



دانشگاه پیام نور

# پژوهش عملیاتی ۱

(رشته حسابداری)

دکتر عقیله حیدری

## بسم الله الرحمن الرحيم

### پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

**کتاب درسی** ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ و ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

**متن آزمایشگاهی (م)** راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

**کتاب‌های فرادرسی (ف) و کمک درسی (ک)** به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه قرار می‌گیرند.

**مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی**

## فهرست

|    |                                               |
|----|-----------------------------------------------|
| ۱  | پیشگفتار                                      |
| ۵  | فصل ۱: مدل سازی                               |
| ۵  | مقدمه                                         |
| ۵  | اهداف کلی                                     |
| ۵  | اهداف رفتاری                                  |
| ۶  | ۱ - ۱ مدل سازی                                |
| ۷  | ۱ - ۲ انواع مدل سازی                          |
| ۷  | ۱ - ۳ فرایند عملی ساخت یک مدل برنامه ریزی خطی |
| ۱۰ | خلاصه                                         |
| ۱۱ | ۱ - ۴ سؤالات چهارگزینه ای                     |
| ۱۱ | ۱ - ۵ سؤالات تشریحی                           |
| ۱۵ | فصل ۲: برنامه ریزی خطی                        |
| ۱۵ | مقدمه                                         |
| ۱۵ | اهداف کلی                                     |
| ۱۵ | اهداف رفتاری                                  |
| ۱۶ | ۲ - ۱ برنامه ریزی خطی                         |
| ۱۹ | ۲ - ۲ فرمهای برنامه ریزی خطی                  |
| ۲۰ | ۲ - ۳ تبدیل فرمهای برنامه ریزی خطی            |
| ۲۳ | ۲ - ۴ مفروضات برنامه ریزی خطی                 |
| ۲۳ | ۲ - ۵ روش ترسیمی                              |
| ۳۷ | ۲ - ۶ حالات مختلف در برنامه ریزی خطی          |
| ۳۷ | ۲ - ۶ - ۱ جواب بهینه منحصر به فرد             |
| ۳۸ | ۲ - ۶ - ۲ عدم وجود جواب موجه                  |
| ۳۸ | ۲ - ۶ - ۳ جواب بهینه چندگانه                  |

|    |                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------|
| ۳۹ | ۲- ۶- ۴ ناحیه موجه نامحدود                                       |
| ۴۱ | ۲- ۶- ۵ جواب تباهیده (تبهگن)                                     |
| ۴۲ | ۲- ۶- ۶ محدودیت زائد                                             |
| ۴۴ | خلاصه                                                            |
| ۴۴ | ۲- ۷ سؤالات چهارگزینه‌ای                                         |
| ۴۹ | ۲- ۸ سؤالات تشریحی                                               |
| ۵۳ | فصل ۳: روش سیمپلکس                                               |
| ۵۳ | مقدمه                                                            |
| ۵۳ | اهداف کلی                                                        |
| ۵۴ | اهداف رفتاری                                                     |
| ۵۴ | ۳- ۱ روش سیمپلکس                                                 |
| ۵۶ | ۳- ۲ الگوریتم سیمپلکس                                            |
| ۶۲ | ۳- ۳ حل مسائل برنامه‌ریزی خطی غیرکانونی نامنفی                   |
| ۶۳ | ۳- ۳- ۱ حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف از نوع مینیمم‌سازی  |
| ۶۵ | ۳- ۳- ۲ حل مسائل شامل محدودیتهای کارکردی بزرگتر - مساوی یا تساوی |
| ۷۸ | ۳- ۴ تشخیص حالات خاص برنامه‌ریزی خطی با استفاده از جدول سیمپلکس  |
| ۷۸ | ۳- ۴- ۱ جواب بهینه چندگانه                                       |
| ۸۰ | ۳- ۴- ۲ جواب تباهیده (تبهگن)                                     |
| ۸۲ | ۳- ۴- ۳ ناحیه موجه نامحدود                                       |
| ۸۴ | ۳- ۴- ۴ مسئله بدون جواب موجه                                     |
| ۸۶ | خلاصه                                                            |
| ۹۰ | ۳- ۵ سؤالات چهارگزینه‌ای                                         |
| ۹۱ | ۳- ۶ سؤالات تشریحی                                               |
| ۹۵ | فصل ۴: نظریه دوگانگی                                             |
| ۹۵ | مقدمه                                                            |
| ۹۵ | اهداف کلی                                                        |

|     |                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------|
| ۹۶  | اهداف رفتاری                                                      |
| ۹۶  | ۴ - ۱ تفسیر اقتصادی عناصر جدول سیمپلکس مسئله کانونی نامنفی        |
| ۹۷  | ۴ - ۱ - ۱ تفسیر $\bar{c}_j$ (ضریب عنصر $j$ ام در سطر $Z$ )        |
| ۹۸  | ۴ - ۱ - ۲ تفسیر $\bar{b}_i$ (مقدار سمت راست متناظر با سطر $i$ ام) |
| ۹۸  | ۴ - ۱ - ۳ تفسیر ضرایب فنی                                         |
| ۹۹  | ۴ - ۱ - ۴ قیمت سایه                                               |
| ۱۰۰ | ۴ - ۲ مسئله دوگان                                                 |
| ۱۱۲ | ۴ - ۳ روش سیمپلکس دوگان                                           |
| ۱۱۹ | خلاصه                                                             |
| ۱۲۱ | ۴ - ۴ سؤالات چهارگزینه‌ای                                         |
| ۱۲۳ | ۴ - ۵ سؤالات تشریحی                                               |
| ۱۲۷ | آزمون                                                             |
| ۱۲۷ | آزمون چهارگزینه‌ای                                                |
| ۱۴۴ | آزمون تشریحی                                                      |
| ۱۵۹ | پاسخنامه                                                          |
| ۱۵۹ | پاسخنامه فصل اول                                                  |
| ۱۶۳ | پاسخنامه فصل دوم                                                  |
| ۱۷۴ | پاسخنامه فصل سوم                                                  |
| ۱۸۱ | پاسخنامه فصل چهارم                                                |
| ۱۹۱ | پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای                                           |
| ۱۹۲ | پاسخ آزمون تشریحی                                                 |
| ۲۳۵ | پیوست A: رسم خط                                                   |
| ۲۳۹ | پیوست B: دستگاه معادلات خطی                                       |
| ۲۴۷ | منابع                                                             |

