



بهینه‌سازی خطی

(رشته ریاضی)

دکتر عقيله حيدري

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

پیشگفتار	نه
فصل ۱ - مدل سازی و برنامه ریزی خطی	۱
مقدمه	۱
۱-۱ مدل سازی	۲
۲-۱ انواع مدل سازی	۳
۳-۱ فرایند عملی ساخت یک مدل برنامه ریزی خطی	۴
۴-۱ برنامه ریزی خطی	۱۰
۵-۱ فرم های برنامه ریزی خطی و تبدیل آن ها به یکدیگر	۱۴
خلاصه	۱۸
۶-۱ سؤالات چهار گزینه ای	۱۸
فصل ۲ - روش های حل مسائل برنامه ریزی خطی	۲۱
مقدمه	۲۱
۱-۲ روش ترسیمی	۲۲
۲-۲ روش سیمپلکس	۳۵
۱-۲-۲ الگوریتم سیمپلکس	۳۷
۲-۲-۲ حل مسائل برنامه ریزی خطی غیرکانونی نامنفی	۴۴
خلاصه	۶۲
۳-۲ سؤالات چهار گزینه ای	۶۶
فصل ۳ - حالات خاص برنامه ریزی خطی	۶۹
مقدمه	۶۹
۱-۳ حالت خاص جواب بهینه چندگانه	۷۰
۲-۳ حالت خاص جواب تباهیده (تیهگن)	۷۲
۳-۳ حالت خاص ناحیه موجه نامحدود	۷۷
۱-۳-۳ ناحیه موجه نامحدود با جواب بهینه معین	۷۷
۲-۳-۳ ناحیه موجه نامحدود با جواب بهینه نامعین	۷۹

۴-۳	حالت خاص بدون جواب موجه	۸۱
۸۳	خلاصه	
۴-۳	سؤالات چهارگزینه‌ای	۸۳

فصل ۴ - نظریه دوگانگی

۸۵	مقدمه	
۸۶	۱-۴ تفسیر اقتصادی عناصر جدول سیمپلکس مسئله کانونی نامنفی	
۸۷	۱-۴-۱ تفسیر $\bar{c}_i$ (ضریب عنصر $\bar{a}_{ij}$ در سطر Z)	
۸۸	۱-۴-۲ تفسیر $\bar{b}_i$ (مقدار سمت راست متناظر با سطر $\bar{a}_{im}$)	
۸۸	۱-۴-۳ تفسیر ضرایب فنی	
۹۰	۱-۴-۴ قیمت سایه	
۹۱	۲-۴ مسئله دوگان	
۱۰۵	۳-۴ روش سیمپلکس دوگان	
۱۱۲	خلاصه	
۱۱۳	۴-۴ سؤالات چهارگزینه‌ای	

فصل ۵ - روابط کلیدی و تحلیل حساسیت

۱۱۷	مقدمه	
۱۱۸	۱-۵ روابط کلیدی حاکم بر جداول سیمپلکس	
۱۳۰	۱-۵-۱ محاسبه سطر Z با استفاده از قیمت‌های سایه‌ای	
۱۳۳	۲-۵ تحلیل حساسیت	
۱۳۴	۱-۲-۵ تحلیل حساسیت ترسیمی	
۱۴۱	۲-۲-۵ تحلیل حساسیت تغییرات گسسته با استفاده از جدول نهایی	
۱۵۳	۳-۲-۵ تعیین حدود مجاز پارامترها	
۱۵۷	۴-۲-۵ تغییر همزمان چند پارامتر	
۱۶۰	خلاصه	
۱۶۴	۳-۵ سؤالات چهارگزینه‌ای	

فصل ۶ - الگوریتم‌های خاص

۱۶۷	مقدمه	
۱۶۸	۱-۶ برنامه‌ریزی خطی پارامتری	
۱۶۸	۱-۶-۱ تغییرات پارامتری ضرایب تابع هدف	
۱۷۲	۱-۶-۲ تغییرات پارامتری مقادیر سمت راست	
۱۷۶	۱-۶-۳ تغییرات پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف و مقادیر سمت راست	
۱۷۹	۲-۶ روش سیمپلکس اصلاح‌شده	
۱۸۵	خلاصه	
۱۸۷	۳-۶ سؤالات چهارگزینه‌ای	

فصل ۷ - حمل و نقل

۱۸۹	مقدمه	
۱۹۰	۱-۷ مدل حمل و نقل	
۱۹۴	۲-۷ الگوریتم حمل و نقل برای مسائل استاندارد	
۱۹۵	۱-۲-۷ روش گوشه شمال‌غربی	
۱۹۷	۲-۲-۷ روش کمترین هزینه	
۱۹۸	۳-۲-۷ روش وُگل	

