



دانشگاه پیام نور

پژوهش عملیاتی ۲

(رشته حسابداری)

دکتر عقیله حیدری

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتابهای دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف به صورت درسنامه، آزمایشی، قطعی، متون آزمایشگاهی، فرادری، و کمک درسی چاپ می شود. کتاب **درسنامه (د)** نخستین ثمره کوششهای علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصلهای مصوب تهیه می شود و پس از داوری علمی در گروههای آموزشی چاپ می شود. با دریافت بازخوردها و تجدید نظر صاحب اثر و اصلاح کتاب، درسنامه به صورت **آزمایشی (آ)** چاپ می شود. با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدید نظر می کند و کتاب به صورت **قطعی (ق)** چاپ می شود. در صورت ضرورت، در کتابهای چاپ قطعی نیز می تواند تجدیدنظرهای اساسی به عمل آید.

متون آزمایشگاهی (م) متونی است که دانشجویان با استفاده از آن و راهنمایی مربیان کارهای عملی آزمایشگاهی را انجام می دهند. **کتابهای فرادری (ف)** و **کمک درسی (ک)** به منظور غنی تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه می شوند. کتابهای فرادری با تأیید معاونت پژوهشی و کتابهای کمک درسی با تأیید شورای انتشارات تهیه می شوند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

فهرست

پیشگفتار.....	نه
فصل ۰.....	۱
فصل ۱. روابط کلیدی و تحلیل حساسیت.....	۱۱
مقدمه.....	۱۱
اهداف کلی.....	۱۱
اهداف رفتاری.....	۱۲
۱-۱ روابط حاکم بر جداول سیمپلکس.....	۱۲
۲-۱ تحلیل حساسیت.....	۲۷
۱-۲-۱ تحلیل حساسیت ترسیمی.....	۲۷
۲-۲-۱ تحلیل حساسیت تغییرات گسسته با استفاده از جدول نهایی.....	۳۴
۳-۲-۱ تعیین حدود مجاز پارامترها.....	۴۶
۴-۲-۱ تغییر همزمان چند پارامتر.....	۵۱
خلاصه.....	۵۸
۳-۱ سؤالات چهارگزینه‌ای.....	۵۹
۴-۱ سؤالات تشریحی.....	۶۲
فصل ۲. الگوریتم‌های خاص.....	۶۷
مقدمه.....	۶۷
اهداف کلی.....	۶۷
اهداف رفتاری.....	۶۷
۱-۲ برنامه‌ریزی خطی پارامتری.....	۶۸
۲-۲ روش سیمپلکس اصلاح شده.....	۷۹
خلاصه.....	۸۶
۳-۲ سؤالات چهارگزینه‌ای.....	۸۷
۴-۲ سؤالات تشریحی.....	۸۹

فصل ۳. حمل و نقل	۹۱
مقدمه	۹۱
اهداف کلی	۹۱
اهداف رفتاری	۹۲
۱-۳ مدل حمل و نقل	۹۲
۲-۳ الگوریتم حمل و نقل برای مسائل استاندارد	۹۵
۱-۲-۳ روش گوشه شمال غربی	۹۶
۲-۲-۳ روش کمترین هزینه	۹۷
۳-۳ مسائل برنامه ریزی حمل و نقل غیر استاندارد	۱۰۸
۱-۳-۳ مسائل برنامه ریزی حمل و نقل با تابع هدف ماکزیمم سازی	۱۰۸
۲-۳-۳ مسائلی که تعدیل شده نیستند	۱۰۹
۴-۳ نکاتی چند	۱۱۲
خلاصه	۱۱۴
۵-۳ سؤالات چهارگزینه ای	۱۱۵
۶-۳ سؤالات تشریحی	۱۱۶
 فصل ۴. نقل و انتقالات و تخصیص	 ۱۱۹
مقدمه	۱۱۹
اهداف کلی	۱۱۹
اهداف رفتاری	۱۱۹
۱-۴ نقل و انتقالات (حمل و نقل مرکب)	۱۲۰
۱-۱-۴ روش حل مسائل نقل و انتقال	۱۲۱
۲-۱-۴ نقل و انتقالات غیر استاندارد	۱۲۳
۲-۴ مسائل تخصیص	۱۲۶
۱-۲-۴ روش حل مسائل تخصیص	۱۲۷
۲-۲-۴ مسائل تخصیص غیر استاندارد	۱۳۰
خلاصه	۱۳۵
۳-۴ سؤالات چهارگزینه ای	۱۳۵
۴-۴ سؤالات تشریحی	۱۳۷
 فصل ۵. برنامه ریزی عدد صحیح	 ۱۳۹
مقدمه	۱۳۹
اهداف کلی	۱۳۹
اهداف رفتاری	۱۳۹
۱-۵ برنامه ریزی عدد صحیح	۱۴۰
۲-۵ حل مدل های برنامه ریزی عدد صحیح	۱۴۲
۱-۲-۵ روش شاخه و حد	۱۴۳
۲-۲-۵ روش صفحات برشی	۱۵۲
۳-۵ مسائل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط	۱۶۱
خلاصه	۱۶۴
۴-۵ سؤالات چهارگزینه ای	۱۶۴
۵-۵ سؤالات تشریحی	۱۶۶