## پیشگفتار

پیشرفت و بقای یک سازمان در دنیای کنونی که دنیای رقابتی و پرشتاب می‌باشد، وابستگی زیادی به تصمیم مدیران آن سازمان دارد. بطوریکه اتخاذ تصمیم درست موجب رشد سازمان و تصمیم‌گیری نادرست باعث از دست دادن موقعیت‌های پیشرفت و حتی فنای آن خواهد شد.

ارزش یک مدیر به تصمیماتی است که می‌گیرد. بنابراین دیگر نمی‌توان تنها بر اساس تجربه به این امر مهم پرداخت بلکه بهره‌گیری از اطلاعات و دانش مدیریتی از جمله وظایف خطیر یک مدیر محسوب می‌شود.

پیچیدگی، هزینه‌های بالا و گستردگی فعالیت‌ها، لزوم به کارگیری علم در تصمیم‌گیری‌ها را روشن می‌سازد. تکنیک‌های کمی و ریاضی کاربردی از ابزارهای مناسب و مطمئن برای این منظور می‌باشند.

پژوهش عملیاتی مجموعه‌ای از تکنیک‌های ریاضی و بقیه علوم است که در بهبود تصمیم مؤثر است و از آن در زمینه‌های مختلف از جمله برنامه‌ریزی تولید، تخصیص منابع، تبلیغات، ترافیک و ... استفاده می‌شود.

### سرچشمه پژوهش عملیاتی

منشأ استفاده از پژوهش عملیاتی، عملیات نظامی جنگ جهانی دوم در سال ۱۹۴۱ بود، وقتی دانشمندان انگلیسی توانستند با بهره‌گیری از دانش متخصصان علوم مختلف در استفاده از رادار که تازه اختراع شده بود، در جنگ موفقیت‌های چشمگیری بدست آورند.

با مشاهده نتایج این کار، از علوم مختلف در زمینه‌های دیگر از جمله حمله به زیردریایی‌های آلمانی استفاده شد و با ادامه پیروزی‌هایی که نتیجه تصمیمات علمی بود، گروه‌های علمی دیگری تشکیل شدند. برای مثال، فون نیومن و همکارانش در

زمینه نظریه بازی‌ها و جرج دانتزیک در زمینه ارائه روش کارا و موفق سیمپلکس مشغول به کار شدند.

بعد از جنگ نیز این نوع تصمیم‌گیری در زمینه‌های دیگر از جمله مسائل بازرگانی توسعه یافت. دو عامل در پیشرفت علم پژوهش عملیاتی نقش عمده داشتند: اول پیشرفت‌های چشمگیری بود که در همان اوایل در زمینه توسعه فنون مربوطه صورت گرفت از جمله این که در سال ۱۹۴۷ دانتزیک روش حل مسائل برنامه‌ریزی خطی را گسترش داد.

دوم اختراع کامپیوتر با سرعت بالا که می‌توانست عملیات تکراری و طولانی روش‌های محاسباتی مختلف را در زمان اندک انجام دهد.

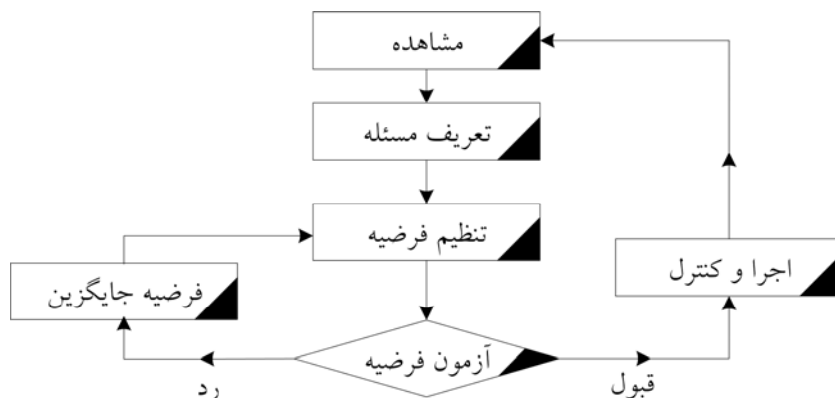
در ادامه این پیشرفت‌ها، انجمن‌های علمی و حرفه‌ای زیادی تشکیل شدند از جمله انجمن علمی پژوهش عملیاتی انگلیس (۱۹۵۵) و انجمن پژوهش عملیاتی آمریکا (۱۹۵۲) و ... که افراد زیادی از علاقمندان و محققان در زمینه پژوهش عملیاتی را گرد هم آورد.

در دهه‌های ۷۰ و ۸۰، پژوهش عملیاتی و سیستم‌های اطلاعاتی مدیریت با یکدیگر تلفیق شدند و سیستم‌های پشتیبانی از تصمیم را به وجود آوردند.

به طور خلاصه پژوهش عملیاتی را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از مدل‌ها و تکنیک‌های کمی در نظر گرفت که با استفاده از روش‌های علمی، مدیران را در تصمیم‌گیری هدایت و راهنمایی می‌کند.