۲۰۹	۳-۷ مسائل برنامه‌ریزی حمل و نقل غیراستاندارد
۲۰۹	۱-۳-۷ مسائل برنامه‌ریزی حمل و نقل با تابع هدف ماکزیمم‌سازی
۲۱۰	۲-۳-۷ مسائلی که تعدیل شده نیستند
۲۱۴	خلاصه
۲۱۶	۴-۷ سؤالات چهارگزینه‌ای

۲۱۹	فصل ۸ - نقل و انتقالات و تخصیص
۲۱۹	مقدمه
۲۲۱	۱-۸-۱ روش حل مسائل نقل و انتقال
۲۲۴	۲-۸-۱ نقل و انتقالات غیراستاندارد
۲۲۶	۲-۸-۲ مسائل تخصیص
۲۲۸	۱-۲-۸ روش حل مسائل تخصیص
۲۳۱	۲-۲-۸ مسائل تخصیص غیراستاندارد
۲۳۷	خلاصه
۲۳۷	۳-۸ سؤالات چهارگزینه‌ای

۲۴۱	تمرینات مروری
۲۴۱	تمرینات مروری فصل ۱
۲۴۴	تمرینات مروری فصل ۲
۲۴۹	تمرینات مروری فصل ۳
۲۶۲	تمرینات مروری فصل ۴
۲۶۸	تمرینات مروری فصل ۵
۳۰۲	تمرینات مروری فصل ۶
۳۲۳	تمرینات مروری فصل ۷
۳۴۵	پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای
۳۴۵	کتابنامه

پیشگفتار

علم و نبوغ مدیران مهم‌ترین عامل در پیشرفت و بقای یک سازمان در دنیای رقابتی و پرشتاب امروز می‌باشد. تصمیم درست موجب رشد سازمان و تصمیم‌گیری نادرست باعث از دست دادن موقعیت‌های پیشرفت و حتی فنا خواهد شد.

دیگر نمی‌توان تنها بر اساس تجربه به این امر مهم پرداخت بلکه بهره‌گیری از اطلاعات و دانش مدیریتی از جمله وظایف خطیر یک مدیر محسوب می‌شود و تکنیک‌های کمی و ریاضی کاربردی از ابزارهای مناسب و مطمئن برای این منظور می‌باشند.

منشأ تحقیق در عملیات و بهینه‌سازی، عملیات نظامی جنگ جهانی دوم در سال ۱۹۴۱ بود، وقتی دانشمندان انگلیسی توانستند با بهره‌گیری از دانش متخصصان علوم مختلف در استفاده از رادار که تازه اختراع شده بود، در جنگ موفقیت‌های چشمگیری به دست آورند. برای مثال، فون نیومن و همکارانش در زمینه نظریه بازی‌ها و جرج دانتزیک در زمینه ارائه روش کارا و موفق **سیمپلکس** مشغول به کار شدند.

دو عامل پیشرفت این علم عبارتند از پیشرفت‌های چشمگیر در زمینه توسعه فنون مربوطه و اختراع کامپیوتر با سرعت بالا.

در ادامه این پیشرفت‌ها، انجمن‌های علمی و حرفه‌ای زیادی تشکیل شدند از جمله انجمن علمی پژوهش عملیاتی انگلیس (۱۹۵۵) و انجمن پژوهش عملیاتی آمریکا (۱۹۵۲) و... که افراد زیادی از علاقه‌مندان و محققان در زمینه پژوهش عملیاتی را گرد هم آورد.

در دهه‌های ۷۰ و ۸۰، پژوهش عملیاتی و سیستم‌های اطلاعاتی مدیریت با یکدیگر تلفیق شدند و سیستم‌های پشتیبانی از تصمیم را به وجود آوردند.

چشم‌انداز مطالب

فصل اول، مدل‌سازی و برنامه‌ریزی خطی. این فصل به بررسی موضوعات مربوط به مدل‌سازی می‌پردازد. تعریف مدل، شناخت انواع مختلف مدل، معرفی مدل ریاضی به عنوان مدلی کارا و آشنایی با مراحل ساخت آن و همچنین مدل‌سازی یک مسئله نمونه از مواردی است که مطالعه خواهد شد.

برنامه‌ریزی خطی برای تخصیص منابع محدود به فعالیت‌های معین در جهت رسیدن به هدفی خاص به کار می‌رود. شناخت فرم‌های گوناگون برنامه‌ریزی خطی، از جمله مواردی است که در این فصل به آن می‌پردازیم.

فصل دوم، روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی. ابتدا روشی ساده برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دو بُعدی به نام روش ترسیمی ارائه شده و سپس به معرفی روشی کارا و مؤثر به نام روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم.

فصل سوم، حالات خاص برنامه‌ریزی خطی. نحوه تشخیص موارد خاص برنامه‌ریزی خطی با استفاده از روش ترسیمی و روش سیمپلکس در این فصل ارائه می‌شود.

