



دانشگاه سیام نور
پی

آنالیز عددی ۱

(رشته ریاضی)

دکتر اسماعیل بابلیان

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

هفت	پیشگفتار
ده	مقدمه
۱	فصل اول. خطاها
۲	۱-۱ منابع خطا
۶	۲-۱ نمایش اعداد
۱۲	۳-۱ بسط اعداد در مبنای ۲
۲۲	۴-۱ ارقام بامعنا
۲۳	۵-۱ انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم
۲۷	۶-۱ انواع خطا
۳۵	۷-۱ ارقام بامعنا درست یک تقریب
۴۴	۸-۱ تولید و انتشار خطا
۵۶	۹-۱ خطای محاسبه توابع
۶۲	۱۰-۱ تمرین‌های تستی
۶۵	فصل دوم. حل معادلات غیرخطی
۶۷	۱-۲ یک مسئله کاربردی
۶۹	۲-۲ تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه‌ها
۷۸	۳-۲ تعیین ریشه‌ها با دقت مطلوب
۸۰	۴-۲ روش دوبخشی (یا روش تصنیف)
۸۸	۵-۲ روش نابه‌جایی
۹۳	۶-۲ روش تکرار ساده (یا نقطه ثابت یا تکرار تابعی)
۱۰۹	۷-۲ مرتبه همگرایی یک دنباله
۱۱۳	۸-۲ روش نیوتن - رُفَسُن
۱۲۲	۹-۲ تعیین ریشه‌های تکراری
۱۳۱	۱۰-۲ روش وتری (یا خط قاطع)
۱۳۴	۱۱-۲ حل دستگاه معادلات غیرخطی
۱۳۹	۱۲-۲ تمرین‌های تستی

۱۴۲ ۱۳-۲ مسائل تکمیلی

فصل سوم. حل معادلات چندجمله‌ای

- ۱۴۵ ۱-۳ یک مسئله کاربردی
۱۴۶ ۲-۳ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب یک معادله چندجمله‌ای
۱۴۸ ۳-۳ تعیین حدود ریشه‌های $P(z) = 0$
۱۵۴ ۴-۳ محاسبه $P(z)$ و $P'(z)$ به ازای $z = a$
۱۶۰ ۵-۳ تعیین ریشه‌های حقیقی $P(z) = 0$ با دقت مطلوب
۱۶۴

فصل چهارم. درون‌یابی

- ۱۶۷ ۱-۴ مفهوم درون‌یابی
۱۶۸ ۲-۴ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ
۱۷۰ ۳-۴ روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن
۱۷۷ ۴-۴ خطای چندجمله‌ای درون‌یاب
۱۸۶ ۵-۴ مینیمم کردن خطای چندجمله‌ای درون‌یاب
۱۹۵ ۶-۴ تفاضلات متناهی
۲۰۴ ۷-۴ کاربرد تفاضلات متناهی
۲۱۰ ۸-۴ فرمول چندجمله‌ای درون‌یاب برحسب تفاضلات پیشرو
۲۱۵ ۹-۴ فرمول چندجمله‌ای درون‌یاب برحسب تفاضلات پسرو
۲۲۴ ۱۰-۴ درون‌یابی معکوس
۲۲۶ ۱۱-۴ برازش منحنی
۲۳۰ ۱۲-۴ تمرین‌های تستی
۲۳۴ ۱۳-۴ مسائل تکمیلی
۲۳۵

فصل پنجم. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

- ۲۳۷ ۱-۵ مشتق‌گیری عددی
۲۳۹ ۲-۵ انتگرال‌گیری عددی
۲۵۰ ۳-۵ قاعده سیمسون
۲۶۴ ۴-۵ قاعده نقطه میانی
۲۷۵ ۵-۵ قاعده رامبرگ
۲۸۵ ۶-۵ قاعده‌های دقیق‌تر
۲۹۴ ۷-۵ تمرین‌های تستی
۳۰۷ ۸-۵ مسائل تکمیلی
۳۰۸