## ویژگی‌های عمده پژوهش عملیاتی

۱. برخورد علمی و آگاهانه با مسئله
۲. به کارگیری روش‌های علمی که می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه کرد:
۳. استفاده از متخصصین علوم مختلف: در دنیای کنونی به دلیل گستردگی علوم، تسلط بر تمام علوم توسط یک فرد امکان‌پذیر نیست و باید دامنه وسیعی از مهارت‌ها برای حل یک مسئله به کار گرفته شود.
۴. استفاده از مدل: هر مدیر در برخورد با مسئله بنا به نیاز و زمینه علاقه خود برداشتی خاص از واقعیت خواهد داشت. استفاده از مدل به دلایل زیادی مقرون به صرفه است، از جمله هزینه‌های بالا، پیچیدگی مسائل، ارائه راهکار با استفاده از موضوعات مسئله، ...



برای ساخت یک مدل و به کارگیری آن سه مرحله وجود دارد:

الف) اعمال قبل از مدل‌سازی: شامل شناخت نیاز و فرمول‌سازی به شکل روشن و قابل حل با استفاده از امکانات موجود می‌باشد.

ب) اعمال ضمن مدل‌سازی: شامل ساخت مدل، حل مدل و تحلیل حساسیت است.

ج) اعمال بعد از مدل‌سازی: شامل تفسیر نتایج و تصمیم‌گیری در تغییر مدل یا اجرا و کنترل آن می‌باشد.

## چشم انداز مطالب

**فصل اول، مدل‌سازی:** این فصل به بررسی موضوعات مربوط به مدل‌سازی می‌پردازد. تعریف مدل، شناخت انواع مختلف مدل، معرفی مدل ریاضی به عنوان مدلی کارا در برخورد با مسائل پیش روی مدیران و آشنایی با مراحل ساخت آن و همچنین مدل‌سازی یک مسئله نمونه از مواردی است که مطالعه خواهد شد.

**فصل دوم، برنامه‌ریزی خطی:** به معرفی مدل برنامه‌ریزی خطی اختصاص دارد. برنامه‌ریزی خطی برای تخصیص منابع محدود به فعالیت‌های معین در جهت رسیدن به هدف خاص بکار می‌رود. شناخت فرم‌های گوناگون برنامه‌ریزی خطی، بیان روشی ساده برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوبعدی به نام روش ترسیمی و معرفی حالات خاص برنامه‌ریزی خطی از موضوعاتی است که در این فصل به آن می‌پردازیم.

**فصل سوم، روش سیمپلکس:** به معرفی روشی کارا و مؤثر به نام روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌پردازد که از ابزار مورد استفاده در پژوهش عملیاتی



می‌باشد و از مهمترین عوامل در پیشرفت این علم است. در ادامه نحوه تشخیص موارد خاص برنامه‌ریزی خطی با استفاده از جدول سیمپلکس ارائه می‌شود.

**فصل چهارم، نظریه دوگانگی:** به تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس می‌پردازد که در تحلیل نهایی نتایج توسط مدیران کمک زیادی می‌کند.

هر مسئله برنامه‌ریزی خطی با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دیگر که به آن مسئله ثانویه (دوگان) گفته می‌شود ارتباط دارد به طوری که با استفاده از جواب هر کدام می‌توانیم جواب مسئله دیگر را پیدا کنیم. ما به چگونگی پیدایش مسئله دوگان خواهیم پرداخت و در ادامه روشی کارا برای مسائلی که در ابتدا شرط بهینگی را دارا می‌باشند ولی جواب قابل قبولی ندارند، ارائه می‌دهیم که به آن روش سیمپلکس دوگان می‌گویند.

**تمرینات دوره‌ای:** و بالاخره در انتها حدود ۱۰۰ سؤال نمونه ارائه و حل شده است.

# فصل ۱

## مدل سازی

### مقدمه

برای تعیین جواب یک مسئله واقعی، تسلط بر تمام جوانب کار امری ناممکن است، بنابراین نمایش خاصی از واقعیت را در نظر گرفته و بر روی آن مطالعه می‌کنیم، که به آن مدل می‌گوییم. اینکه چه جنبه‌ای از مسئله را باید در نظر گرفت بستگی به هدف ما از برخورد با مسئله دارد. مدل‌های مختلفی برای یک موضوع وجود دارد. شناخت مدل و حل آن بسیار مهم است. از جمله مدل‌های مطرح در مدیریت و صنعت مدل ریاضی است که برای مسائل کمیت‌پذیر بکار می‌رود. در این فصل به معرفی این مدل می‌پردازیم و با مراحل مختلف ساخت آن آشنا خواهیم شد.

### اهداف کلی

- ۱ - آشنایی با مفهوم مدل
- ۲ - آشنایی با انواع مدل
- ۳ - معرفی مدل ریاضی و مراحل ساخت آن
- ۴ - ارائه نمونه‌ای از مسائل کاربردی و مدل‌سازی آن

### اهداف رفتاری

- دانشجو بعد از مطالعه این فصل باید بتواند:
- ۱ - مدل را تعریف نموده و دلایل استفاده از آن را بیان کند.
  - ۲ - مراحل حل یک مسئله را بداند.
  - ۳ - انواع مدل را بشناسد و موارد استفاده از آنها را بیان کند.
  - ۴ - مدل ریاضی و مراحل آن را بشناسد و برای مسائل کمیت‌پذیر مدل ریاضی بسازد.

## ۱ - ۱ مدل سازی

مدل سازی از ضروریات فعالیت های علمی می باشد. منظور از مدل نمایش ساده شده یک واقعیت است بنابراین باید انتظار داشت که مدل، پدیده را به طور کامل بیان نکند. حال سؤال این است که چه دلیلی برای استفاده از مدل وجود دارد؟

دلایل محکمی چشم پوشی از کل واقعیت را توجیه می کند:

- انگیزه اقتصادی: جهت صرفه جویی در وقت، پول، کالاهای با ارزش و ...
- اجتناب از بروز حوادث و تحریف واقعیات: ساخت مدل هواپیما و بررسی تمام جوانب قبل از اینکه هواپیما به پرواز درآید.
- دست کاری مدل و ایجاد تغییرات در آن بسیار ساده تر از دست کاری سیستم واقعی است.