فصل چهارم، نظریه دوگانگی. ابتدا به تفسیر اقتصادی عناصر جداول سیمپلکس می‌پردازد که در تحلیل نهایی نتایج توسط مدیران کمک زیادی می‌کند. بعد به چگونگی پیدایش مسئله دوگان خواهیم پرداخت و در ادامه روشی کارا برای مسائلی که در ابتدا شرط بهینگی را دارا می‌باشند ولی جواب قابل قبولی ندارند، ارائه می‌دهیم که به آن روش سیمپلکس دوگان می‌گویند.

فصل پنجم، روابط کلیدی و تحلیل حساسیت. با توجه به اینکه روش سیمپلکس یک الگوریتم می‌باشد، به نظر می‌رسد بتوان روابطی یافت که اطلاعات هر جدول دلخواه را با استفاده از صورت مسئله به دست آورد. ما در این فصل، به دنبال این هستیم که اگر بعد از حل مسئله تغییراتی در پارامترهای a_{ij} , b_i , c_j و $i=1, 2, \dots, m$ و

$i = 1, 2, \dots, m$ رخ دهد، آیا مجبوریم مجدداً به حل مسئله پردازیم یا اینکه با استفاده از صورت مسئله و جواب بهینه اولیه، جواب بهینه جدید را می‌توان یافت. ما به دنبال شناخت این امکان و به‌کارگیری آن برای تحلیل تغییرات احتمالی پارامترها و حل انواع خاصی از مدل برنامه‌ریزی خطی می‌باشیم.

فصل ششم، الگوریتم‌های خاص. در این فصل با استفاده از روابط کلیدی به حل مسائلی می‌پردازیم که اثر تغییرات پارامتریک ضرایب مسئله را در یک بازه دلخواه مورد مطالعه قرار می‌دهند. در ادامه روش سیمپلکس اصلاح‌شده معرفی می‌گردد که دقیقاً براساس همان روند حاکم بر جداول سیمپلکس می‌باشد با این تفاوت که از ذخیره اطلاعات اضافی پرهیز می‌گردد.

فصل ششم، حمل و نقل. در این فصل به معرفی مسائل حمل‌ونقل می‌پردازیم، مسائلی که در آن‌ها به دنبال آن می‌باشیم که میزان حمل کالا از تعدادی مبدأ به تعدادی مقصد را چنان بیابیم که ضمن برآورده شدن تقاضای مقاصد، هزینه کل حداقل گردد.

فصل هشتم، نقل‌وانتقالات و تخصیص. نحوه جابجایی بهینه کالا در دنیای واقعی که هر نقطه (بندر، شهر، انبار و...) می‌تواند هم واردکننده و هم صادرکننده کالا باشد از موضوعاتی است که در این فصل به آن می‌پردازیم.

نوع دیگری از مسائل برنامه‌ریزی خطی نیز که نوعاً به دنبال اختصاص بهینه تعدادی افراد به تعدادی کار می‌باشد، در ادامه بررسی می‌شود.

تمرینات مروری. در انتها، تعدادی تمرین مروری آورده شده است. دقت کنید که بهینه‌سازی درسی کاربردی است و در این دروس حل مسئله از مهم‌ترین ابزار پیشرفت می‌باشد.

فصل ۱

مدل سازی و برنامه ریزی خطی

اهداف کلی

۱. آشنایی با مفهوم مدل و انواع آن
۲. معرفی مدل ریاضی و مراحل ساخت آن
۳. شناسایی برنامه ریزی خطی و مفاهیم مربوطه
۴. شناخت فرم های برنامه ریزی خطی و تبدیل آن ها به یکدیگر

اهداف رفتاری

- دانشجو بعد از مطالعه این فصل باید بتواند
۱. مدل را تعریف نموده و انواع مدل را بشناسد و موارد استفاده از آن ها را بیان کند.
 ۲. مدل ریاضی و مراحل ساخت آن را بشناسد و برای مسائل کمیت پذیر مدل ریاضی بسازد.
 ۳. مفاهیم برنامه ریزی خطی را بیان کند.
 ۴. فرم های برنامه ریزی خطی را بداند و آن ها را به یکدیگر تبدیل کند.

مقدمه

در تمامی امور تسلط بر تمام جوانب کار امری ناممکن است، بنابراین برای تعیین جواب یک مسئله واقعی، نمایش خاصی از واقعیت را در نظر گرفته و بر روی آن

مطالعه می‌کنیم، که به آن مدل می‌گوییم. اینکه چه جنبه‌ای از مسئله را باید در نظر گرفت بستگی به هدف ما از برخورد با مسئله دارد. از جمله مدل‌های مطرح در مدیریت و صنعت مدل ریاضی است که برای مسائل کمیت‌پذیر به کار می‌رود. در این فصل به معرفی این مدل می‌پردازیم و با مراحل مختلف ساخت آن آشنا خواهیم شد. برنامه‌ریزی خطی یکی از حالات مدل برنامه‌ریزی ریاضی است که به دلیل سادگی و عمومیت از اهمیت خاصی برخوردار است که در ادامه به دنبال شناسایی برنامه‌ریزی خطی هستیم.