فصل ششم. حل عددی معادلات دیفرانسیل

- ۳۱۱ ۱-۶ روش بسط تیلر
۳۱۳ ۲-۶ روش‌های رونگه - کوتا
۳۲۰ ۳-۶ روش‌های چندگامی
۳۲۳

حل تمرین‌های منتخب

- ۳۲۹
۳۷۱ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۳۷۵ منابع

پیشگفتار

در دروس ریاضی، نظیر ریاضیات عمومی، مبانی ریاضیات، معادلات دیفرانسیل، آنالیز و ... مسائلی چون تعیین ریشه‌های یک معادله، محاسبه مقدار یک انتگرال معین و به‌دست آوردن جواب کلی یک معادله دیفرانسیل را دیده‌اید. در این دروس، طی چند قضیه وجودی ثابت می‌شود که مثلاً یک معادله چند ریشه دارد یا انتگرال تابع معلومی موجود است یا برای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل، طی شرایطی، می‌توان جواب به‌دست آورد. به عبارت دیگر، کار درس‌های مذکور نظری است و بیشتر به تعیین مدل ریاضی برای مسائل و بحث در وجود، یکتایی و یا عدم وجود جواب برای آن‌ها خلاصه می‌شود، و کمتر به تعیین مقدار ریشه(ها)، مقدار انتگرال، و یا مقدار جواب یک معادله دیفرانسیل در نقطه معلوم پرداخته می‌شود. برای به‌دست آوردن جواب‌های عددی مسائل مذکور باید روش‌هایی طراحی و اجرا شوند. لذا، آنالیز عددی به توصیف، تحلیل و طراحی روش‌هایی می‌پردازد که جواب‌های عددی مسائل ریاضی را به‌دست می‌دهند. در درس آنالیز عددی بر آنیم تا آنچه را که وجود آن در آنالیز ریاضی، نظریه معادلات و ... به اثبات رسیده است، با به‌کارگیری روش‌های عددی مناسب پیدا و ارائه کنیم. بدیهی است که برای تعیین جواب یا جواب‌های یک مسئله باید راه‌حل یا روش (یا الگوریتم) رسیدن به جواب را بدانیم یا طراحی کنیم. از آنجا که روش‌های عددی شامل مراحل زیاد و هر مرحله، احیاناً، متضمن انجام عملیات فراوان است لزوم بهره‌گیری از یک ابزار محاسباتی، نظیر ماشین حساب یا کامپیوتر اجتناب‌ناپذیر است.

با پیدایش کامپیوتر و به‌کارگیری آن در محاسبات عددی موضوع آنالیز عددی از اهمیت بیشتری برخوردار شد و تحرک قابل توجهی یافت. اما نباید تصور کرد که آنالیز عددی مبحث تازه‌ای است که همزمان با پیشرفت کامپیوتر پدید آمده است. در واقع، آنالیز عددی با تهیه نتایج به‌صورت اعداد مرتبط است که بی‌شک توسط بشر اولیه نیز به‌کار می‌رفته است. در این زمینه بابلی‌ها و مصریان قدیم به خاطر مهارت‌های عددی که داشتند، پیشتازند. لوحی بابلی، که تاریخ آن به تقریباً دو هزار سال قبل از میلاد برمی‌گردد، پیدا شده است که مجذور اعداد صحیح از یک تا شصت را به‌دست می‌دهد. لوح دیگری مؤید ثبت خسوف و کسوف‌ها از حدود سال ۷۵۰ قبل از میلاد است. مصریان کسر را مورد توجه قرار دادند و درباره بسط یک کسر، به‌صورت مجموع کسرهایی که صورت آن‌ها واحد باشد، روش‌هایی ارائه کردند که در نوع خود بسیار جالب‌اند. [۱] مصریان روش نابه‌جایی را نیز برای تعیین ریشه‌های یک معادله غیرخطی ابداع کردند. ریاضیدانان یونان قدیم نیز در این رشته فعال بودند. ارشمیدس، در حدود سال ۲۲۰ قبل از میلاد، کران‌های زیر را برای عدد π ارائه کرد:

$$3\frac{1}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

روند تکراری

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} \left(X_n + \frac{a}{X_n} \right)$$

که در آن $a > 0$ ، برای محاسبه جذر تقریبی a ، که معمولاً به نیوتن نسبت داده می‌شود، در واقع حدود صد سال قبل از میلاد توسط هرون مورد استفاده قرار گرفت. فیثاغورسیان محاسبه سری‌ها را مورد توجه قرار دادند و جدول‌های مثلثاتی قبل از قرن دهم تنظیم شد.