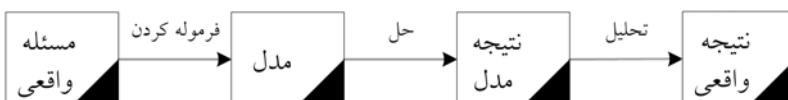
- بعضی اوقات محیط های واقعی پیچیدگی فوق العاده دارند و مدل صرفاً نقش تفهیم موضوع را بازی می کند، مثل مدل هایی که در علوم مختلف از جمله شیمی و فیزیک به کار می روند.

سه گام برای حل یک مسئله واقعی باید طی شود:

- گام اول: مدل سازی و یا اصطلاحاً فرموله کردن می باشد.
- گام دوم: حل مدل با استفاده از تکنیک های موجود.
- گام سوم: تحلیل نتایج، که از اهمیت فوق العاده ای برخوردار است، باید از افراد خبره، با تجربه و آشنا به مسئله واقعی در جهت تصمیم گیری عملی استفاده کرد. در این مرحله است که می توان مدیر لایق را از دیگران تشخیص داد.

دقت نمایید که مدل جایگزین مسئله اصلی نبوده و انتخاب درست آن نقش تعیین کننده ای در تصمیم گیری نهایی دارد.

شمای کلی حل مسئله در نمودار زیر آمده است:



## ۱ - ۲ انواع مدل سازی

مدل سازی با درجات متفاوتی از ساده سازی همراه می باشد و بسته به میزان آن انواع مدل تعریف می گردد.

۱ - مدل شمایی: این مدل جایگزین فیزیکی سیستم می شود که با کمترین ساده سازی همراه است از جمله مدل اتومبیل، هواپیما، پل ...

۲ - مدل قیاسی: دقیقاً مشابه سیستم اصلی نیست ولی بیان کننده واقعیاتی از آن می باشد مثل نمودارهای سازمانی که نشاندهنده ساختار، روابط و مسئولیت ها در سازمان است.

۳ - مدل ریاضی: این مدل برای مسائل کمیت پذیر مطرح می گردد، مثل میزان تولید، خرید، فروش، میزان سوددهی و ...

این مدل از انتزاعی ترین مدل ها می باشد و برای مسائلی که پیچیدگی زیادی داشته باشند به خوبی قابل استفاده است.

مدل ریاضی خود شامل انواع مختلفی می باشد:

الف - قطعی: که در شرایط اطمینان کامل ساخته می شود.

ب - احتمالی: مدلی که برعکس حالت قبل در شرایط نامعین و تصادفی ساخته می شود.

ج - ترکیبی: مدلی که ترکیبی از حالات قطعی و احتمالی می باشد.

مدل های ریاضی از لحاظ نوع روابط حاکم بر مسئله نیز به دو دسته تقسیم می شوند:

الف - مدل خطی: در این مدل، تمام روابط حاکم، خطی است.

ب - مدل غیرخطی: لاقلاً یکی از روابط غیرخطی می باشد.

از جمله مدل های خطی، مدل برنامه ریزی خطی می باشد که به دلیل کاربردهای زیاد و سادگی کار با آن از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در این مدل، منابع محدود برای انجام فعالیت های مورد نظر به گونه ای تخصیص می یابد که هدف خاصی را دنبال می کند. در فصل بعدی به تفصیل در مورد برنامه ریزی خطی بحث خواهیم کرد.

## ۱ - ۳ فرایند عملی ساخت یک مدل برنامه ریزی خطی

این فرایند را با بیان مسئله ای به صورت شهودی توضیح می دهیم:

مثال ۱. یک شرکت تولیدی در نظر دارد سه محصول را به گونه ای تولید کند که ضمن رعایت محدودیت منابع، به حداکثر سود نائل شود. میزان مصرف منابع، شامل نیروی

انسانی و مواد اولیه و همچنین سود هر واحد از سه محصول مشخص است. کل نیروی انسانی در اختیار ۲۰۰ نفر - ساعت و مواد در دسترس نیز ۱۵۰ کیلوگرم می‌باشد. مسئله را با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله نمائید:

| میزان منابع موجود         | میزان مصرف منابع به ازای هر واحد تولید |         |         |
|---------------------------|----------------------------------------|---------|---------|
|                           | محصول ۱                                | محصول ۲ | محصول ۳ |
| ۲۰۰ نفر - ساعت            | ۶                                      | ۲       | ۵       |
| ۱۵۰ کیلوگرم               | ۴                                      | ۵       | ۳       |
| میزان سوددهی (ریال/ واحد) | ۴۰                                     | ۳۰      | ۳۰      |

حل. فعالیت مطرح شده در این مسئله میزان تولید است که مجهول بوده و باید آن را معین نمود. فرض کنیم:

$X_1$ : میزان تولید محصول اول

$X_2$ : میزان تولید محصول دوم

$X_3$ : میزان تولید محصول سوم

که مدیر تولید باید در مورد مقادیر آنها تصمیم بگیرد.

مثلاً اگر تصمیم به تولید ۱۰ واحد از محصول اول داشته باشد  $X_1 = 10$  خواهد بود. این اولین مرحله فرموله‌سازی است که اصطلاحاً تعیین متغیرهای تصمیم گفته می‌شود. حال باید ب هدف از تولید چیست؟ در این مثال هدف حداکثرسازی سود می‌باشد. بنابه آنچه در جدول آمده است میزان سوددهی هر واحد محصول اول ۴۰ ریال می‌باشد، بنابراین به ازای تولید  $X_1$  واحد از محصول اول  $40 \times X_1$  سود عاید شرکت خواهد شد. این موضوع برای محصولات دوم و سوم نیز صادق است بنابراین سود کلی عبارت است از:

$$40 \cdot X_1 + 30 \cdot X_2 + 30 \cdot X_3$$

که هدف حداکثر کردن آن است.