۱-۱ مدل‌سازی

مدل‌سازی از ضروریات فعالیت‌های علمی است. منظور از مدل نمایش ساده شده یک واقعیت است بنابراین باید انتظار داشت که مدل، پدیده را به طور کامل بیان نکند. حال سؤال این است که چه دلیلی برای استفاده از مدل وجود دارد؟

دلایل محکمی، چشم‌پوشی از کل واقعیت را توجیه می‌کند،

- انگیزه اقتصادی؛ به منظور صرفه‌جویی در وقت، پول، کالاهای با ارزش و ...

- اجتناب از بروز حوادث و تحریف واقعیات؛ مانند ساخت مدل هواپیما و بررسی تمام جوانب قبل از این که هواپیما به پرواز درآید.

- دست‌کاری مدل و ایجاد تغییرات در آن بسیار ساده‌تر از دست‌کاری سیستم واقعی است.

- بعضی اوقات محیط‌های واقعی پیچیدگی فوق‌العاده دارند و مدل صرفاً نقش تفهیم موضوع را بازی می‌کند، مثل مدل‌هایی که در علوم مختلف از جمله شیمی و فیزیک به کار می‌روند.

سه گام برای حل یک مسئله واقعی باید طی شود،

گام اول. مدل‌سازی که به آن فرموله کردن مسئله نیز می‌گویند.

گام دوم. حل مدل با استفاده از تکنیک‌های موجود.

گام سوم. تحلیل نتایج، که از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است و باید از افراد خبره، با تجربه و آشنا به مسئله واقعی برای تصمیم‌گیری عملی استفاده کرد. در این مرحله است که می‌توان مدیر لایق را از دیگران تشخیص داد.

دقت نمایید که مدل جایگزین مسئله اصلی نبوده و انتخاب درست آن نقش تعیین کننده ای در تصمیم گیری نهایی دارد.

شمای کلی حل مسئله در نمودار زیر آمده است.



شکل ۱-۱

۲-۱ انواع مدل‌سازی

مدل‌سازی با درجات متفاوتی از ساده‌سازی همراه است و بسته به میزان آن انواع مدل تعریف می‌گردد.

۱. مدل شمایی؛ این مدل جایگزین فیزیکی سیستم می‌شود که با کمترین ساده‌سازی همراه است از جمله مدل اتومبیل، هواپیما، پل، ...
 ۲. مدل قیاسی؛ دقیقاً مشابه سیستم اصلی نیست ولی بیان‌کننده واقعیاتی از آن است. مثل نمودارهای سازمانی که نشان‌دهنده ساختار، روابط و مسئولیت‌ها در سازمان است.
 ۳. مدل ریاضی؛ این مدل برای مسائل کمیت‌پذیر مطرح می‌گردد مثل میزان تولید، خرید، فروش، میزان سوددهی و... این مدل از انتزاعی‌ترین مدل‌ها است که برای مسائل با پیچیدگی زیادی به خوبی قابل استفاده است.
- مدل ریاضی خود شامل انواع مختلفی است.

الف) قطعی. که در شرایط اطمینان کامل ساخته می‌شود.

ب) احتمالی. مدلی که برعکس حالت الف در شرایط نامعین و تصادفی ساخته می‌شود.

ج) ترکیبی. مدلی که ترکیبی از حالات قطعی و احتمالی است.

مدل‌های ریاضی از لحاظ نوع روابط حاکم بر مسئله نیز به دو دسته تقسیم

می‌شوند.

الف) مدل خطی. در این مدل، تمام روابط حاکم، خطی است.

ب) مدل غیرخطی. لاقلاً یکی از روابط غیرخطی است.

از جمله مدل‌های خطی، مدل برنامه‌ریزی خطی است که به دلیل کاربردهای زیاد و سادگی کار با آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مدل، منابع محدود برای انجام فعالیت‌های مورد نظر به گونه‌ای تخصیص می‌یابد که هدف خاصی را دنبال می‌کند. در ادامه به تفصیل در مورد برنامه‌ریزی خطی بحث خواهیم کرد.

۱-۱-۳ فرایند عملی ساخت یک مدل برنامه‌ریزی خطی

این فرایند را با بیان مسئله‌ای به صورت شهودی توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. یک شرکت تولیدی در نظر دارد سه محصول را به گونه‌ای تولید کند که ضمن رعایت محدودیت منابع، به حداکثر سود نائل شود. میزان مصرف منابع، شامل نیروی انسانی و مواد اولیه و همچنین سود هر واحد از سه محصول مشخص است کل نیروی انسانی در اختیار ۲۰۰ نفر- ساعت و مواد در دسترس نیز ۱۵۰ کیلوگرم است. مسئله را با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله نمایید.