۱۶۹.....	آزمون.....
۱۶۹.....	آزمون چهارگزینه‌ای.....
۱۷۳.....	آزمون تشریحی.....
۱۷۷.....	منتخب آزمون کارشناسی ارشد.....
۲۶۳.....	پاسخنامه.....
۲۶۳.....	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای ۳-۱.....
۲۶۵.....	پاسخ سؤالات تشریحی ۴-۱.....
۲۷۹.....	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای ۳-۲.....
۲۸۰.....	پاسخ سؤالات تشریحی ۴-۲.....
۲۹۳.....	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای ۵-۳.....
۲۹۴.....	پاسخ سؤالات تشریحی ۶-۳.....
۲۹۷.....	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای ۳-۴.....
۲۹۸.....	پاسخ سؤالات تشریحی ۴-۴.....
۳۰۲.....	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای ۴-۵.....
۳۰۳.....	پاسخ سؤالات تشریحی ۵-۵.....
۳۲۱.....	پاسخ آزمون چهارگزینه‌ای.....
۳۲۱.....	پاسخ آزمون تشریحی.....
۳۴۷.....	پاسخ منتخب آزمون کارشناسی ارشد.....
۳۵۶.....	منابع.....

پیشگفتار

در مباحث پژوهش عملیاتی ۱ به معرفی الگوریتم‌هایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی پرداختیم. در اینجا به دنبال معرفی کاربردهای بیشتری از الگوریتم‌های مزبور می‌باشیم. کاربردهایی که در دنیای واقعی با آنها مواجه می‌شویم.

چشم‌انداز مطالب

فصل ۰: مروری بر پژوهش عملیاتی ۱

فصل ۱: روابط کلیدی و تحلیل حساسیت، بنا به مطالب بیان شده در پژوهش عملیاتی ۱، دیدیم که با استفاده از روش‌های علمی ریاضی (روش حذفی گوس — جردن و...) می‌توان به حل مسائل برنامه‌ریزی خطی پرداخت. حال سؤال این است که اگر بعد از حل مسئله تغییراتی در پارامترهای a_{ij} , b_i , c_j , m , n و $j=1, 2, \dots, n$ رخ دهد، آیا مجبوریم مجدداً به حل مسئله پردازیم یا اینکه با استفاده از جواب بهینه اولیه و صورت مسئله تأثیر این تغییرات را بر جواب کنونی مورد بررسی قرار دهیم. می‌دانیم برای مسائل با ابعاد بالا حل مجدد مسئله با اتلاف وقت و صرف هزینه زیادی همراه است. خوشبختانه با توجه به اینکه روش سیمپلکس یک الگوریتم تکرار شونده می‌باشد، به نظر می‌رسد بتوان روابطی یافت که اطلاعات هر جدول دلخواه را با استفاده از صورت مسئله بدست آورد. در این فصل ما به دنبال شناخت این روابط و به‌کارگیری آنها برای تحلیل تغییرات احتمالی پارامترها و حل انواع خاصی از برنامه‌ریزی خطی می‌باشیم.

این فصل به معرفی روابط کلیدی حاکم بر جداول سیمپلکس می‌پردازد و نحوه استفاده از آنها برای تکمیل جداول ناقص و تحلیل حساسیت مسئله به تغییرات پیوسته یا گسسته پارامترها (a_{ij} , b_i , c_j) بیان می‌گردد.

فصل ۲: الگوریتم‌های کارای سیمپلکس، در این فصل با استفاده از روابط

کلیدی به حل مسائل برنامه‌ریزی پارامتری می‌پردازیم (مسائلی که اثر تغییرات پارامتریک ضرایب مسئله را در یک بازه دلخواه مورد مطالعه قرار می‌دهد). در ادامه روش سیمپلکس اصلاح‌شده معرفی می‌گردد که دقیقاً براساس همان روند حاکم بر جداول سیمپلکس می‌باشد با این تفاوت که از ذخیره اطلاعات اضافی پرهیز می‌گردد.

فصل ۳: حمل و نقل، در این فصل به معرفی مسائل حمل و نقل می‌پردازیم، مسائلی که در آنها به دنبال آن می‌باشیم که میزان حمل کالا از تعدادی مبدأ به تعدادی مقصد را چنان بیابیم که ضمن برآورده شدن تقاضای مقاصد، هزینه کل حداقل گردد. این مسائل حالت خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌باشند. می‌توان با روش سیمپلکس به حل آنها پرداخت ولی با توجه به ساختار منحصربه‌فرد اینگونه مسائل می‌توان روشی ساده‌تر برای حل آنها ارائه نمود.

فصل ۴: نقل و انتقالات و تخصیص، درمسائل حمل و نقل ساده تعداد معینی مبدأ و مقصد داریم که مبدأها صادرکننده کالا و مقصدها واردکننده آنها می‌باشند. در دنیای واقعی هر نقطه (بندر، شهر، انبار و...) می‌تواند هم واردکننده و هم صادرکننده کالا باشد. نقل و انتقالات به نحوه جابجایی کالا در اینگونه مراکز می‌پردازد.

نوع دیگری از مسائل برنامه‌ریزی خطی وجود دارند که نوعاً به دنبال اختصاص بهینه تعدادی افراد به تعدادی کار می‌باشد. اینگونه از مسائل حالت خاصی از مسائل حمل و نقل با عرضه و تقاضای یک می‌باشند که به مسائل تخصیص معروفند. با توجه به ساختار این نوع مسائل روشی ساده‌تر از روش حمل و نقل برای حل آنها ارائه می‌شود.