اصطلاحاً به این مرحله تعیین تابع هدف گفته می‌شود که عبارت است از:

$$\text{Max } Z = 40 \cdot X_1 + 30 \cdot X_2 + 30 \cdot X_3$$

اما در این راه محدودیت‌هایی وجود دارد.

در این جا محدودیت‌های حاکم بر مسئله نیروی انسانی و مواد اولیه می‌باشد. میزان مورد نیاز نیروی انسانی برای هر واحد محصول اول ۶، هر واحد محصول دوم ۲

و هر واحد محصول سوم ۵ نفر-ساعت است بنابراین برای تولید  $x_1$  واحد محصول اول،  $x_2$  واحد محصول دوم و  $x_3$  واحد محصول سوم به ترتیب  $6x_1$  و  $2x_2$  و  $5x_3$  نفر-ساعت نیروی انسانی لازم است و در کل  $6x_1 + 2x_2 + 5x_3$  نفر-ساعت نیروی انسانی نیاز داریم. میزان حداکثر نیروی انسانی ۲۰۰ نفر - ساعت است، پس محدودیت به صورت زیر درمی آید:

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

مشابهاً محدودیت مواد اولیه به صورت زیر بیان می شود:

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150$$

به این محدودیت ها که در صورت مسئله مستقیماً قید شده اند اصطلاحاً محدودیت های کارکردی گویند.

اما یک سری محدودیت ها در ذات مسئله وجود دارند. برای مثال در مسئله بالا صحبت از تولید است کارخانه یا محصول  $j$  ام ( $j=1,2,3$ ) را تولید می کند و یا از تولید آن صرف نظر خواهد کرد. بنابراین محدودیت هایی به صورت زیر ظاهر می شوند:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

(مثلاً  $x_1 = 0$  نشان دهنده آن است که محصول اول تولید نمی گردد و  $x_1 = 4 > 0$  نشان دهنده تولید محصول اول به میزان ۴ واحد است) این محدودیت ها را اصطلاحاً محدودیت های علامت می گوئیم. به این ترتیب مرحله سوم فرموله کردن که تعیین محدودیت ها می باشد به پایان می رسد و بیان ریاضی مسئله به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 40x_1 + 30x_2 + 30x_3 && \text{تابع هدف} \\ \text{s.t.} &&& \text{(تحت شرایط)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150 \end{cases} \quad \text{محدودیت های کارکردی}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{محدودیت های علامت}$$

دقت نمایید در تمام مسائل فرموله کردن، مثل هر مسئله دیگر در دنیای واقعی، در ابتدا باید بدانیم:

- چه کاری می‌خواهیم انجام دهیم؟ (تعیین متغیرهای تصمیم)
- هدف از انجام آن چیست؟ (تابع هدف)
- برای رسیدن به آن چه محدودیت‌هایی وجود دارد؟ (محدودیت‌های کارکردی و علامت)

نکته اصلی همان تعیین متغیر تصمیم به طور صحیح می‌باشد، بقیه با استفاده از صورت مسئله در پی آن مشخص خواهد شد.  
پس فرموله کردن یک مسئله شامل سه مرحله می‌باشد:

- ۱ - تعیین متغیرهای تصمیم (میزان فعالیتی که باید انجام شود)
- ۲ - تعیین تابع هدف (بیان هدف مسئله در قالب روابط ریاضی)
- ۳ - تعیین محدودیت‌های حاکم بر مسئله که شامل محدودیت‌های کارکردی و علامت می‌باشد.

همانطور که خود می‌دانید در دنیای واقعی مسائل بیشماری وجود دارد که می‌توان آن را با مدل ریاضی بیان کرد. در مراجع مختلف ممکن است مدل‌سازی در قالب‌های کلی مانند مدل تولید، مدل حمل و نقل، مدل امتزاج، مدل رژیم غذایی و ... دیده شود. بهتر است به جای محدود کردن خود به مدل‌های مشخص، نحوه مدل‌سازی را بیاموزیم تا در برخورد با هر مسئله‌ای بتوانیم از معلومات خود استفاده کنیم. در قسمت تمرین تعدادی مسئله عنوان شده است که خود قسمتی از درس می‌باشد و با حل هر کدام از آنها توانایی بیشتری در زمینه مدل‌سازی پیدا خواهید کرد.

### خلاصه

- ۱ - احاطه بر تمام جوانب یک مسئله در دنیای واقعی امکان‌پذیر نیست، مدل‌سازی این امکان را برای ما ایجاد می‌کند تا بتوانیم حداقل از بعضی جوانب به بررسی مسئله پردازیم و بسته به نیازمان با مسئله برخورد نمائیم.
- ۲ - مدل ریاضی یکی از مدل‌های کارا در برخورد با مسائلی است که ماهیت کمی دارند.
- ۳ - برای ساخت مدل ریاضی سه گام را طی می‌کنیم:

- تعیین متغیرهای تصمیم
- تعیین تابع هدف
- تعیین محدودیت‌ها

## ۱ - ۴ سؤالات چهارگزینه‌ای

۱ - در صورتی که حداکثر اختلاف تولید دو محصول ۱۵۰ واحد باشد، محدودیت متناظر کدام گزینه زیر است؟

(الف)  $x_1 - x_2 = 150$  (ب)  $x_1 - x_2 \leq 150$

(ج)  $-150 \leq x_1 + x_2 \leq 150$  (د)  $x_2 - 150 \leq x_1 \leq x_2 + 150$

۲ - زمان مورد نیاز برای تولید هر واحد از محصول اول نصف زمان لازم برای محصول دوم و دو برابر محصول سوم می‌باشد. اگر تمام وقت صرف تولید محصول اول شود جمعاً ۴۰۰ واحد از آن تولید می‌گردد. محدودیت میزان تولید عبارت است از:

(الف)  $x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 800$  (ب)  $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$

(ج)  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 800$  (د)  $x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 400$

۳ - ۱۰ نفر باید در چادرهای ۱۰ و ۱۵ نفره اسکان یابند. تعداد کل چادرهایی که این افراد می‌توانند با خود حمل نمایند ۱۲ چادر است. محدودیت‌های مربوطه کدامند؟

(الف)  $x_1 + x_2 \leq 12$  ،  $10x_1 + 15x_2 = 100$

(ب)  $x_1 + x_2 \leq 12$  ،  $10x_1 + 15x_2 \geq 100$

(ج)  $x_1 + x_2 \geq 12$  ،  $15x_1 + 10x_2 \geq 100$

(د)  $x_1 + x_2 \leq 12$  ،  $15x_1 + 10x_2 = 100$

۴ - کدام گزینه به عنوان محدودیتی از یک برنامه‌ریزی خطی می‌تواند مطرح شود؟

(الف)  $x_1 + \frac{x_2}{x_3} \leq 10$  (ب)  $\frac{x_1 + x_2}{3x_3} \leq 10$

(ج)  $x_1 x_3 + x_2 \leq 10$  (د)  $\sqrt{x_1 + x_2} \leq 10$

## ۱ - ۵ سؤالات تشریحی

۱ - یک شرکت تولیدکننده لوازم خانگی سه نوع وسیله آشپزخانه تولید می‌کند. نیروی کار مورد نیاز و هزینه هر واحد تولید آنها طبق جدول زیر داده شده است:

| نوع وسیله | هزینه هر واحد تولید (ریال) | نیروی کار مورد نیاز هر واحد (ساعت) |
|-----------|----------------------------|------------------------------------|
| A         | ۷۰۰                        | ۵                                  |
| B         | ۱۰۰۰                       | ۴                                  |
| C         | ۵۰۰                        | ۶                                  |



کل بودجه کارخانه ۲۰۰۰۰۰ ریال است و کل ساعات کار کارخانه ۶۰۰ ساعت است. تقاضای وسیله آشپزخانه ۲۰ واحد نوع A، ۳۰ واحد نوع B و ۱۵ واحد برای نوع C می باشد. قیمت فروش هر واحد از وسایل آشپزخانه به ترتیب ۲۰۰۰، ۱۵۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ ریال می باشد. مسئله را به گونه ای فرموله کنید که ضمن برآورده ساختن تقاضای هر یک از وسایل آشپزخانه سود کل حاصل از تولید حداکثر شود.

۲ - یک شرکت تولید کننده مصالح ساختمانی اخیراً سفارشی برای الوار در ۳ اندازه مختلف دریافت کرده است.

| تعداد سفارش | اندازه   |
|-------------|----------|
| ۷۰۰         | ۷ (متر)  |
| ۱۲۰۰        | ۹ (متر)  |
| ۳۰۰         | ۱۰ (متر) |

طول الوارهای موجود در شرکت همگی دارای استاندارد ۲۵ متری است. بنابراین شرکت باید الوارهای استاندارد را به اندازه های سفارش شده برش دهد. این شرکت مایل است بداند الوارهای استاندارد را با چه الگویی برش بزند تا تعداد کل تخته های الوار مورد نیاز برای تأمین سفارش حداقل گردد. مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

۳ - یک مؤسسه خدمات پرستاری به منظور ارائه خدمات در هر روز به تعدادی پرستار به صورت زیر نیازمند است:

| شیفت | اوقات روز | حداقل تعداد مورد نیاز |
|------|-----------|-----------------------|
| ۱    | ۲-۶       | ۵                     |
| ۲    | ۶-۱۰      | ۱۰                    |
| ۳    | ۱۰-۱۴     | ۷                     |
| ۴    | ۱۴-۱۸     | ۸                     |
| ۵    | ۱۸-۲۲     | ۱۱                    |
| ۶    | ۲۲-۲      | ۶                     |

هر پرستار ۸ ساعت متوالی در روز کار می کند. هدف تعیین کمترین تعداد پرستار مورد نیاز است که احتیاجات فوق را برآورده نماید. مسئله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

۴ - یک تولیدکننده ماشین لباس شویی در صدد تهیه برنامه زمان بندی تولید خود طی ۵ ماه آینده می باشد. آمار تولید گذشته نشان می دهد که ۲۰۰ دستگاه ماشین لباس شویی

در ماه قبل تولید شده است. همچنین می‌توان در وقت اضافه کاری ۶۰ دستگاه دیگر در ماه تولید کرد. هزینه هر دستگاه ماشین لباسشویی ۳۰۰۰۰۰ تومان در نوبت عادی کار و ۳۵۰۰۰۰ تومان در نوبت اضافه کاری است. تعداد سفارشات طی ۵ ماه آینده به شرح جدول زیر است:

| ماه | تعداد ماشین لباسشویی سفارش داده شده |
|-----|-------------------------------------|
| ۱   | ۱۰۰                                 |
| ۲   | ۲۰۰                                 |
| ۳   | ۴۰۰                                 |
| ۴   | ۳۰۰                                 |
| ۵   | ۳۵۰                                 |

هزینه انبارداری در ماه ۲۰۰۰ تومان به ازای هر دستگاه می‌باشد. موجودی انتهای ماه پنجم باید صفر باشد. مدیر تولید می‌خواهد بداند که در هر ماه چند دستگاه ماشین لباسشویی باید تولید کند که ضمن برآورد کردن سفارشات، کل هزینه‌های تولید و انبارداری حداقل گردد. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید.