جدول ۱-۱	میزان مصرف منابع به ازای هر واحد تولید			میزان منابع موجود
	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	
نیروی انسانی (نفر - ساعت/واحد)	۶	۲	۵	۲۰۰ نفر - ساعت
مواد اولیه (کیلوگرم/ واحد)	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی (ریال/واحد)	۴۰	۳۰	۳۰	

حل. فعالیت مطرح شده در این مسئله میزان تولید است که مجهول بوده و باید آن را معین نمود، فرض کنیم.

X_1 ، میزان تولید محصول اول

X_2 ، میزان تولید محصول دوم

X_3 ، میزان تولید محصول سوم

که مدیر تولید باید در مورد مقادیر آن‌ها تصمیم بگیرد.

۵ مدل سازی و برنامه ریزی خطی

مثلاً اگر تصمیم به تولید ۱۰ واحد از محصول اول داشته باشد $x_1 = 10$ خواهد بود. این اولین مرحله فرموله سازی است که در اصطلاح تعیین متغیرهای تصمیم گفته می شود. حال باید بیاییم هدف از تولید چیست؟ در این مثال هدف حداکثرسازی سود است. بنا به آنچه در جدول ۱ آمده است میزان سوددهی هر واحد محصول اول ۴۰ ریال است، بنابراین به ازای تولید x_1 واحد از محصول اول $40x_1$ سود عاید شرکت خواهد شد. این موضوع برای محصولات دوم و سوم نیز صادق است بنابراین سود کلی عبارت است از:

$$40x_1 + 30x_2 + 30x_3$$

که هدف حداکثر کردن آن است.

در اصطلاح به این مرحله تعیین تابع هدف گفته می شود که عبارت است از:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 30x_3$$

اما در این راه محدودیت هایی وجود دارد.

در این جا محدودیت های حاکم بر مسئله نیروی انسانی و مواد اولیه می باشند. میزان نیروی انسانی مورد نیاز برای هر واحد محصول اول ۶، هر واحد محصول دوم ۲ و هر واحد محصول سوم ۵ نفر- ساعت است بنابراین برای تولید x_1 واحد محصول اول، x_2 واحد محصول دوم و x_3 واحد محصول سوم به ترتیب $6x_1$ و $2x_2$ و $5x_3$ نفر- ساعت نیروی انسانی لازم است و در کل $6x_1 + 2x_2 + 5x_3$ ، ولی میزان حداکثر نیروی انسانی ۲۰۰ نفر- ساعت است. پس محدودیت به صورت زیر درمی آید.

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

به طور مشابه محدودیت مواد اولیه به صورت زیر بیان می شود.

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150$$

به محدودیت هایی که در صورت مسئله به طور مستقیم قید شده اند، محدودیت های کارکردی گویند.

اما یک سری محدودیت‌ها در ذات مسئله وجود دارند. برای مثال در مسئله بالا صحبت از تولید است. کارخانه یا محصول j ام ($j=1, 2, 3$) را تولید می‌کند و یا از تولید آن صرف‌نظر خواهد کرد. بنابراین محدودیت‌هایی به‌صورت زیر ظاهر می‌شوند.

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

(مثلاً $x_1=0$ نشان‌دهنده آن است که محصول اول تولید نمی‌گردد و $x_1=4>0$ نشان‌دهنده تولید محصول اول به میزان ۴ واحد است) این محدودیت‌ها را **محدودیت‌های علامت** می‌گوئیم.

به این ترتیب مرحله سوم فرموله کردن که تعیین محدودیت‌ها است به پایان می‌رسد و بیان ریاضی مسئله به‌صورت زیر است.

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 30x_3 \quad \text{تابع هدف}$$

s. t. (subject to)

تحت شرایط

$$\begin{cases} \text{محدودیت‌های کارکردی} & \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150 \end{cases} \\ \text{محدودیت‌های علامت} & \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

دقت نمایید در تمام مسائل فرموله کردن، مثل هر مسئله دیگر در دنیای واقعی، در

ابتدا باید بدانیم،

- چه کاری می‌خواهیم انجام دهیم؟ (تعیین متغیر تصمیم)
- هدف از انجام آن چیست؟ (تابع هدف)
- برای رسیدن به آن چه محدودیت‌هایی وجود دارد؟ (محدودیت‌های کارکردی و علامت)

گام اصلی، تعیین متغیر تصمیم به‌طور صحیح است. بقیه موارد با استفاده از صورت مسئله در پی آن مشخص خواهد شد.