با توسعه سریع دانش ریاضی و انقلاب علمی در غرب، آنالیز عددی نیز پیشرفت کرد. این پیشرفت مرهون تلاش و توجه دانشمندانی چون نیوتن، اویلر، لاگرانژ، گاوس و بسل بود که مبین علاقه همه‌جانبه به موضوع آنالیز عددی است. در درس مبانی کامپیوتر با تاریخچه محاسبات و اختراعات افرادی چون نپر، پاسکال و لایبنیتز، که همه در جهت آسان کردن محاسبات بود، آشنا شدید [۱۱]. تدارک ماشین‌های محاسب در کارهای عددی انقلابی به‌وجود آورد که با پیدایش کامپیوتر الکترونیک تشدید شد. با

به کارگیری کامپیوتر، محاسبات عددی و تحلیل داده‌هایی که تا چند دهه قبل حتی تصور انجام آن‌ها در طول عمر یک انسان هم نمی‌رفت به کاری عادی و روزمره تبدیل شد. ضمناً، روش‌های عددی کارآیی که سال‌ها از ابداع آن‌ها می‌گذشت، اما به خاطر بستگی آن‌ها به اعداد اصم (گنگ) و نیاز به ثبت ضرایب عددی زیاد، کمتر به کار گرفته می‌شدند، مانند روش انتگرال‌گیری گاوس، با ظهور کامپیوتر متداول شد و گسترش یافت. با وجود این، باید توجه داشت که درس آنالیز عددی را نباید با برنامه‌نویسی و پردازش اطلاعات یکی گرفت. اما کسانی که با طراحی و به کارگیری الگوریتم‌های عددی سروکار دارند باید در مورد به کار گرفتن بهینه کامپیوتر در انجام محاسبات و انتخاب روش مناسب، اطلاعات و تجربه کافی داشته باشند. به همین دلیل است که گفته می‌شود:

آنالیز عددی علم است و محاسبات عددی هنر

در فصول مختلف این کتاب با روش‌های متنوعی برای حل یک مسئله، مثلاً تعیین تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 0$ ، آشنا خواهید شد. این روش‌ها با استفاده از شهود ریاضی، آنالیز ریاضی و قضایای آن حاصل می‌شوند، و تقریبی از جواب مسئله مورد نظر را به دست می‌دهند. باز هم به کمک آنالیز ریاضی اکثراً کران بالایی برای خطای جواب تقریبی قابل محاسبه است. (این‌ها جنبه‌های علمی آنالیز عددی را نشان می‌دهند.)

اما، برای تعیین جواب یک مسئله خاص کدام روش را باید به کار برد؟ این موضوع به دید، بینش علمی و تجربه متخصص آنالیز عددی بستگی دارد، که در طول زمان و با ممارست حاصل می‌شود. (این‌ها جنبه‌های هنری آنالیز عددی هستند.)

مقدمه

کتاب حاضر پس از دو بار چاپ آزمایشی، با توجه به نظر اساتیدی که آن را تدریس و دانشجویانی که آن را مطالعه کردند بازنگری و تدوین شده است. این کتاب شامل ۶ فصل است که خلاصه هر فصل در اینجا آمده است.

فصل اول: خطاها

در این فصل ضمن توجه به منابع خطا و به خصوص ذخیره اعداد در ماشین‌های محاسب که توأم با خطاست، انواع خطاها و تولید و انتشار آن‌ها را که در انجام عملیات روی اعداد تقریبی پیش می‌آیند مورد بررسی قرار می‌دهیم و توصیه‌های لازم را ارائه می‌کنیم.

فصل دوم: حل عددی معادلات غیرخطی

در این فصل ابتدا به تعیین تعداد و حدود ریشه‌های حقیقی معادله $f(x)=0$ می‌پردازیم و بعد روش‌های گوناگون برای محاسبه ریشه یا ریشه‌های این معادله را، با دقت مطلوب، مورد بررسی قرار می‌دهیم و روش‌های متفاوت را از نظر همگرایی و کارایی با هم مقایسه می‌کنیم.