۵ - یک شرکت تولید وسایل صوتی - تصویری، چهار نوع تلویزیون A، B، C و D را تولید می‌کند. این شرکت فقط دو کارخانه تولیدی در اختیار دارد. کارخانه اول قادر است روزانه ۲۰ دستگاه از نوع A، ۵۰ دستگاه از نوع B، ۳۰ دستگاه از نوع C و ۴۵ دستگاه از نوع D را تولید نماید. همچنین کارخانه شماره ۲ می‌تواند روزانه ۶۰ دستگاه از نوع A و ۳۵ دستگاه از نوع B، ۲۰ دستگاه از نوع C و ۲۵ دستگاه از نوع D تولید کند. هزینه عملیاتی کارخانه ۱ روزانه ۸۰۰۰۰ تومان و برای کارخانه ۲ روزانه ۱۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد.

اگر این شرکت در هر هفته ۱۸۰ دستگاه از نوع A، ۱۷۰ دستگاه از نوع B و ۱۶۰ دستگاه از نوع C و ۱۲۰ تلویزیون از نوع D سفارش داشته باشد، هر یک از دو کارخانه چند روز در هفته می‌بایست کار کند تا سفارش‌های مورد نظر با حداقل هزینه ساخته شوند؟ مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله را بنویسید.



## فصل ۲

### برنامه‌ریزی خطی

#### مقدمه

برنامه‌ریزی خطی یکی از حالات برنامه‌ریزی ریاضی است که به دلیل سادگی و عمومیت از اهمیت خاصی برخوردار است. در این فصل به دنبال شناسایی برنامه‌ریزی خطی و حل آن می‌باشیم. روش ترسیمی یکی از ساده‌ترین و ملموس‌ترین روش‌های حل برنامه‌ریزی خطی دوبعدی است که در این فصل با آن آشنا خواهیم شد.

#### اهداف کلی

- ۱ - شناسایی برنامه‌ریزی خطی و مفاهیم مربوطه
- ۲ - شناخت فرم‌های برنامه‌ریزی خطی
- ۳ - بیان روش ترسیمی
- ۴ - شناخت حالات مختلفی که در برنامه‌ریزی خطی پیش می‌آید.

#### اهداف رفتاری

- دانشجو در پایان این فصل باید بتواند:
- ۱ - مفاهیم برنامه‌ریزی خطی را بیان کند.
  - ۲ - فرم‌های برنامه‌ریزی خطی را بداند و آنها را به یکدیگر تبدیل کند.
  - ۳ - مسائل دوبعدی را با روش ترسیمی حل نماید.
  - ۴ - حالات برنامه‌ریزی خطی را تشخیص دهد.

## ۲- ۱ برنامه‌ریزی خطی

همانطور که قبلاً گفته شد برنامه‌ریزی خطی یکی از شاخه‌های ریاضی است که در آن تمام روابط حاکم بر مسئله به صورت خطی بوده و در کل، منابع محدود را، به فعالیت‌های مورد نظر طوری اختصاص می‌دهد که به هدف از پیش تعیین شده‌ای برسد. هدف معمولاً به صورت حداکثر کردن (سود، تولید و ...) و یا حداقل کردن (هزینه، زمان انجام پروژه و ...) می‌باشد. صورت کلی برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد.

$$\text{Max ( Min) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s . t . (subject to:)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{کارکردی} \\ \text{محدودیت‌ها} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n (\leq \geq) b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n (\leq \geq) b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n (\leq \geq) b_m \end{array} \right.$$

,  $j = 1, 2, \dots, n$  نامقید  $x_j$  یا  $x_j \leq 0$  یا  $x_j \geq 0$  : علامت

- تابع هدف می‌تواند به یکی از دو صورت بیشینه‌سازی (حداکثر کردن) (Max) یا کمینه‌سازی (حداقل کردن) (Min) باشد.

- علامت هر محدودیت کارکردی به یکی از صور  $\geq$  یا  $\leq$  یا  $=$  (بسته به مورد) باشد.

- علامت هر متغیر به یکی از صور مطرح شده باشد.

منظور از متغیر تصمیم نامقید این است که هر مقدار اعم از منفی، صفر یا مثبت برای  $x_j$  مورد قبول است.

مفهوم بعضی از نمادها در جدول زیر آمده است:

| نماد                                  | مفهوم                                                            | مثال                                                            |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $X_j$ (متغیر تصمیم $j$ ام)            | سطح فعالیت $j$ ام                                                | میزان تولید محصول $j$ ام                                        |
| $Z$ (تابع هدف)                        | میزان مشارکت کلیه فعالیت‌ها برای رسیدن به هدف                    | کل سود بدست آمده از فروش محصولات                                |
| $C_j$ (ضریب $X_j$ در تابع هدف)        | سهم مشارکت فعالیت $j$ ام در رسیدن به هدف                         | سود یک واحد محصول $j$ ام                                        |
| $b_i$ (مقدار سمت راست محدودیت $i$ ام) | میزان منبع، ظرفیت یا امکان موجود $i$ ام                          | میزان موجود ماده اولیه                                          |
| $a_{ij}$ (ضریب فنی)                   | میزان منبع $i$ ام که باید برای هر واحد فعالیت $j$ ام استفاده کرد | مقدار ماده اولیه که برای تولید یک واحد از محصول $j$ ام لازم است |

