در اثباتشان از قضیه کتگوری بئر استفاده می‌شود، قضیه نگاشت بازو قضیه گراف بسته و قضیه کرانداری یکنواخت هستند.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از داوران محترم و همچنین ویراستاران گرامی خانم دکتر فرشته سعدی و آقای دکتر هادی خدابخشیان که پیشنهادهای علمی و نگارشی ارزنده ایشان کمک زیادی جهت تألیف این کتاب کرد، قدردانی نمایم.

فصل اول

فضاهای برداری (فضاهای خطی)

هدف کلی

در این فصل مفاهیم مهم فضاهای خطی را مرور می‌کنیم و به معرفی فضای تولیدشده توسط یک زیرمجموعه از فضای خطی (برداری) می‌پردازیم. و همچنین چند نامساوی که نتایج مهمی در فصول بعدی دارند را بیان و اثبات می‌کنیم.

هدف‌های یادگیری

- انتظار می‌رود که دانشجو پس از مطالعه این فصل بتواند:
۱. مفهوم فضاهای برداری (خطی) را در ذهنش تداعی کند و با مطالعه مثال‌هایی که ذکر شده است با کاربرد فضاهای برداری مختلف در آنالیز تابعی آشنا شود.
 ۲. تعریف زیر فضای یک فضای برداری را بیان و ساختار غلاف خطی یا زیر فضای تولیدشده توسط یک زیرمجموعه از یک فضای برداری را بشناسد.
 ۳. پایه همل برای یک فضای برداری را توضیح دهد.
 ۴. ساختار یک فضای خارج قسمتی را بیان نماید.
 ۵. تعریف جمع مستقیم دو زیر فضای M و N از فضای برداری X را بیان کند و بتواند تصزیری جبری از X بر روی M در امتداد N معرفی نماید.
 ۶. نامساوی یانگ را بیان و اثبات نماید.
 ۷. نامساوی هولدر برای دنباله‌ها را بیان و اثبات نماید.
 ۸. نامساوی مینکوفسکی برای دنباله‌ها را بیان و اثبات نماید.

مقدمه

در این فصل مفاهیم اساسی جبر خطی را مورد بحث قرار می‌دهیم. با بسیاری از مطالب در فضاهای برداری متناهی‌البعده آشنا هستید.

پایه یک فضای برداری، مجموعه مولد مینیمال آن است. برای به‌دست آوردن یک پایه، می‌توان به یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی یک فضای برداری، بردارهای بیشتری اضافه کرد تا به یک پایه تبدیل شود. لذا هر مجموعه از بردارهای مستقل خطی می‌تواند قسمتی از یک پایه باشد. بعد یک فضای برداری برابر تعداد بردارهای پایه آن فضا است.

به عبارت دیگر یک پایه فضای برداری، مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی آن فضا است که فضا را تولید نماید. اگر تعداد عناصر پایه نامتناهی باشد، استقلال خطی آن‌ها بدین معنی است که چنانچه یک ترکیب خطی متناهی از عناصر پایه صفر شود باید کلیه مضارب صفر باشند. و همچنین هر عنصر فضای برداری به صورت ترکیب خطی متناهی و منحصر به فردی از عناصر پایه نمایش داده می‌شود. چنین پایه‌ای را یک پایه همل آن فضای برداری می‌نامیم.

۱-۱ فضاهای برداری

یک فضای برداری مجموعه‌ای از اشیاء مانند X است که می‌توانند با هم جمع شوند و در یک اسکالر ضرب شوند. اسکالرها از میدانی مانند F انتخاب می‌شوند. همواره $\mathbb{R}$ را میدان اعداد حقیقی و $\mathbb{C}$ را میدان اعداد مختلط می‌نامیم. میدان F در این درس $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است.

۱-۱-۱ تعریف فضای برداری

یک فضای برداری روی میدان F مجموعه‌ی ناتهی X با دو عمل زیر است:

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad (\text{عمل جمع})$$

$$\circ : (F \times X) \rightarrow X \quad (\text{عمل ضرب})$$

که این دو عمل در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$1. \quad x + y = y + x \quad \text{به‌ازای هر } x, y \in X.$$

۳ فضاهای برداری (فضاهای خطی)

۲. عنصر منحصر به فردی در X که با 0 نمایش داده می شود، موجود است؛ به طوری که

$$0 + x = x + 0 = x \quad (\text{برای هر } x \in X).$$

۳. به هر $x \in X$ عنصر منحصر به فردی از X وابسته است که با $-x$ نمایش داده می شود و

$$-x + x = x + (-x) = 0.$$

۴. به ازای هر $x, y, z \in X$ به ازای هر $(x + y) + z = x + (y + z)$.

۵. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in F$.

۶. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha, \beta \in F$.

۷. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha, \beta \in F$.