فصل سوم: حل عددی معادلات چندجمله‌ای

تعیین ریشه‌های یک معادله چندجمله‌ای به صورت $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ از دیرباز مورد توجه بوده است. در این فصل روش‌های خاص این معادلات را برای تعیین حدود و تعداد ریشه‌ها و محاسبه ریشه‌های حقیقی آن مطالعه می‌کنیم.

فصل چهارم: درونیابی

این فصل با تشریح درونیابی و برون‌یابی شروع و روش‌های مختلفی برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب ارائه می‌شود. کاربردهای درونیابی در قسمت‌های مختلف این فصل نشان داده خواهد شد و با مثال‌های متنوع کارآیی روش‌های متفاوت مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

فصل پنجم: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

این فصل به مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی اختصاص دارد و در آن روش‌های تعیین مشتق یک تابع جدولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین روش‌های تعیین مقادیر تقریبی انتگرال معین توابع جدولی یا توابعی که ضابطه آن‌ها معلوم است، توصیف خواهد شد و خطای هر روش به‌دست خواهد آمد. در پایان این فصل دو روش کلی، یعنی روش‌های نیوتن - کوتز و گاوس، برای تعیین تقریبی از یک انتگرال معین بررسی خواهد شد.

فصل ششم: حل عددی معادلات دیفرانسیل

در این فصل به بررسی حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه می‌پردازیم و کاربرد روش‌های بسط تیلر، درونیابی و انتگرال‌گیری را در به‌دست آوردن فرمول‌های مربوط به تعیین مقادیر تقریبی جواب معادلات دیفرانسیل ارائه می‌کنیم.

در پایان مراجعی که مطالب کتاب از آن‌ها گرفته شده است، و یا می‌توان در مورد هر مطلب اطلاعات بیشتری به کمک آن‌ها کسب کرد، آمده است. ضمناً واژه‌نامه‌ای جهت اطلاع دانشجویان تهیه شده است. در این واژه‌نامه اکثر واژه‌های تدوین شده توسط انجمن ریاضی ایران و مرکز نشر دانشگاهی به کار رفته است [۱۵].

در هر فصل مطالبی که در بخش‌های ستاره‌دار عنوان شده‌اند الزاماً مطالب مشکل نیستند ولی مدرس می‌تواند در تدریس اولیه کتاب از آن‌ها بگذرد (بدون اینکه پیوستگی مطالب برهم بخورد). اما این مطالب معمولاً در امتحانات کارشناسی ارشد مطرح می‌شوند و مطالعه آن‌ها به افرادی که قصد ادامه تحصیل در این رشته را دارند توصیه می‌شود. ضمناً در آخر هر فصل تست‌های مربوط به امتحانات مختلف و مسائل تکمیلی، که بیشتر مسائل تشریحی کنکورهای کارشناسی ارشد هستند، اضافه شده است. در آخر کتاب حل بعضی تمرینات آخر هر بخش را مشاهده می‌کنید. همان‌گونه که ملاحظه خواهید کرد، به دلیل طولانی بودن مراحل به‌دست آوردن جواب بعضی تمرینات، جواب اکثر آن‌ها به اختصار داده شده است (اکثراً، چند تکرار اولیه و بعد جواب تقریبی نهایی ارائه شده است). البته حسن این کار در این است که دانشجویان را ترغیب می‌کند که جواب‌های تقریبی را خود نیز محاسبه و با جواب نهایی داده شده مقایسه کنند.

اسماعیل بابلیان

بهمن ۷۲

فصل اول

خطاها

مقدمه

برای تعیین جواب یا جواب‌های یک مسئله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه‌حلی مناسب برای رسیدن به جواب، با انجام محاسبات لازم جواب را به‌دست آوریم. در این فرایند خطاهایی پیش می‌آید که انواع متفاوت دارند. آشنایی با منشأ این خطاها، نحوه بروز آنها و کنترل آنها موضوع این فصل است.

هدف‌های کلی

۱. شناخت منابع خطا و تشخیص آنها در هر مسئله
۲. بررسی منابع خطا و راه‌های کمینه‌سازی آنها
۳. شناخت انواع خطاها و رابطه آنها با دقت یک تقریب
۴. جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی
۵. شناخت روش‌های محاسبه پایدار و ناپایدار
۶. محاسبه مقدار تقریبی توابع

هدف‌های رفتاری

- دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:
۱. منشأ خطاها را در یک مسئله واقعی تعیین کند.