پس فرموله کردن یک مسئله شامل سه مرحله است.

- ۱ - تعیین متغیرهای تصمیم (میزان فعالیتی که باید انجام شود)
- ۲ - تعیین تابع هدف (بیان هدف مسئله در قالب روابط ریاضی)
- ۳ - تعیین محدودیت‌های حاکم بر مسئله که شامل محدودیت‌های کارکردی و علامت می‌باشد.

همان‌طور که خود می‌دانید در دنیای واقعی مسائل بیشماری وجود دارد که می‌توان آن را با مدل ریاضی بیان کرد. در مراجع مختلف ممکن است مدل‌سازی در قالب‌های کلی مانند مدل تولید، مدل حمل و نقل، مدل امتزاج، مدل رژیم غذایی و... دیده شود. بهتر است به جای محدود کردن خود به مدل‌های مشخص، نحوه مدل‌سازی را بیاموزیم تا در برخورد با هر مسئله‌ای بتوانیم از معلومات خود استفاده کنیم. در قسمت تمرین تعدادی مسئله مطرح شده است که خود قسمتی از درس است و با حل هر کدام از آن‌ها در زمینه مدل‌سازی توانایی بیشتری پیدا خواهید کرد.

مثال ۲. یک شرکت تولیدی در نظر دارد دو محصول را به گونه‌ای تولید کند که ضمن رعایت محدودیت منابع، به حداکثر سود نائل شود. اطلاعات تولید در جدول زیر آمده است. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله نمایید.

میزان منابع مورد نیاز برای تولید یک واحد محصول			
میزان منابع	محصول B	محصول A	محصول
منابع			
۱۵۰	۱۵	۱۰	نیروی انسانی
۲۰۰	۲۵	۲۰	ماده اولیه
۱۷۰	۱۸	۱۷	کنترل کیفیت
	۹۰	۸۰	میزان سود هر واحد

گام ۱) تعیین متغیرهای تصمیم.

x_1 : میزان تولید محصول A

x_2 : میزان تولید محصول B

گام (۲) تعیین تابع هدف.

محصول A	سود	محصول B	سود
1	۸۰	1	۹۰
x_1	$۸۰x_1$	x_2	$۹۰x_2$

$$\Rightarrow \text{تابع هدف} : \text{Max } Z = ۸۰x_1 + ۹۰x_2$$

گام (۳) تعیین محدودیت‌های مسئله.

محصول A	نیروی انسانی	محصول B	نیروی انسانی
1	۱۰	1	۱۵
x_1	$۱۰x_1$	x_2	$۱۵x_2$

$$\Rightarrow ۱۰x_1 + ۱۵x_2 \leq ۱۵۰$$

محصول A	ماده اولیه	محصول B	ماده اولیه
1	۲۰	1	۲۵
x_1	$۲۰x_1$	x_2	$۲۵x_2$

$$\Rightarrow ۲۰x_1 + ۲۵x_2 \leq ۲۰۰$$

محصول A	کنترل کیفیت	محصول B	کنترل کیفیت
1	۱۷	1	۱۸
x_1	$۱۷x_1$	x_2	$۱۸x_2$

$$\Rightarrow ۱۷x_1 + ۱۸x_2 \leq ۱۷۰$$

و محدودیت‌های علامت که محدودیت‌های ذاتی مسئله می‌باشند عبارتند از:

$$x_1 \geq ۰$$

$$x_2 \geq ۰$$

به‌طور خلاصه

$$\text{Max } Z = ۸۰x_1 + ۹۰x_2$$

s.t.

۹ مدل‌سازی و برنامه‌ریزی خطی

$$10x_1 + 15x_2 \leq 150$$

$$20x_1 + 25x_2 \leq 200$$

$$17x_1 + 18x_2 \leq 170$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

مثال ۳. یک شرکت حمل و نقل باید کالایی را از چند انبار به تعدادی مشتری طوری با حداقل هزینه انتقال دهد که در حد امکان نیاز مشتریان برآورده شده و انبارها تخلیه گردد. اگر هزینه حمل هر واحد کالا، میزان موجودی انبارها و تقاضای مشتریان به صورت زیر باشد، مسئله را فرموله نمایید.