فصل ۵: برنامه‌ریزی عدد صحیح، همان گونه که در مدل سازی دیدیم، تعدادی از مسائل شامل متغیرهایی هستند که تنها مقادیر صحیح را احراز می‌کنند. برای مثال تعداد هواپیمایی که به یک مسیر اختصاص داده می‌شود. حل اینگونه مسائل با روش‌های برنامه‌ریزی خطی از جمله الگوریتم‌های سیمپلکس امکان‌پذیر نمی‌باشد، زیرا طبق خاصیت بخش‌پذیری جواب مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌تواند اعشاری نیز باشد که این با صحیح بودن متغیرها در تناقض است. به این دلیل روش اختصاصی برنامه‌ریزی عدد صحیح پیشنهاد می‌گردد.

در انتها، تعدادی از تمرینات مروری به‌صورت تستی و تشریحی آورده شده است تا دانشجو بتواند میزان آموخته‌های خود را بسنجد.

فصل ۰

مروری بر پژوهش عملیاتی ۱

پژوهش عملیاتی را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از مدل‌ها و تکنیک‌های کمی در نظر گرفت که با استفاده از روش‌های علمی، مدیران را در تصمیم‌گیری هدایت و راهنمایی می‌کند.

همانطور که می‌دانید برای تعیین جواب یک مسئله واقعی، تسلط بر تمام جوانب آن امری ناممکن است، بنابراین نمایش خاصی از واقعیت را در نظر گرفته و بر روی آن مطالعه می‌کنیم، که به آن مدل می‌گوییم. یکی از مدل‌های کمی، مدل ریاضی می‌باشد. مدل‌سازی ریاضی (فرموله کردن) یک مسئله کمی شامل سه مرحله می‌باشد.

- تعیین متغیرهای تصمیم (میزان فعالیتی که باید انجام شود).
- تعیین تابع هدف (بیان هدف مسئله در قالب روابط ریاضی)
- تعیین محدودیت‌های حاکم بر مسئله که شامل محدودیت‌های کارکردی و علامت می‌باشد.

مثال ۱. یک شرکت تولیدکننده لوازم خانگی سه نوع وسیله آشپزخانه تولید می‌کند. نیروی کار موردنیاز و هزینه تولید هر واحد از آنها در جدول زیر آمده است.

نوع وسیله	هزینه تولید هر واحد (ریال)	نیروی کار مورد نیاز برای تولید هر واحد (ساعت)
A	۷۰۰۰	۵
B	۱۰۰۰۰	۴
C	۵۰۰۰	۶

کل بودجه کارخانه ۲۰۰۰۰۰ ریال است و کل ساعات کار کارخانه ۶۰۰ ساعت است. تقاضای وسیله آشپزخانه نوع A ۲۰ واحد، نوع B ۳۰ واحد و نوع C ۱۵ واحد می‌باشد. قیمت فروش هر واحد از وسایل آشپزخانه به ترتیب ۲۰۰۰۰، ۱۵۰۰۰۰، ۱۲۰۰۰۰ ریال می‌باشد. مسئله را به گونه‌ای فرموله کنید که ضمن برآورده ساختن تقاضا، سود حاصل از تولید حداکثر شود.

حل. صورت مسئله به‌طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

موجودی منابع	مصرف منابع به ازای تولید هر واحد			
	A	B	C	
۲۰۰۰۰۰ ریال	۷۰۰۰	۱۰۰۰۰	۵۰۰۰	هزینه (ریال/ واحد)
۶۰۰ نفرساعت	۵	۴	۶	نیروی کار(نفرساعت/ واحد)
	۲۰	۳۰	۱۵	کل تقاضا
	۲۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	قیمت فروش (ریال/ واحد)

متغیرهای تصمیم: در این جا میزان تولید هر محصول را مشخص می‌کنیم. بدین منظور متغیرهای تصمیم به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

x_A : میزان تولید محصول A

x_B : میزان تولید محصول B

x_C : میزان تولید محصول C

تابع هدف: در این مسئله حداکثر کردن سود مد نظر است. اما می‌دانیم:

هزینه تولید - قیمت فروش = سود کل

بنابراین تابع هدف به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\text{Max } Z = (20000x_A + 150000x_B + 120000x_C) - (7000x_A + 10000x_B + 5000x_C)$$

محدودیت‌ها: ما با محدودیت بودجه و نیروی کار مواجهیم که با توجه به جدول بالا به‌صورت زیر قابل بیان هستند.

$$7000 x_A + 10000 x_B + 5000 x_C \leq 200000$$

$$5 x_A + 4 x_B + 6 x_C \leq 600$$

همچنین باید سفارشات برآورده شود. یعنی

$$x_C \geq 15$$

$$x_B \geq 30$$

$$x_A \geq 20$$

و بالاخره محدودیت‌های علامت عبارتند از:

$$x_j \geq 0, j = A, B, C$$

۱-۰ برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی یکی از شاخه‌های ریاضی است که در آن تمام روابط حاکم بر مسئله به صورت خطی بوده و در کل، منابع محدود را، به فعالیت‌های مورد نظر طوری اختصاص می‌دهد که به هدف از پیش تعیین‌شده‌ای برسد. هدف معمولاً به صورت حداکثر کردن (سود، تولید و...) و یا حداقل کردن (هزینه، زمان انجام پروژه و...) می‌باشد. فرمهای برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است.

۲-۰ فرمهای برنامه‌ریزی خطی

فرم کلی برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\text{Max or Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq \text{ or } = \text{ or } \geq) b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \text{ or } x_j \leq 0 \text{ or } x_j \text{ نامقید } j = 1, 2, \dots, n$$

بعد از مرحله مدل‌سازی (فرموله کردن) نوبت به حل آن می‌رسد. برای راحتی

کار دو فرم اصلی را در نظر می‌گیریم.

۱. فرم استاندارد

$$\text{Max or Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m, b_i \geq 0$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

۲. فرم کانونی

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

اگر $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ باشد، فرم را کانونی نامنفی می‌نامیم.

۳-۰ روش ترسیمی

روش ترسیمی یکی از روش‌های شماتیک و ساده برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دو بُعدی می‌باشد. این روش به‌طور خلاصه شامل مراحل زیر است.

- ✚ تعیین معادلات معرف و رسم آنها
- ✚ تعیین ناحیه موجه متناظر با هر محدودیت
- ✚ تعیین ناحیه موجه
- ✚ پیدا کردن جواب بهینه

مثال ۲. مسئله زیر را با روش ترسیمی حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$x_1 \leq 6$$

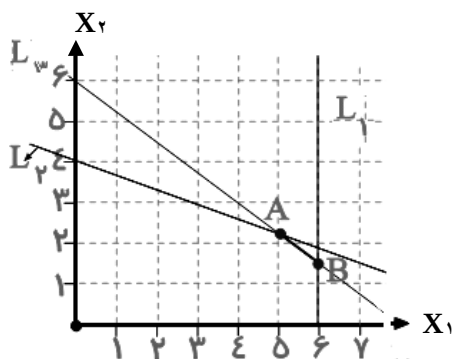
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 4x_2 = 24$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

حل.

ناحیه موجه متناظر	تعیین وضعیت نقطه خارج خط نسبت به آن	نقاط روی خط معرف		معادله معرف	محدودیت
نقاط یک طرف معادله معرف شامل مبدأ	$0 \leq 6$			$L_1: x_1 = 6$	$x_1 \leq 6$
نقاط یک طرف معادله معرف شامل مبدأ	$0 + 0 \leq 12$	x_1	۰ ۱۲	$L_2: x_1 + 3x_2 = 12$	$x_1 + 3x_2 \leq 12$
		x_2	۴ ۰		
نقاط روی خط		x_1	۰ ۸	$L_3: 3x_1 + 4x_2 = 24$	$3x_1 + 4x_2 \leq 24$
		x_2	۶ ۰		



پاره خط AB ناحیه شدنی می باشد.

X_F	Z
$A(\frac{24}{5}, \frac{12}{5})$	$\frac{122}{5}$
$B(6, \frac{3}{2})$	$\frac{63}{2}$

$\longrightarrow Z^* = \frac{63}{2}$

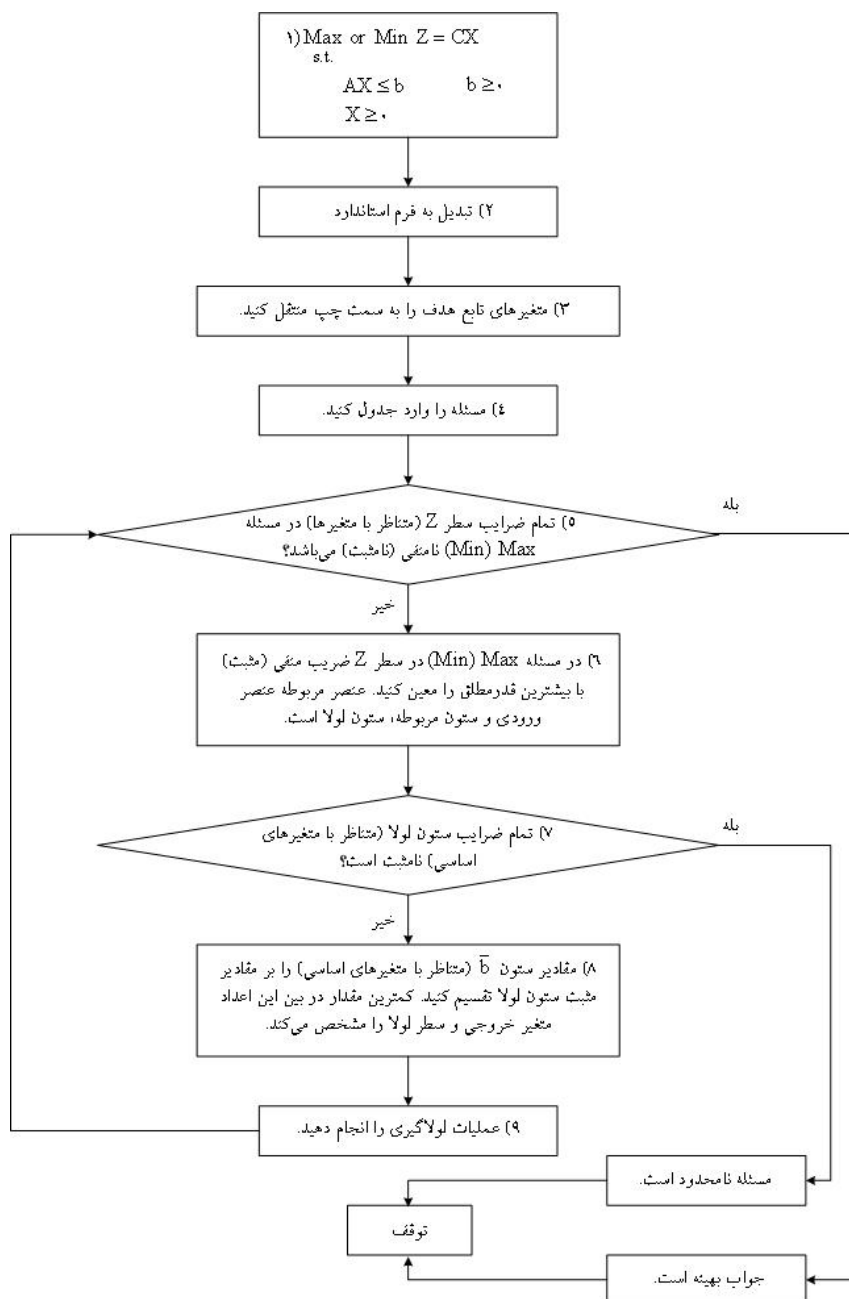
حالات خاص جواب های برنامه ریزی خطی شامل جواب بهینه چندگانه، تبهگن،

نامحدود، و محدودیت زائد است که هر کدام تعبیر خاصی در دنیای واقعی دارد. برای حل مسائل با ابعاد بالاتر روش‌های سیمپلکس پیشنهاد می‌گردد که به‌طور خلاصه نحوه عمل آنها در زیر آمده است.

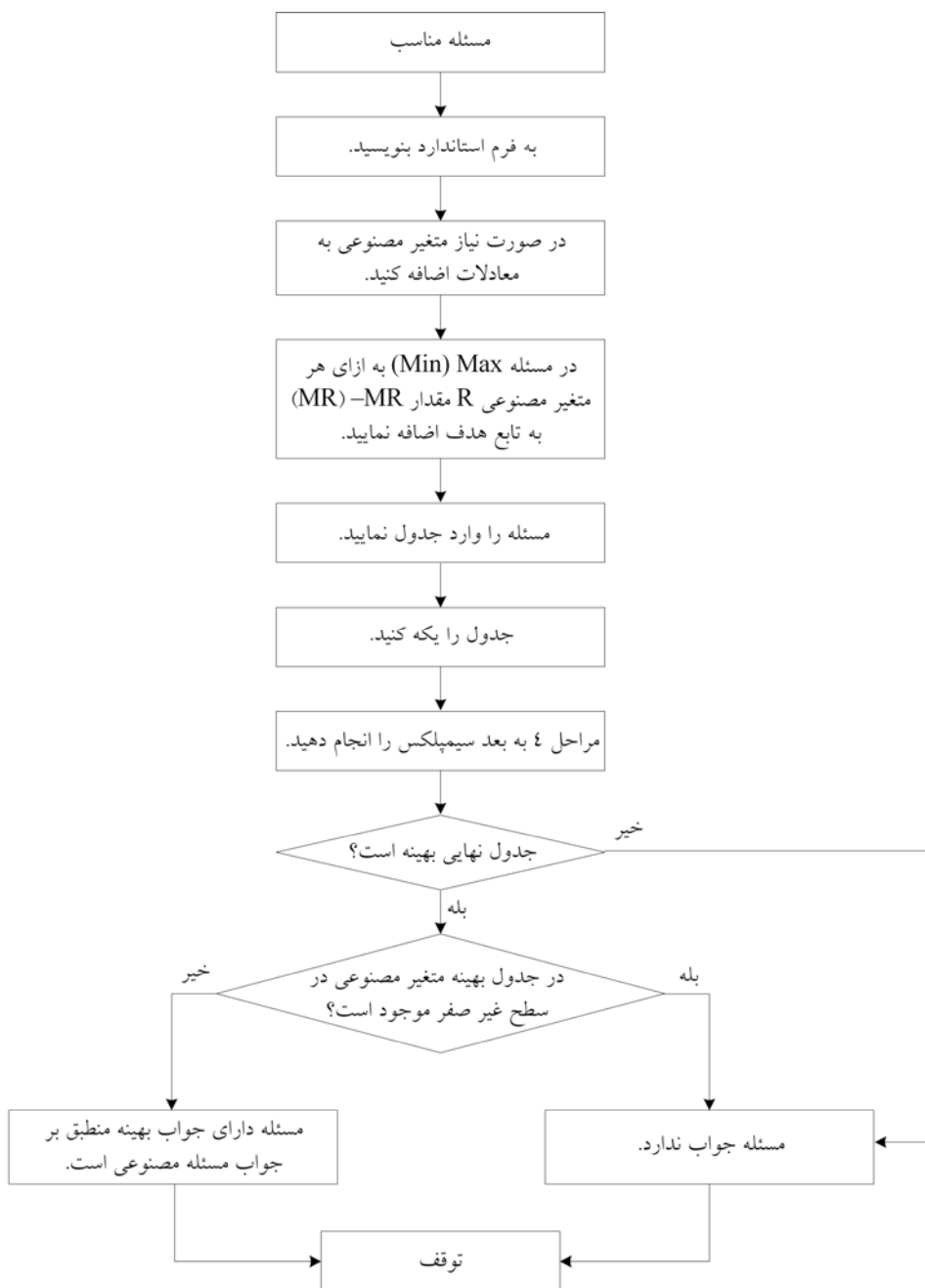
روش	موارد کاربرد
سیمپلکس	حل مسائل کانونی نامنفی با تابع هدف ماکزیمم یا مینیمم
M - بزرگ	حل مسائلی که تعدادی یا همه محدودیت‌های آن به صورت $\geq$ یا $=$ است. (متغیرهای اساسی اولیه در فرم استاندارد آنها مشاهده نمی‌شود).
دومرحله‌ای	حل مسائلی که تعدادی یا همه محدودیت‌های آن به صورت $\geq$ یا $=$ است. (متغیرهای اساسی اولیه در فرم استاندارد آنها مشاهده نمی‌شود).
سیمپلکس دوگان	حل مسائلی که شرط بهینگی را داشته و شرط شدنی بودن را ندارند.

شمای عملیاتی این روش‌ها در زیر آمده است. برای مطالعه بیشتر، خواننده می‌تواند به کتاب پژوهش عملیاتی ۱ مراجعه نماید.

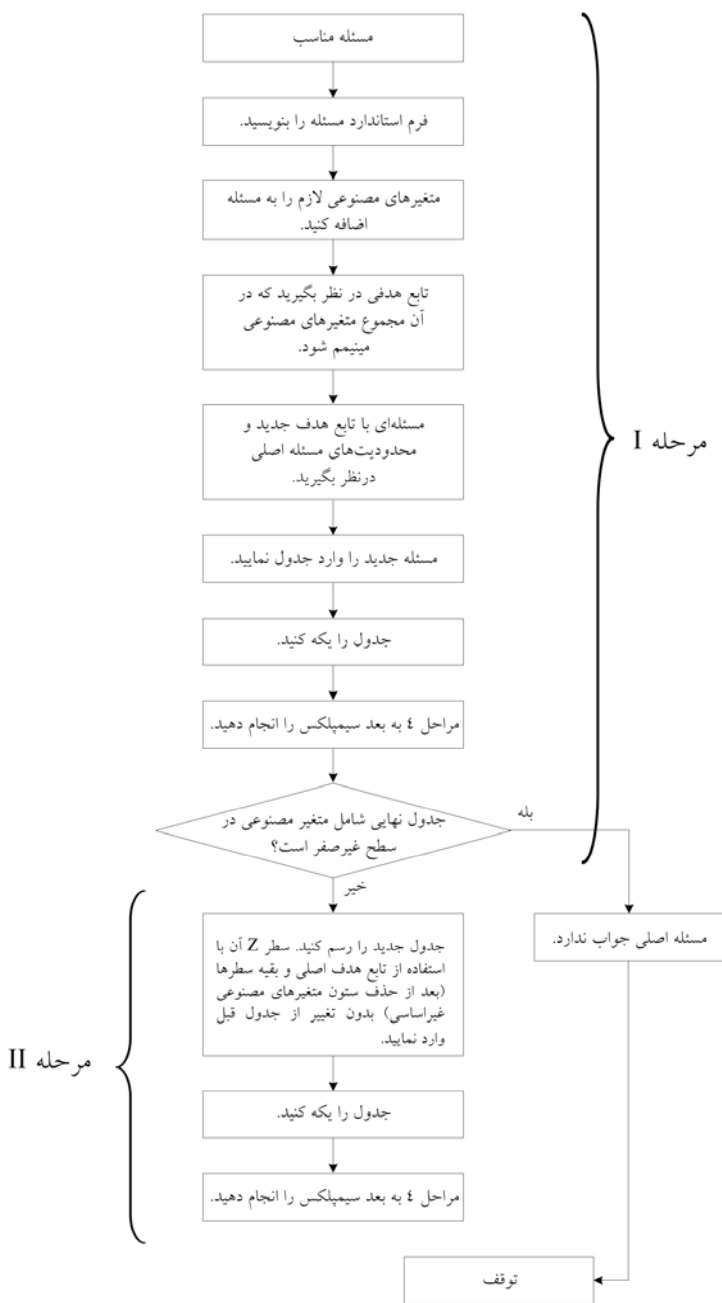
شمای عملیاتی روش سیمپلکس



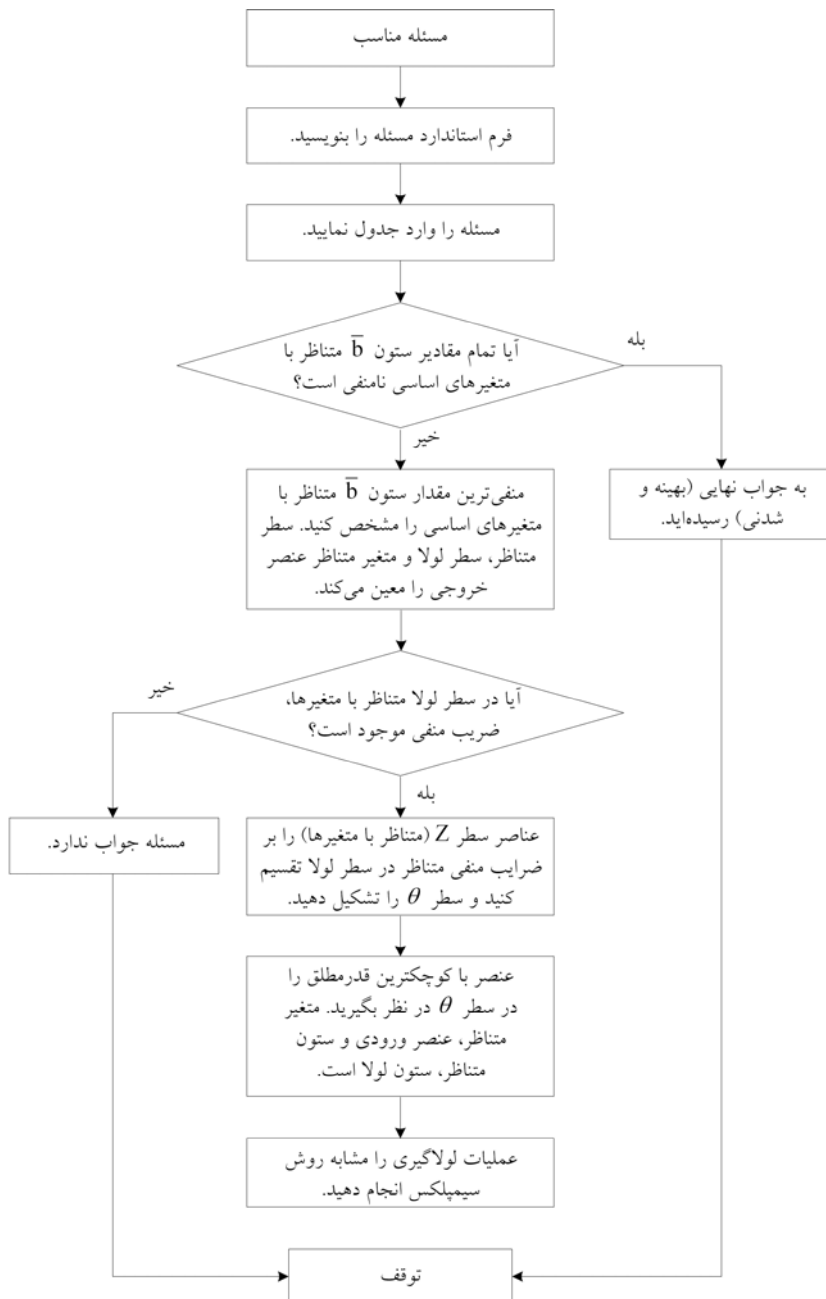
شمای عملیاتی روش M - بزرگ



شمای عملیاتی روش دومرحله‌ای



شمای عملیاتی روش سیمپلکس دوگان



فصل ۱

روابط کلیدی و تحلیل حساسیت

مقدمه

روش سیمپلکس یک روش الگوریتمیک است که بر پایه روش حذفی گوس - جردن عمل می‌کند. هر جدول آن با استفاده از اعمال ریاضی مجاز بر روی جداول قبلی بدست می‌آید. در این فصل خواهیم دید که می‌توان اطلاعات هر جدول را با استفاده از صورت مسئله و یک سری روابط ریاضی مبتنی بر روش سیمپلکس به دست آورد که به آنها روابط کلیدی می‌گوییم. در ادامه به تحلیل حساسیت مسائل می‌پردازیم که منظور از آن بررسی اثر تغییرات احتمالی در پارامترها (داده‌های مسئله) و یا بررسی شرایط جدید می‌باشد.

اگر بخواهیم به حل مسئله جدید بپردازیم نیاز به صرف هزینه و وقت زیادی است. در اینجا به دنبال راه‌حلی هستیم که بتوانیم با آخرین اطلاعات موجود در جدول بهینه به تحلیل (بررسی) تغییرات بپردازیم. برای این منظور از روابط کلیدی استفاده می‌کنیم.

اهداف کلی

- ۱ - شناخت روابط کلیدی حاکم بر جداول سیمپلکس
- ۲ - تحلیل تغییرات مختلف در پارامترها شامل بررسی اثر
 - تغییر در ضرایب تابع هدف
 - تغییر در ضرایب فنی

- تغییر در مقادیر سمت راست
- اضافه شدن محدودیت جدید
- اضافه شدن متغیر جدید
- ۳ - تعیین حدود تغییرات مجاز پارامترها

اهداف رفتاری

- دانشجو بعد از مطالعه این فصل باید بتواند
- ۱ - روابط کلیدی را در تکمیل جداول سیمپلکس به کار ببرد.
 - ۲ - تحلیل حساسیت ترسیمی را برای بررسی تغییرات در پارامترها انجام دهد.
 - ۳ - با استفاده از جدول نهایی به تحلیل تغییرات مختلف ایجاد شده در مسئله پردازد.
 - ۴ - حدود مجاز پارامترها را مشخص نماید.

۱-۱ روابط حاکم بر جداول سیمپلکس

همانطور که می‌دانید در روش سیمپلکس برای تغییر جدول، از دو عمل استفاده می‌کنیم:

- ضرب یک سطر در عددی غیرصفر
 - جمع یک سطر با مضربی از سطر دیگر
- بنابراین مشاهده می‌شود که تغییر جدول بر اساس فرآیندی نظام‌مند انجام می‌شود. مسئله برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} \text{Max or Min } Z = CX \\ \text{s.t.} \end{array}$$

$$AX = b \quad b \geq 0 \quad (*)$$

$$X \geq 0$$

که در آن تعاریف زیر را داریم:

بردار متغیرهای غیرپایه‌ای: X_N	بردار متغیرهای پایه‌ای: X_B
بردار ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای در تابع هدف: C_N	بردار ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف: C_B
ماتریس پایه‌ای: $B = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_m] \subset A$	ماتریس ضرایب فنی: $A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n]$ $A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$
بردار متغیرها: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$	بردار مقادیر ثابت (سمت راست): $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$
$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$	بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف:

مثال ۱. در مسئله زیر ابتدا فرم استاندارد را بنویسید، سپس بردارهای b, C, X و ماتریس A را مشخص کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{فرم استاندارد} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$$

ماتریس پایه‌ای (اساسی): منظور زیر ماتریسی $m \times m$ از A است. این ماتریس شامل ستون‌هایی از A است که متغیر متناظرشان پایه‌ای می‌باشند. در جدول ابتدایی مثال قبل x_3 و x_4 به ترتیب متغیرهای پایه‌ای می‌باشند، بنابراین ماتریس پایه‌ای متناظر به صورت

$$B = [A_3 \quad A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. لازم به ذکر است که متناظر با هر جدول سیمپلکس یک ماتریس پایه‌ای وجود دارد. متناظر با یک جدول دلخواه سیمپلکس، نمادهای زیر را به کار می‌بریم:

ماتریس پایه‌ای: $B = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_m] \subset A$	ماتریس ضرایب فنی: $\bar{A} = [\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2 \quad \dots \quad \bar{A}_n]$
بردار مقادیر ثابت (سمت راست): $\bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}$	$\bar{A}_j = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1j} \\ \bar{a}_{2j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mj} \end{bmatrix}$
مقدار تابع هدف: $\bar{Z}$	بردار ضرایب در سطر Z (سطر صفر): $\bar{C} = [\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \dots \quad \bar{c}_n]$

در جدول ابتدایی سیمپلکس مسئله برنامه‌ریزی خطی کانونی نامنفی داریم:

$$\bar{C} = [-c_1 \quad -c_2 \quad \dots \quad -c_n]$$

$$B = I$$

$$\bar{b} = b$$

$$\bar{A}_j = A_j$$

$$\bar{Z} = 0$$

فرم جدولی آن به صورت زیر است.

جدول ابتدایی

X_B	Z	x_1	x_2		x_n	$\bar{b}$
Z	۱	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	۰
متغیرهای پایه‌ای	۰	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
	۰	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	۰	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m

و در مورد مرحله‌ای دلخواه داریم:

$$\text{Max or Min } Z = \bar{C}X + \bar{Z}$$

s.t.

$$\bar{A}X = \bar{b} \quad \bar{b} \geq 0 \quad (**)$$

$$X \geq 0$$

X_B	Z	x_1	x_2		x_n	$\bar{b}$
Z	۱	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$		$\bar{c}_n$	$\bar{Z}$
متغیرهای پایه‌ای	۰	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$		$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
	۰	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$		$\bar{a}_{2n}$	$\bar{b}_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	۰	$\bar{a}_{m1}$	$\bar{a}_{m2}$		$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

مثال ۲. مقادیر بردارهای $\bar{A}_1$ ، $\bar{c}_1$ و ماتریس B را در جدول دوم سیمپلکس مثال ۱

مشخص کنید.

حل.

		۰	۱	۲	۳	۴		
	X_B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	θ
۰	Z	۱	-۱	-۳	۰	۰	۰	—
۱	x_3	۰	۲	۱	۱	۰	۴	۴
۲	x_4	۰	۱	۲	۰	۱	۶	۳
۰	Z	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{3}{2}$	۹	
۱	x_3	۰	$\frac{3}{2}$	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۱	
۲	x_2	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۳	

$$B = [A_3 \ A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{c}_1 = \frac{1}{2} \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

حال به دنبال یافتن ارتباطی بین مقدار پارامترها در جدول ابتدایی و هر جدول دلخواه دیگر می باشیم.

مسئله (*) را در نظر بگیرید، داریم:

$$AX = b$$

که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$$

که در آن N ، زیرماتریسی از A شامل ستونهای مربوط به متغیرهای غیر پایه ای می باشد. در نتیجه

$$BX_B + NX_N = b$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در B^{-1} (معکوس ماتریس B) داریم:

$$B^{-1}BX_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow IX_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \quad (1)$$

اما با توجه به اینکه در روش سیمپلکس متغیرهای غیر پایه‌ای صفر می‌باشند ($X_N = 0$) پس

$$X_B = B^{-1}b$$

از طرفی می‌دانیم که مقادیر متغیرهای پایه‌ای برابر مقادیر سمت راست متناظر است (بردار سمت راست را با $\bar{b}$ نشان می‌دهیم). پس

$$X_B = B^{-1}b = \bar{b} \quad (2)$$

همچنین در مسئله (*) داریم:

$$Z = CX = [C_B \quad C_N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$Z = C_B B^{-1}b + C_N X_N$$

چون $X_N = 0$ ، پس داریم:

$$\bar{Z} = C_B B^{-1}b = C_B \bar{b} \quad (3)$$

با ضرب طرفین رابطه $AX = b$ در B^{-1} داریم:

$$B^{-1}AX = B^{-1}b = \bar{b}$$

اما با توجه به مسئله (**) داریم:

$$\bar{A}X = \bar{b}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$B^{-1}A = \bar{A}$$

همچنین بنابه تعریف A و $\bar{A}$ داریم:

$$B^{-1}A_j = \bar{A}_j \quad (4)$$

و یادآور می‌شویم که:

$$Z = CX = C_B X_B + C_N X_N$$

بنابراین طبق رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$Z = C_B (B^{-1}b - B^{-1}N X_N) + C_N X_N$$

$$Z = (C_N - C_B B^{-1}N) X_N + C_B B^{-1}b$$

$$Z + (C_B B^{-1}N - C_N) X_N = C_B \bar{b}$$