۲. بسط اعداد را در مبناهای مختلف بنویسد و از بسط اعشاری یک عدد، تقریبی مناسب انتخاب کند.

۳. انواع خطاها را بشناسد و ارتباط آن‌ها را با دقت یک تقریب بداند.

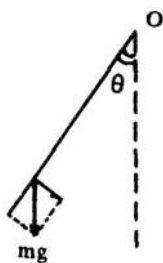
۴. یک محاسبه عملی را چنان ترتیب و به‌انجام رساند که رشد خطاها حداقل باشد.

۵. محاسبه توابع و سری‌ها را با حداقل خطا و عملیات انجام دهد.

۱-۱ منابع خطا

امروزه، تقریباً برای حل هر مسئله‌ای ابتدا یک مدل ریاضی تعیین و بعد با استفاده از روش‌های موجود، یا روش‌هایی که ابداع می‌شوند، به حل آن مدل مبادرت می‌شود. در زیر مراحل به‌دست آوردن مدل ریاضی، و بعد جواب یک مسئله واقعی را با توضیحات کافی ارائه می‌کنیم.

مسئله تعیین حرکت یک آونگ ساده به طول l و جرم m است که به اندازه زاویه θ از حالت قائم منحرف شده است (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱

واضح است که هوا در مقابل حرکت آونگ مقاومت می‌کند. ضمناً اصطکاک بین نخ و نقطه آویز وجود دارد. اما، برای تعیین مدل ریاضی مسئله، با توجه به ناچیز بودن مقاومت هوا و اصطکاک، از مقاومت هوا در مقابل حرکت آونگ و از اصطکاک نقطه آویز چشم‌پوشی می‌کنیم. با ارتکاب این دو خطا، که ما را از مدل واقعی مسئله (هرچند به اندازه ناچیز) دور می‌کنند، به تعیین مدل ریاضی مسئله می‌پردازیم.

با تصویر کردن رابطه $\vec{F} = m\vec{y}$ روی دو محور عمود بر هم، یکی در امتداد نخ و دیگری قائم بر آن، نیروی $mg \cos \theta$ با نیروی کشش نخ ختشی می‌شود و نیروی $mg \sin \theta$ سبب حرکت آونگ روی قسمتی از محیط یک دایره به مرکز O و شعاع l می‌شود. با توجه به اینکه شتاب حرکت $l\theta''$ است داریم:

$$-mg \sin \theta = ml\theta'' \quad (1-1)$$

که در آن $\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ و t معرف زمان است و علامت منها برای آن است که جهت شتاب و نیرو متفاوت‌اند. از (1-1) نتیجه می‌شود:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (2-1)$$

اگر بخواهیم θ را بر حسب t از (2-1) به دست آوریم باید یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی را حل کنیم. اما، در مکانیک مقدماتی، برای ساده شدن مدل ریاضی مسئله θ کوچک گرفته می‌شود که در نتیجه می‌توان، با تحمل خطایی جدید به جای $\sin \theta$ مقدار θ را (برحسب رادیان) قرار داد تا معادله ساده زیر حاصل شود.

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \theta \quad (3-1)$$

با فرض $\omega^2 = \frac{g}{l}$ معادله (3-1) به معادله مرتبه دوم خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\theta'' = -\omega^2 \theta$$

که جواب عمومی آن عبارت است از (با جایگذاری می‌توان آزمایش کرد):

$$\theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (4-1)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ و A و B دو مقدار ثابت هستند که با توجه به شرایط اولیه (یعنی وضع آونگ در شروع حرکت) قابل محاسبه‌اند. اما، آنچه از (۴-۱) معلوم می‌شود آن است که حرکت آونگ نوسانی است. و دوره، تناوب آن عبارت است از:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5-1)$$

تاکنون خطاهایی که مرتکب شده‌ایم خطای مدل نامیده می‌شوند. لازم به تذکر است که تشخیص عوامل مؤثر در تعیین مدل ریاضی یک مسئله همیشه به این سادگی نیست و گاهی چشم‌پوشی از یک عامل ممکن است مدل مسئله را به کلی تغییر و جوابی به دست دهد که با جواب واقعی تفاوت فاحش داشته باشد. این گونه مسائل به مسائل بدوضع یا بدخیم معروف‌اند. یک نمونه از این مسائل را در فصل سوم بررسی خواهیم کرد.