مشتری انبار	هزینه حمل هر واحد کالا			موجودی انبار
	A	B	C	
۱	۱۰	۵	۱۲	۲۰۰
۲	۴	۹	۱۵	۱۵۰
۳	۱۵	۸	۶	۳۰۰
تقاضای مشتری	۱۰۰	۳۰۰	۲۵۰	

x_{ij} : میزان حمل کالا از انبار i ام به مشتری j ام

هدف. حداقل هزینه حمل و نقل به طوری که ضمن برآورده کردن تقاضای مشتری

انبار، تخلیه گردد.

$$\text{Min } Z = 10x_{1A} + 5x_{1B} + \dots + 6x_{3C}$$

محدودیت‌ها

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 200 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 150 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 300 \end{cases} \quad \text{محدودیت‌های عرضه}$$

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 100 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 300 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 250 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad \text{محدودیت‌های تقاضا}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad j = A, B, C$$

۴-۱ برنامه‌ریزی خطی

همان‌طور که گفته شد برنامه‌ریزی خطی یکی از شاخه‌های ریاضی است که در آن تمام روابط حاکم بر مسئله به صورت خطی بوده و در کل، منابع محدود را، به فعالیت‌های مورد نظر طوری اختصاص می‌دهد که به هدف از پیش تعیین شده‌ای برسد. هدف معمولاً به صورت حداکثر کردن (سود، تولید و ...) و یا حداقل کردن (هزینه، زمان انجام پروژه و ...) است.

برنامه‌ریزی خطی از شرایط زیر پیروی می‌کند.

- تابع هدف می‌تواند به یکی از دو صورت بیشینه‌سازی (Max) یا کمینه‌سازی (Min) باشد.

- علامت هر محدودیت کارکردی به یکی از صور $\geq$ یا $\leq$ یا $=$ (بسته به مورد) باشد.

- علامت هر متغیر به یکی از صور مطرح شده باشد.

✓ نامنفی

✓ نامثبت

✓ منظور از متغیر تصمیم نامقید این است که هر مقدار اعم از منفی، صفر یا مثبت

برای x_j مورد قبول است.

و صورت کلی برنامه‌ریزی خطی به فرم زیر بیان می‌شود.

تابع هدف: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ (یا Min) Max

s. t. (subject to:)

$$\text{محدودیت‌ها} \quad \text{کارکردی} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq = \geq) b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n (\leq = \geq) b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq = \geq) b_m \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, n$ نامقید x_j یا $x_j \leq 0$ یا $x_j \geq 0$: علامت

مفهوم بعضی از نمادها در جدول زیر آمده است.

نماد	مفهوم	مثال
x_j (متغیر تصمیم زام)	سطح فعالیت زام	میزان تولید محصول زام
Z (تابع هدف)	میزان مشارکت کلیه فعالیت‌ها برای رسیدن به هدف	کل سود به‌دست آمده از فروش محصولات
c_j (ضریب x_j در تابع هدف)	سهم مشارکت فعالیت زام در رسیدن به هدف	سود یک واحد محصول زام
b_i (مقدار سمت راست محدودیت i ام)	میزان منبع، ظرفیت یا امکان موجود زام	میزان موجود ماده اولیه
a_{ij} (ضریب فنی)	میزان منبع زام که باید برای هر واحد فعالیت زام استفاده کرد	مقدار ماده اولیه که برای تولید یک واحد از محصول زام لازم است

حال بعضی اصطلاحات برنامه‌ریزی خطی را مرور می‌نمائیم.

جواب. هر مجموعه مقادیر که به متغیرهای تصمیم اختصاص یابد صرف‌نظر از این که در محدودیت‌ها صدق نماید یا نه، یک مجموعه جواب برنامه‌ریزی خطی است.

جواب موجه یا شدنی. جوابی است که در تمام محدودیت‌ها صدق می‌کند.

جواب ناموجه. جوابی است که موجه نباشد به عبارت دیگر جوابی است که در لاقال یک محدودیت صدق نکند.

جواب بهینه. بهترین جواب موجه یعنی جواب موجهی که به ازای آن مطلوب‌ترین مقدار تابع هدف به‌دست آید.

معادله معرف. اگر یک محدودیت را صرف نظر از علامتش به صورت تساوی در نظر بگیریم معادله‌ای به دست می‌آید که با آن معادله معرف محدودیت گفته می‌شود. ناحیه موجه یا شدنی. مجموعه کلیه جواب‌های موجه، ناحیه موجه را ایجاد می‌کند.

نقطه گوشه‌ای. به محل تلاقی لااقل n معادله معرف نقطه گوشه‌ای می‌گویند، که n تعداد متغیرهای تصمیم است.

جواب گوشه‌ای. مقادیر تخصیص داده شده به متغیرهای تصمیم ناشی از نقطه گوشه‌ای است.

نقطه گوشه‌ای تبهگن (تباهیده). نقطه گوشه‌ای که محل تلاقی بیش از n معادله معرف باشد.

دو نقطه گوشه‌ای مجاور. در فضای دوبعدی، دو نقطه گوشه‌ای وقتی مجاور می‌باشند که خط واصل آن دو نقطه بر روی یک معادله معرف قرار گیرد. به عبارت دیگر دارای یک معادله معرف مشترک باشند. در حالت کلی دو نقطه گوشه‌ای مجاور فقط در یکی از معادلات معرف با هم متفاوت بوده و بقیه معادلات معرف آن‌ها باهم یکی می‌باشند.