حال بعضی اصطلاحات برنامه‌ریزی خطی را مرور می‌نمائیم:  
**جواب:** هر مجموعه مقادیر که به متغیرهای تصمیم اختصاص یابد صرف‌نظر از اینکه در محدودیت‌ها صدق نماید یا نه، یک جواب برنامه‌ریزی خطی است.  
**جواب موجه یا شدنی:** جوابی است که در تمام محدودیت‌ها صدق می‌کند.  
**جواب ناموجه:** جوابی است که موجه نباشد به عبارت دیگر جوابی است که لااقل در یک محدودیت صدق نکند.  
**جواب بهینه:** بهترین جواب موجه یعنی جواب موجهی که به ازای آن مطلوبترین مقدار تابع هدف به دست آید.  
**معادله معرف:** اگر یک محدودیت را صرف‌نظر از علامتش به صورت تساوی در نظر بگیریم معادله‌ای به دست می‌آید که معادله معرف آن محدودیت گفته می‌شود.  
**ناحیه موجه یا شدنی:** مجموعه کلیه جواب‌های موجه، ناحیه موجه را ایجاد می‌کند.  
**نقطه گوشه‌ای:** به محل تلاقی حداقل  $n$  معادله معرف نقطه گوشه‌ای می‌گویند، که  $n$  تعداد متغیرهای تصمیم می‌باشد.  
**جواب گوشه‌ای:** مقادیر تخصیص داده شده به متغیرهای تصمیم ناشی از نقطه گوشه‌ای می‌باشد.  
**نقطه گوشه‌ای تبهکن (تباهیده):** نقطه گوشه‌ای که محل تلاقی بیش از  $n$  معادله معرف باشد.

دو نقطه گوشه‌ای مجاور: در فضای  $n$  بعدی، دو نقطه گوشه‌ای وقتی مجاور هستند اگر دارای  $n-1$  معادله معرف مشترک باشند. برای مثال در فضای دوبعدی خط واصل آن دو نقطه بر روی یک معادله معرف قرار گیرد و دارای یک معادله معرف مشترک باشند. مجموعه‌های محدب:

ترکیب محدب نقاط  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نقطه‌ای مانند  $x$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad \exists \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

یک زیر مجموعه محدب  $S$  از  $R^n$  را محدب گوئیم اگر ترکیب محدب هر دو نقطه از آن متعلق به  $S$  باشد یعنی:

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow x \in S$$

برای مثال مثال مجموعه دایره کامل، یک مجموعه محدب است ولی محیط آن یک مجموعه محدب نمی‌باشد.



به طور کلی ثابت می‌شود که ترکیب محدب هر تعداد نقطه در مجموعه محدب داخل آن قرار دارد، یعنی اگر  $S$  مجموعه محدب باشد:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in S \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow x \in S$$

**قضیه ۱:** هر نقطه واقع بر پاره خط واصل دو نقطه را می‌توان به صورت ترکیب محدب آن دو نوشت و برعکس هر نقطه را که بتوان بر حسب ترکیب محدب دو نقطه نوشت روی پاره خط واصل آن دو قرار دارد.

**قضیه ۲:** مجموعه همه جواب‌های قابل قبول مسئله برنامه‌ریزی خطی (ناحیه موجه) یک مجموعه محدب می‌باشد.

برای درک بهتر مفاهیم گفته شده به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

• نقاط (۲ و ۱)، (۰ و -۱) و (۰/۵ و ۱) سه جواب مسئله بالا می‌باشند. همانطور که مشاهده می‌شود:

- نقطه (۲ و ۱) غیرموجه است چون در محدودیت کارکردی اول صدق نمی‌کند.
- نقطه (۰ و -۱) غیرموجه است چون در محدودیت علامت  $x_1 \geq 0$  صدق نمی‌کند.
- نقطه (۰/۵ و ۱) موجه است چون در تمام محدودیت‌ها اعم از کارکردی و علامت صدق می‌کند.

• می‌توان بررسی کرد که نقطه (۰/۵ و ۱/۵) نقطه بهینه می‌باشد چون علاوه بر صدق در تمام محدودیت‌ها، نسبت به هر جواب موجه دیگر مقدار بیشتری برای  $Z$  می‌دهد. (در ادامه فصل روش بدست آوردن نقطه بهینه بیان خواهد شد)

- معادله معرف محدودیت کارکردی اول عبارت است از  $x_1 + x_2 = 2$
- نقطه (۰ و ۲) یک نقطه گوشه‌ای می‌باشد. چون محل برخورد دو معادله معرف  $x_1 + x_2 = 2$  و  $x_2 = 0$  می‌باشد.

- دو نقطه (۰ و ۲) و (۰/۵ و ۱/۵) دو نقطه گوشه‌ای مجاور می‌باشند، نقطه اول محل تلاقی  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$  و دومی محل تلاقی معادلات  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$  می‌باشد.

## ۲-۲ فرم‌های برنامه‌ریزی خطی

فرم کلی برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

$$\text{Max or Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq = \geq) b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{یا} \quad x_j \leq 0 \quad \text{یا} \quad x_j \text{ نامقید} \quad j = 1, 2, \dots, n$$



بعد از مرحله مدل سازی (فرموله کردن) نوبت به حل آن می رسد. برای سهولت دو فرم اصلی برای مسائل برنامه ریزی خطی در نظر می گیریم.

۱ - فرم استاندارد:

$$\begin{aligned} \text{Max or Min } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (b_i \geq 0) \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

۲ - فرم کانونی:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

اگر  $i = 1, 2, \dots, m$ ،  $b_i \geq 0$  باشد، فرم را کانونی نامنی می نامیم.

## ۲ - ۳ تبدیل فرم های برنامه ریزی خطی

می توان با استفاده از مفاهیم ساده ریاضی فرم های مختلف برنامه ریزی خطی را به هم تبدیل کرد.

$$۱) A \geq B \Leftrightarrow -A \leq -B \quad 2x_1 + x_2 \geq 5 \Leftrightarrow -2x_1 - x_2 \leq -5$$

$$۲) A \leq B \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} A + s_1 = B \quad \exists s_1 \geq 0$$

$s_1$ : متغیر نامنی است که به یک نامعاده از نوع کوچکتر- مساوی اضافه می شود و آن را به معادله تبدیل می نماید. به این متغیر، متغیر کمکی کمبود می گویند.

$$۳) A \geq B \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} A - s_2 = B \quad \exists s_2 \geq 0$$