خطاهای دیگر زمانی ظاهر می‌شوند که بخواهیم مقدار T را از (۵-۱)، به ازای مقادیر معینی از l و g حساب کنیم.

می‌دانیم که طول نخ، یعنی l، و مقدار g، یعنی ثابت ثقل، از طریق اندازه‌گیری به دست می‌آیند. این دو کمیت را داده‌ها یا مفروضات مسئله می‌نامند. به‌طورکلی، به دلیل نادقیق بودن وسایل اندازه‌گیری، داده‌ها دارای خطا هستند که مقدار این خطا به وسیله اندازه‌گیری و دقت اندازه‌گیری بستگی دارد. از این رو، منبع دوم خطا، داده‌ها هستند.

اعداد ۲ و π را که در فرمول (۵-۱) دیده می‌شوند، و جزء مفروضات مسئله نیستند، ثابت‌های فرمول (۵-۱) می‌گویند. وقتی بخواهیم T را حساب کنیم باید به جای π ، تقریبی از آن، مثلاً $\frac{22}{7}$ یا ۳٫۱۴، قرار دهیم. لذا، خطایی مرتکب می‌شویم که مربوط به نمایش اعداد است (برای توضیح بیشتر به ۱-۲ مراجعه کنید).

منبع خطای بعدی اعمال حسابی هستند. فرض کنید l و g هر یک با دو رقم اعشار داده شده‌اند. در این صورت، معمولاً، $\frac{1}{g}$ را نیز تا دو رقم اعشار منظور می‌کنند.

اما، $\frac{1}{g}$ ، حتی اگر 1 و g شامل هیچ خطایی نباشند، معمولاً بیش از دو رقم اعشار دارد و در نتیجه با منظور کردن فقط دو رقم اعشار خطایی مرتکب می‌شویم. در ضرب اعداد اعشاری نیز چنین خطایی پیش می‌آید.

بالاخره در محاسبه جذر $\frac{1}{g}$ باید روشی اختیار کنیم. برای توضیح بیشتر فرض کنید $2 = \frac{1}{g}$ و دو روش را برای محاسبه جذر 2 ارائه می‌کنیم. روش (الف) همان روش آموزش داده شده در دوره راهنمایی است و روش دوم حالت خاصی از روش تکراری نیوتن است که در فصل دوم با آن آشنا خواهید شد.

$\sqrt{2,000000}$	۱,۴۱۴	$x_0 = 1$
-۱	$1 \times 2 = 2$	$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$
۱۰۰	$24 \times 4 = 96$	$x_1 = \frac{3}{2} = 1,5$
-۹۶	$14 \times 2 = 28$	$x_2 = 1,416666...$
۴۰۰	$281 \times 1 = 281$	$x_3 = 1,414215686...$
-۲۸۱	$141 \times 2 = 282$	$x_4 = 1,414213562...$
۱۱۹۰۰	$2824 \times 4 = 11296$	
-۱۱۲۹۶		
۰,۰۰۰۶۰۴		
	روش (الف)	روش (ب)

می‌بینید که، باتوجه به مقدار $\sqrt{2}$ یعنی ... ۱,۴۱۴۲۱۳۵۶۲، از دو روش (الف) و (ب) جواب‌های تقریبی متفاوتی برای $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید. روش (الف) هر بار یک رقم از بسط اعشاری $\sqrt{2}$ را می‌دهد ولی روش (ب) در تکرار سوم، پنج رقم از بسط اعشاری $\sqrt{2}$ و در تکرار چهارم، نه رقم اعشار از بسط $\sqrt{2}$ را به‌دست می‌دهد. ازاین‌رو، خطای جواب‌های تقریبی به‌دست آمده به روش محاسبه، و مرحله‌ای که عملیات متوقف می‌شوند، بستگی دارد. این خطاها مربوط به روش هستند. بنابراین آنچه گفته شد فهرست منابع خطا چنین است:

الف) خطای مدل. این خطا شامل صرف نظر کردن‌ها، چشم‌پوشی‌ها و ساده‌نویسی‌ها جهت تعیین مدل ریاضی مسئله است.