۸. به ازای $1 \cdot x = x$ هر $x \in X$.

تأکید می کنیم که یک فضای برداری چهارتایی $(X, F, +, \cdot)$ است که X مجموعه مورد نظر و F میدان و $+$ جمع و $\cdot$ ضرب است که معمولاً آن را به اختصار با X نمایش می دهیم.

۲-۱-۱ تعریف

یک فضای برداری حقیقی (مختلط) فضایی برداری روی میدان حقیقی (مختلط) است و عناصر آن را «بردار» گویند.

یک فضای برداری را «فضای خطی» نیز می نامند.

۳-۱-۱ مثال

۱. به ازای هر عدد صحیح n قرار دهید:

$$X = F^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in F, i = 1, 2, \dots, n\}$$

یعنی X مجموعه تمام n -تایی های حقیقی (مختلط) است. عمل های جمع و ضرب اسکالر به ازای هر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ در F^n و $\alpha \in F$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

F^n یک فضای برداری روی F است.

۲. فرض کنید

$$X = C[a, b] = \{x : [a, b] \rightarrow F \mid x \text{ تابعی پیوسته است}\}$$

عمل جمع و ضرب بر X را نقطه‌وار تعریف می‌کنیم؛ یعنی برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $t \in [a, b]$ داریم:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

در این صورت $C[a, b]$ یک فضای برداری حقیقی است.

۳. فضای دنباله‌ای S .

فرض کنید S مجموعه تمام دنباله‌های $x = \{x_n\}$ از اعداد حقیقی (مختلط) باشد. برای هر $x = (x_1, x_2, \dots)$ و $y = (y_1, y_2, \dots)$ در S و هر $\alpha \in F$ تعریف می‌کنیم:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$$

S یک فضای برداری روی F است.

۴. فضای دنباله‌ای l_∞ .

فرض کنید $l_\infty(N) = l_\infty$ مجموعه تمام دنباله‌های کراندار از اعداد حقیقی (مختلط) باشد؛ یعنی به‌ازای هر $x = \{x_n\} \in l_\infty$ داریم:

$$\sup_{n \in N} |x_n| < \infty$$

عمل جمع و ضرب مانند مثال (۳) تعریف می‌شود. در این صورت l_∞ فضایی برداری روی F است.

۵. فضای دنباله‌ای $l_p(N) = l_p$ ($1 \leq p < \infty$)

l_p مجموعه تمام دنباله‌هایی به‌صورت $x = \{x_n\}$ از اعداد حقیقی (مختلط) است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

برای هر $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ و $a \in F$ اعمال جمع و ضرب اسکالر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

$$\alpha.x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$$

نشان می‌دهیم l_p یک فضای برداری روی F است.

فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots)$ و $y = (y_1, y_2, \dots)$ دو دنباله در l_p باشد نشان

می‌دهیم $x + y \in l_p$ چون به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} |x_i + y_i|^p &\leq (|x_i| + |y_i|)^p \leq \left(2 \max\{|x_i|, |y_i|\}\right)^p \\ &\leq 2^p \max\{|x_i|^p, |y_i|^p\} \leq 2^p (|x_i|^p + |y_i|^p) \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \leq 2^p \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right) < \infty$$

بنابراین $x + y \in l_p$ و همچنین به ازای هر $x = \{x_n\} \in l_p$ و $a \in F$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^p = |\alpha|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

یعنی $\alpha x \in l_p$ و l_p یک فضای برداری است.

۶. فضای دنباله‌ای $c = c(\mathbb{N})$.

c مجموعه تمام دنباله‌هایی به صورت $x = \{x_n\}$ از اعداد حقیقی (مختلط) و

همگراست؛ یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ وجود دارد. عمل جمع و ضرب اسکالر بر روی عناصر c

مانند مثال (۳) تعریف می‌شود. به سادگی دیده می‌شود c یک فضای برداری است.

۷. فضای دنباله‌ای $c_0 = c_0(\mathbb{N})$.

c_0 فضای تمام دنباله‌های $x = \{x_n\}$ از اعداد حقیقی (مختلط) است که همگرا

به صفر هستند؛ یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. اعمال جمع و ضرب اسکالر c_0 همانند مثال (۳)

تعریف می‌شود. c_0 یک فضای برداری است.

۸. فضای دنباله‌ای $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

l_∞ مجموعه تمام دنباله‌های $x = \{x_n\}$ از اعداد حقیقی (مختلط) است که

به ازای تعداد متناهی اندیس $i, x_i \neq 0$. عمل جمع و ضرب اسکالر همانند مثال (۳)

تعریف می‌شود. l_∞ یک فضای برداری است.

۹. فرض کنیم V, W دو فضای برداری روی میدان F باشند. در این صورت ضرب

دکارتی $V \times W$ یک فضای برداری با اعمال تعریف شده به صورت زیر است:

به ازای هر $(x_i, y_i) \in V \times W$ و هر $\alpha \in F$ و $i = 1, 2$ داریم

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \quad \text{و} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

۲-۱ زیرمجموعه‌های فضای برداری

فرض کنید X یک فضای برداری باشد A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند. به ازای

$x \in X$ و $\lambda \in F$ مجموعه‌های زیر نیز زیرمجموعه‌های فضای برداری X هستند.

$$x + A := \{x + a : a \in A\}$$

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$\lambda A := \{\lambda x : x \in A\}$$

۳-۱ زیر فضاها و پایه هم

۱-۳-۱ تعریف زیر فضای برداری

زیرمجموعه M از فضای برداری X را یک زیر فضای برداری (زیر فضای خطی) X

نامیم اگر:

(الف) $x + y \in M$ به ازای هر $x, y \in M$

(ب) $\lambda x \in M$ به ازای هر $x \in M$ و هر $\lambda \in F$

۲-۳-۱ تذکر

به وضوح زیرمجموعه M از فضای برداری X یک زیر فضای برداری است اگر و فقط

اگر $M + M \subset M$ و برای هر $\lambda \in F$ ، $\lambda M \subset M$.

۳-۳-۱ مثال‌ها

(۱) هر فضای برداری X حداقل دارای دو زیر فضای $M = \{0\}$ و $M = X$ است. به

این زیر فضاها زیر فضاهای ناسره X گوئیم. بقیه زیر فضاهای X را زیر فضاهای

سره X نامیم.

(۲) فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ ، زیر فضاهای سره X خطوط راستی هستند که از مبدأ می‌گذرند.

(۳) $M = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است.

(۴) $M = \{x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid x, x(0) = 0\}$ زیر فضای $C[-1, 1]$ است.

(۵) $M = \{x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid x, x(0) = 1\}$ زیر فضای $C[-1, 1]$ است.

(۶) C_c زیر فضای C است.

۱-۳-۴ تعریف

فرض کنید K زیرمجموعه فضای برداری X باشد غلاف خطی K ، $Lin(K)$ یا $SpanK$ اشتراک تمام زیر فضاهای برداری X است که شامل K هستند.

غلاف خطی K را زیر فضای تولیدشده توسط K نیز می‌نامند.

به سادگی می‌توان امتحان کرد که اشتراک هر گردایه از زیر فضاهای X یک زیر فضای X است؛ در نتیجه غلاف خطی K نیز زیر فضایی از X است. در واقع غلاف خطی K کوچک‌ترین زیر فضای X است که شامل K می‌باشد.

۱-۳-۵ گزاره

فرض کنید K زیرمجموعه‌ای از فضای برداری X باشد. غلاف خطی K مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی اعضای K است؛ یعنی:

$$SpanK = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in K, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F, n \in \mathbb{N} \right\}$$

برهان: (تمرین)

۱-۳-۶ تعریف

(۱) زیرمجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از فضای برداری X را مستقل خطی نامیم اگر معادله

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \equiv 0$$

فقط دارای جواب بدیهی $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ باشد. در غیر این صورت مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را وابسته خطی نامیم.

(۲) زیرمجموعه K از فضای برداری X را مستقل خطی نامیم اگر هر زیرمجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از K ، مستقل خطی باشند.

۱-۳-۷ تعریف

اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی X باشد و

$$X = \text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

گوییم X دارای بعد n است. در این حالت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را یک پایه برای فضای برداری X نامیم. اگر X دارای پایه‌ای متناهی نباشد X دارای بعد نامتناهی است.

۱-۳-۸ تعریف

یک پایه هم E برای فضای برداری X ، مجموعه مستقل خطی از بردارهای X است؛ به طوری که $\text{Span} E = X$.

۱-۳-۹ مثال‌ها

(الف) هر پایه $\mathbb{R}^n$ یک پایه هم است.

(ب) مجموعه $E = \{1, x, x^2, \dots\}$ یک پایه هم برای فضای برداری همه چندجمله‌ای‌هاست.

۱-۳-۱۰ گزاره

اگر E یک پایه هم برای فضای برداری X باشد، آنگاه هر $x \in X$ نمایش منحصر به فردی به صورت زیر دارد:

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \quad (e_j \in E, \alpha_j \in F, n \in \mathbb{N})$$

برهان: (تمرین)

۱-۳-۱۱ مثال‌ها

(۱) فضای $\mathbb{R}^n$ دارای بعد n است. پایهٔ همب آن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ است. هر e_j ، n تایی از اعداد حقیقی است که مؤلفهٔ j -ام آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفرند.

$$e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

(۲) فضای P_n متشکل از تمام چندجمله‌ای‌ها از درجهٔ n دارای بعد $n+1$ است. پایهٔ همب آن $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ است.