مجموعه‌های محدب. ترکیب محدب نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقطه‌ای مانند x است که

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad \ni \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

یک زیرمجموعه S از R^n را محدب گوئیم اگر ترکیب محدب هر دو نقطه از آن متعلق به S باشد، یعنی

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow x \in S$$

برای مثال مجموعه دایره کامل، یک مجموعه محدب است ولی محیط آن یک مجموعه محدب نیست.



شکل ۲-۱

به‌طور کلی ثابت می‌شود که ترکیب محدب هر تعداد نقطه در مجموعه محدب داخل آن قرار دارد، یعنی اگر S مجموعه محدب باشد.

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in S \quad X = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow X \in S$$

قضیه ۱. هر نقطه بر پاره‌خط واصل دو نقطه را می‌توان به‌صورت ترکیب محدب آن دو نقطه نوشت و برعکس هر نقطه را که بتوان برحسب ترکیب محدب دو نقطه نوشت روی پاره‌خط واصل آن دو قرار دارد.

قضیه ۲. مجموعه همه جواب‌های قابل قبول مسئله برنامه‌ریزی خطی (ناحیه موجه) یک مجموعه محدب است.

برای درک بهتر مفاهیم گفته شده، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴. مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

• نقاط (۱ و ۲)، (۰ و -۱) و (۰/۵ و ۱) سه جواب مسئله بالا می‌باشند. همان‌طور که مشاهده می‌شود،

– نقطه (۱ و ۲) غیرموجه است چون در محدودیت کارکردی اول صدق نمی‌کند.

– نقطه (۰ و -۱) غیرموجه است چون در محدودیت علامت $x_1 \geq 0$ صدق نمی‌کند.

- نقطه (۰/۵ و ۱) موجه است چون در تمام محدودیت‌ها اعم از کارکردی و علامت صدق می‌کند.

• می‌توان بررسی کرد که نقطه (۰/۵ و ۱/۵) نقطه بهینه است چون علاوه بر صدق در تمام محدودیت‌ها، نسبت به هر جواب موجه دیگر مقدار بیشتری برای Z می‌دهد. (به زودی روش به دست آوردن نقطه بهینه بیان خواهد شد)

• معادله معرف محدودیت کارکردی اول عبارت است از $x_1 + x_2 = 2$

• نقطه (۰ و ۲) یک نقطه گوشه‌ای است. چون محل برخورد دو معادله معرف $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ است.

• نقاط (۰ و ۲) و (۰/۵ و ۱/۵) دو نقطه گوشه‌ای مجاور می‌باشند، نقطه اول محل تلاقی $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ و دومی محل تلاقی معادلات $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ است.

مفروضات برنامه‌ریزی خطی

فرض تناسب. هر فعالیت مستقل از سایر فعالیت‌ها عمل می‌کند. فرض کنید تمام فعالیت‌ها جز فعالیت j ام متوقف شود، بنابراین $Z = c_j x_j$ و میزان مصرف منبع i ام $a_{ij} x_j$ می‌شود. به عبارت دیگر راه‌اندازی عملیات مستلزم هزینه اولیه جداگانه نیست.

فرض جمع‌پذیری. روابط حاکم بر مسئله به صورت جمع جبری متغیرها می‌باشند. کل مصرف هر منبع و مقدار تابع هدف برابر مجموع مقادیری است که به تنهایی توسط هر فعالیت مصرف و حاصل می‌شود به بیان دیگر جمع اثرات برابر اثر مجموع است.

فرض بخش‌پذیری. جواب‌های موجه لزوماً به صورت صحیح نیستند و هر فعالیت به کسر دلخواه قابل تقسیم است.

فرض معین بودن. تمام پارامترها c_j ، a_{ij} ، b_i ، $i = 1, 2, \dots, m$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ مقادیر ثابت و غیراحتمالی می‌باشند.

۵-۱ فرم‌های برنامه‌ریزی خطی و تبدیل آن‌ها به یکدیگر

فرم کلی برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

$$\text{Max or Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq = \geq) b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \text{ یا } x_j \leq 0 \text{ یا } x_j \text{ نامقید } j = 1, 2, \dots, n$$

بعد از مرحله مدل‌سازی (فرموله کردن) نوبت به حل آن می‌رسد. برای سهولت دو فرم اصلی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی را در نظر می‌گیریم.

فرم استاندارد.

$$\text{Max or Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (b_i \geq 0)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

فرم کانونی.

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

اگر $i = 1, 2, \dots, m, b_i \geq 0$ باشد، فرم را کانونی نامنی می‌نامیم.

می‌توان با استفاده از مفاهیم ساده ریاضی فرم‌های مختلف برنامه‌ریزی خطی را به هم تبدیل کرد.