ب) خطای داده‌ها. این خطا به هنگام اندازه‌گیری و برآورد مفروضات مسئله پیش می‌آید.

پ) خطای نمایش اعداد. نمایش اعشاری یا دودویی اکثر اعداد با تعدادی متناهی رقم امکان‌پذیر نیست. از این رو، انتخاب تعدادی متناهی از ارقام بسط یک عدد سبب این خطا می‌شود.

ت) خطای اعمال حسابی. حاصل بعضی اعمال بر دو عامل عددی دارای تعدادی نامتناهی رقم است و انتخاب تعدادی متناهی از این ارقام سبب این خطا می‌شود.

ث) خطای روش. روش‌های عددی عموماً تکراری هستند و تقریبی از جواب دقیق را به دست می‌دهند. دقت این تقریب به نوع روش و مرحله توقف آن بستگی دارد.

۱-۱-۱ تبصره

اگر ضمن انجام عملیات بر روی عدد ۲۳۳، آن را ۲۲۳ منظور کنیم یک اشتباه مرتکب شده‌ایم نه خطا. همچنین اشکالاتی که در اثر تغییر ناگهانی و شدید ولتاژ برق برای کامپیوترها پیش می‌آید و بعضاً موجب نتایج عددی غلط می‌شود را خطا نمی‌نامیم. در این فصل تنها به بررسی خطاها می‌پردازیم.

از پنج منبع خطایی که ذکر شد خطای مدل و خطای داده‌ها به نوع مسئله بستگی دارند و افرادی که در رشته‌های مختلف به تعیین مدل مسئله می‌پردازند مسئول آن‌ها هستند. اما، سه خطای بعدی مربوط به آنالیز عددی است. در این فصل خطای نمایش اعداد و خطای اعمال حسابی را مورد بررسی دقیق قرار می‌دهیم. معمولاً خطای هر روش هنگام بررسی آن روش مورد بحث قرار می‌گیرد و کران بالایی برای خطای جواب‌های تقریبی به دست می‌آید.

۱-۲ نمایش اعداد

در اکثر مسائل، که در آن‌ها جواب عددی مورد نظر است، معمولاً تعداد عملیات و نوع آن‌ها به گونه‌ای است که انجام آن‌ها با دست و به کمک قلم و کاغذ بسیار مشکل و

گاهی غیرممکن است. برای تعیین جواب عددی مسائل از ماشین حساب یا کامپیوتر استفاده می‌شود، که از این به بعد به آن‌ها وسایل محاسباتی می‌گوییم. همان‌طور که می‌دانید کار با کسرهای متعارفی و اعداد گنگ (اصم) توسط ماشین حساب و کامپیوتر عملی نیست (البته کار با کسرها به‌طور محدود در ماشین حساب‌ها امکان دارد)، ولی به راحتی می‌توان با اعداد اعشاری کار کرد.

۱-۲-۱ بسط اعشاری اعداد

منظور از بسط اعشاری یک عدد مثبت نمایش آن به شکل

$$a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

است که در آن

$$a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq 9$$

بسط فوق برای اعداد صحیح و اعشاری راحت است. مثلاً،

$$\begin{aligned} 2347 &= 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\ 37,409 &= 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

اما برای اعداد کسری و گنگ باید وجود و نحوه به دست آوردن بسط اعشاری را توضیح دهیم. در مورد وجود و یکتایی بسط اعشاری برای هر عدد حقیقی مثبت قضیه زیر را داریم.

۱-۲-۲ قضیه

اگر A عددی حقیقی و مثبت باشد دارای بسط اعشاری منحصر به فرد زیر است (ر. ک. [۱۲] ص ۵۷۳):

$$A = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots \quad (6-1)$$

که در آن $a_m \neq 0$, $0 < a_i \leq 9$ و بی‌نهایت بار $a_i \neq 9$. شرط بی‌نهایت بار $a_i \neq 9$ برای یکتایی بسط لازم است زیرا، طبق فرمول حد مجموع یک سری هندسی داریم:

$$0,999999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = \frac{0,9}{1-0,1} = 1$$

یعنی، اگر شرط مذکور را برداریم برای عدد یک دو بسط اعشاری خواهیم داشت. همچنین داریم:

$$0,45 = 0,449999... \quad \text{و} \quad 0,27 = 0,269999...$$

و به‌طور کلی، هر عدد اعشاری مختوم (با تعدادی متناهی رقم) دارای دو بسط اعشاری خواهد بود.