(۳) فضای توابع $C[a, b]$ دارای بعد نامتناهی است؛ زیرا به‌ازای هر n ، $C[a, b]$ زیر فضایی مانند P_n با بعد $n+1$ دارد. در نتیجه بعد $C[a, b]$ حداقل $n+1$ خواهد بود؛ لذا بعد $C[a, b]$ نامتناهی است.

(۴) فضای l_p دارای بعد نامتناهی است؛ زیرا

$$Y = \{x = (1, \alpha, \alpha^2, \dots) \mid |\alpha| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

زیرمجموعهٔ مستقل خطی l_p است و Y ناشماراست.

۱-۳-۱۲ تعریف

فرض کنید K زیرمجموعه‌ای از فضای برداری X باشد.

(الف) K محدب است اگر به‌ازای هر $x, y \in K$ و هر $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K$$

(ب) K متعادل است اگر به‌ازای هر $x \in K$ و هر $\lambda \in F$ که $|\lambda| \leq 1$

$$\lambda x \in K$$

(ج) K مطلقاً محدب است اگر K محدب و متعادل باشد.

۱-۳-۱۳ نکته

(۱) می‌توان دید که K مطلقاً محدب است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $x, y \in K$ و

$$\lambda, \mu \in F \quad \text{که} \quad |\lambda| + |\mu| \leq 1 \quad \text{داشته باشیم.}$$

$$\lambda x + \mu y \in K$$

زیرا ابتدا فرض کنید K مطلقاً محدب باشد، پس K هم محدب و هم متعادل است. فرض کنید $x, y \in K$ و $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. اگر $\lambda = 0$ (یا $\mu = 0$) واضح است که $\lambda x, \mu y = \mu y \in K$ (یا $\lambda x + \mu y = \lambda x \in K$)؛ زیرا K متعادل است. فرض کنید $\lambda, \mu \neq 0$. در این صورت چون K محدب و متعادل است، داریم:

$$x_1 = \frac{\lambda}{|\lambda|} x \in K, \quad y_1 = \frac{\mu}{|\mu|} y \in K$$

و

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} x \right) + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \left(\frac{\mu}{|\mu|} y \right) \right)$$

با توجه به اینکه

$$0 < \alpha = \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \leq 1, \quad 0 \leq t = \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \leq 1$$

داریم

$$\lambda x + \mu y = \alpha(tx_1 + (1-t)y_1) \in K$$

عکس مطلب فوق واضح است.

(۲) هر زیر فضای برداری، مطلقاً محدب است.

۴-۱ فضاهای خارج قسمتی

فرض کنید M زیر فضای برداری از فضای برداری X باشد. به ازای هر $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$x \equiv y \pmod{M} \Leftrightarrow x - y \in M$$

به سادگی می‌توان امتحان کرد که $\equiv$ یک رابطه هم‌ارزی روی X تعریف می‌کند.

به ازای هر $x \in X$ هم مجموعه x نسبت به M به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$[x] := \{y \in X : x \equiv y \pmod{M}\} = \{y \in X : x - y \in M\} = x + M$$

فضای خارج قسمتی X/M مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی $[x]$ است که

$$x \in X$$

۱-۴-۱ گزاره

فرض کنید M زیر فضای برداری از فضای برداری X باشد. به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in F$ ، اعمال جبری در فضای خارج قسمتی X/M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x] + [y] = [x + y]$$

$$\lambda \cdot [x] = [\lambda x]$$

در این صورت این اعمال خوش تعریف هستند و X/M یک فضای برداری نسبت به اعمال فوق است.

برهان: (تمرین)

۱-۴-۲ تعریف

فرض کنید M زیر فضای برداری از فضای برداری X باشد. هم بعد M در X ، بعد فضای خارج قسمتی X/M است و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\text{Co dim}(M) = \dim(X/M)$$

به وضوح اگر $X = M$ آنگاه $X/M = \{0\}$ و $\text{Co dim}(M) = 0$

۱-۵-۵ جمع مستقیم و تصاویر

۱-۵-۱ تعریف جمع مستقیم زیر فضاها

فرض کنید M و N زیر فضاهای برداری از فضای برداری X باشد. در این صورت X جمع مستقیم M و N است، اگر

$$X = M + N, \quad M \cap N = \{0\}$$

اگر X جمع مستقیم M و N باشد، می‌نویسیم $X = M \oplus N$. در این صورت می‌گوییم $M(N)$ یک متمم جبری $N(M)$ است.

۱-۵-۲ گزاره

فرض کنید M و N دو زیر فضای برداری از فضای برداری X باشند اگر $X = M \oplus N$ ، آنگاه هر $x \in X$ نمایش منحصر به فردی به صورت زیر دارد:

$$x = m + n \quad m \in M, \quad n \in N$$