۱-۲-۳ مثال

$$\frac{2}{3} = 0,666... = 0,6 \quad \text{و} \quad \frac{22}{7} = 3,142857$$

منظور از ۱۴۲۸۵۷ آن است که دسته ارقام ۱۴۲۸۵۷، با همین ترتیب، مرتباً تکرار می‌شوند، همچنین در مورد ۶.

$$\sqrt{2} = 1,4142... \quad \text{و} \quad \frac{3017}{198} = 15,237 \quad \text{و} \quad \frac{23}{5} = 4,6$$

در مثال‌های بالا بسط $\frac{23}{5}$ مختوم و بسط بقیه اعداد نامختوم است. بسط $\frac{2}{3}$ ،

$\frac{22}{7}$ ، $\frac{3017}{198}$ نامختوم و متناوب است اما بسط $\sqrt{2}$ نامختوم است ولی متناوب نیست (به قضیه زیر و نتیجه آن توجه کنید).

۱-۲-۴ قضیه

اگر بسط اعشاری عدد A مختوم یا نامختوم و متناوب باشد، A یک عدد گویاست.

برهان

ابتدا فرض می‌کنیم که بسط اعشاری A مختوم باشد. مثلاً،

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n$$

که در آن $a_1, a_2, \dots, a_m$ ارقام قسمت صحیح A و $b_1, b_2, \dots, b_n$ ارقام بعد از ممیز هستند. با این توضیحات داریم:

$$\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_m + \frac{1}{10^n} b_1 b_2 \dots b_n \\ A - a_1 a_2 \dots a_m &= \frac{1}{10^n} b_1 b_2 \dots b_n \\ A &= \frac{10^n \times a_1 a_2 \dots a_m + b_1 b_2 \dots b_n}{10^n} \end{aligned}$$

چون صورت و مخرج کسر اعداد صحیح هستند A گویاست. حال فرض کنید بسط اعشاری A نامختوم و متناوب باشد. مثلاً

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_k \quad (V-1)$$

طبق قرار داد قبلی ارقام $c_1 c_2 \dots c_k$ مرتباً تکرار می‌شوند (توجه کنید که ممکن است m یا n صفر باشد که در این صورت $a_1 a_2 \dots a_m$ یا $b_1 b_2 \dots b_n$ وجود نخواهد داشت). از (V-1) نتیجه می‌شود

$$A - a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n = \frac{1}{10^n} \times \frac{1}{10^k} c_1 c_2 \dots c_k$$

ضمناً داریم:

$$c_1 c_2 \dots c_k = c_1 c_2 \dots c_k \left(\frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \dots \right)$$

حد مجموع سری داخل پرانتز برابر است با

$$\frac{\frac{1}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}} = \frac{1}{10^k - 1}$$

بنابراین،

$$c_1 c_2 \dots c_k = \frac{c_1 c_2 \dots c_k}{10^k - 1}$$

در نتیجه،

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n + \frac{c_1 c_2 \dots c_k}{10^n (10^k - 1)} \quad (۸-۱)$$

که نشان می‌دهد A گویاست. (چرا؟)

عکس نقیض قضیه ۴-۲-۱ نتیجه مهم زیر را به دست می‌دهد.

۵-۲-۱ نتیجه

اگر A عددی گنگ باشد بسط اعشاری آن نامختوم است ولی متناوب نیست. یکی از مسائلی که در این قسمت مطرح می‌شود نوشتن کسر مساوی یک عدد اعشاری نامختوم و متناوب است. نحوه به دست آمدن این کسر در قضیه زیر آمده است.

۶-۲-۱ قضیه

اگر $A = a_1 \dots a_m / b_1 \dots b_n c_1 \dots c_k$ ، آنگاه

$$A = a_1 \dots a_m + \frac{\underbrace{b_1 \dots b_n}_{\text{تا } n} c_1 \dots c_k - b_1 \dots b_n}{\underbrace{10 \dots 10}_{\text{تا } k} \underbrace{10 \dots 10}_{\text{تا } n}} \quad (۹-۱)$$

برهان

بنابر قضیه ۴-۲-۱: