



تحقیق در عملیات (۱)

(رشته ریاضی و آمار)

صابر قاسم پور

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

نه	مقدمه
۱	فصل اول: برنامه‌ریزی خطی و مدل‌سازی
۱	مقدمه
۲	۱-۱. صورت کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی
۳	۲-۱. مدل‌سازی
۲۱	مسائل فصل اول
۲۷	فصل دوم: برنامه‌ریزی خطی و روش سیمپلکس
۲۷	مقدمه
۲۸	۱-۲. ساختار مسئله برنامه‌ریزی خطی
۲۹	۲-۲. فرم استاندارد
۳۰	۳-۲. فرم کانونی
۳۲	۴-۲. حل هندسی مسئله برنامه‌ریزی خطی دو متغیره
۳۵	۵-۲. حالت‌های مختلف مسئله برنامه‌ریزی خطی از نظر هندسی
۴۰	۶-۲. روش سیمپلکس
۴۷	۷-۲. روش سیمپلکس M-بزرگ
۵۰	۸-۲. روش سیمپلکس دو مرحله‌ای یا دوفازی
۵۴	۹-۲. حالت‌های مختلف مسئله برنامه‌ریزی خطی در جدول سیمپلکس
۶۲	سؤالات تستی فصل دوم
۶۸	مسائل فصل دوم
۷۳	جواب تشریحی به سؤالات تستی فصل دوم

۷۷	فصل ۳: برنامه‌ریزی خطی، مسئله دوگان، تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتریک
۷۷	مقدمه
۷۸	۳-۱. مسئله دوگان، مسئله اولیه
۸۱	۳-۲. مفهوم قیمت سایه
۸۳	۳-۳. روابط بین مسئله اولیه - دوگان
۹۳	۳-۴. روش سیمپلکس دوگان
۹۸	۳-۵. شکل ماتریسی جدول سیمپلکس و روابط ریاضی بین پارامترهای آن
۱۰۴	۳-۶. تحلیل حساسیت یا تحلیل پس از بهینگی
۱۱۷	۳-۷. برنامه‌ریزی پارامتریک
۱۲۳	سؤالات تستی فصل سوم
۱۳۳	مسائل فصل سوم
۱۴۰	جواب تشریحی به سؤالات تستی فصل سوم
۱۴۹	فصل ۴: سیمپلکس تجدیدنظر شده
۱۴۹	مقدمه
۱۵۰	۴-۱. روش سیمپلکس تجدیدنظر شده
۱۵۰	۴-۲. روش محاسبه ماتریس B^{-1}
۱۵۳	۴-۳. الگوریتم روش سیمپلکس تجدیدنظر شده
۱۶۰	۴-۴. مقایسه روش سیمپلکس و روش سیمپلکس تجدیدنظر شده
۱۶۰	۴-۵. شکل ضربی ماتریس معکوس
۱۶۲	۴-۶. محاسبه بردار مضارب سیمپلکس $W = C_B \cdot B^{-1}$
۱۶۲	۴-۷. محاسبه ستون y_k و سمت راست $\bar{b}$
۱۶۳	سؤالات تستی فصل چهارم
۱۶۳	مسائل فصل چهارم
۱۶۵	جواب تشریحی به سؤالات تستی فصل چهارم
۱۶۷	فصل ۵: مسئله حمل و نقل
۱۶۷	مقدمه
۱۶۷	۵-۱. مسئله حمل و نقل و برنامه‌ریزی خطی
۱۶۹	۵-۲. موجه بودن مسئله حمل و نقل
۱۷۱	۵-۳. پیدا کردن یک جواب موجه (شدنی) آغازین
۱۷۸	۵-۴. نمایش یک پایه در جدول مسئله حمل و نقل
۱۷۹	۵-۵. پیدا کردن جواب بهینه از روی جواب موجه آغازین
۱۸۵	۵-۶. حالت‌های خاص مسئله حمل و نقل
۱۹۹	۵-۷. تحلیل حساسیت در مسئله حمل و نقل
۲۰۵	سؤالات تستی فصل پنجم
۲۱۰	مسائل فصل پنجم
۲۱۶	جواب تشریحی به سؤالات تستی فصل پنجم

۲۱۹	فصل ۶: مسئله واگذاری یا تخصیص
۲۱۹	مقدمه
۲۱۹	۶-۱. حل مسئله واگذاری
۲۴۰	سؤالات تستی فصل ششم
۲۴۲	مسائل فصل ششم
۲۴۴	جواب تشریحی به سؤالات تستی فصل ششم
۲۴۷	نمونه سؤالات تستی (کنکور کارشناسی ارشد)
۳۱۰	جواب به سؤالات تستی آخر کتاب
۳۳۳	منابع و مأخذ

مقدمه

بعد از انقلاب صنعتی، جهان شاهد رشد شگفت‌انگیز سازمان‌ها از نظر بزرگی و پیچیدگی بوده است. جزئی از این تحول شگرف، تقسیم وظایف و تفکیک مسئولیت‌های مدیریت در سازمان‌ها است. شکی نیست که این تحولات ثمرات مهمی به بار آورد، اما افزایش تخصص، در کنار فواید بی‌شمار آن، مسائل جدیدی را نیز به همراه داشت که بسیاری از سازمان‌ها هنوز هم با آن مواجه هستند. با افزایش تخصص و درجه پیچیدگی در یک سازمان، مسئله تخصیص منابع موجود بین فعالیت‌های بخش‌های مختلف آن، به منظور دستیابی به بالاترین کارایی کل سازمان، هر روز مشکل و مشکل‌تر می‌شود. تحقیقی که در جهت رسیدن به راه بهتری برای حل این نوع مسائل آغاز شده بود، زمینه مناسب پیدایش تحقیق در عملیات را فراهم ساخت. آنچه که امروزه تحقیق در عملیات خوانده می‌شود با خدمات نظامی در آغاز جنگ جهانی دوم شکل گرفت. با همین هدف، فرماندهی ارتش‌های بریتانیا و آمریکا گروه بزرگی از دانشمندان را فراخواندند تا این نوع مسئله‌ها و مسائل تاکتیکی و استراتژیکی دیگر را با دیدگاهی علمی بررسی نمایند.

بعد از جنگ، دانشمندانی که در گروه‌های تحقیق در عملیات کار کرده و یا در مورد آن مطالبی شنیده بودند، انگیزه کافی برای پیگیری تحقیقات مربوطه را پیدا کردند و در این راه به پیشرفت‌های مهمی دست یافتند ابداع روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی توسط جرج بی‌دانتزیگ، در سال ۱۹۴۷ از اولین و مهمترین دستاوردهای این پژوهش‌ها بود، برخی از ابزارهای متعارف تحقیق در عملیات، نظیر

برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی پویا، نظریه صف و نظریه موجودی‌ها تا سال ۱۹۵۰ نسبتاً توسعه یافته بودند. علاوه بر پیشرفت سریع جنبه‌های نظری تحقیق در عملیات، عامل مؤثر دیگری که به جهش این رشته کمک کرد. پیشرفت سریع جنبه‌های نظری تحقیق در عملیات، عامل مؤثر دیگری که به جهش این رشته کمک کرد، پیشرفت کامپیوتر بود. غالباً حل مسائل پیچیده تحقیق در عملیات مستلزم محاسبات فوق‌العاده زیادی است. بنابراین، توسعه کامپیوتر و توانایی آن در انجام محاسبات ریاضی که هزاران و حتی میلیون‌ها بار سریع‌تر از قدرت بشر است، شکوفایی تحقیق در عملیات را در پی داشت.

فصل اول

برنامه‌ریزی خطی و مدل‌سازی

اهداف

در این فصل، دانشجو با مفاهیم زیر آشنا می‌شود:

۱. صورت کلی برنامه‌ریزی خطی

۲. علم و هنر مدل‌سازی

۳. حل چند مسئله نمونه از مدل‌سازی

مقدمه

برنامه‌ریزی خطی با ماکزیمم یا مینیمم‌سازی یک تابع خطی با محدودیت‌هایی که به فرم معادله یا نامعادله خطی هستند سر و کار دارد.

به‌طور خلاصه، برنامه‌ریزی خطی با مدل‌سازی برای سیستم‌های غیراحتمالی و احتمالی دنیای واقعی و همچنین بهترین تصمیم‌گیری ممکن در مورد آنها مربوط می‌گردد. این نوع کاربردها در زمینه مدیریت دولتی، تجارت، مهندسی، اقتصاد و علوم طبیعی و اجتماعی وجود دارند و وجه مشترک همگی آنها، تخصیص منابع محدود است. در چنین موقعیت‌هایی، تحلیل‌های علمی نظیر آنچه که در تحقیق در عملیات انجام می‌گیرد، میزان آگاهی از وضعیت مورد نظر را به طرز جامعی افزایش می‌دهد. مراحل بررسی یک مسئله با روش‌های تحقیق در عملیات به شرح زیر است:

الف) ساختن مدلی ریاضی برای وضعیت مورد نظر در دنیای واقعی، که این امر مستلزم نگرش جامع سیستم است.

ب) شناخت ساختار جواب این مسائل و توسعه رویه‌ای نظام‌گرا برای به‌دست آوردن آنها.

ج) پیدا کردن یک جواب، و در صورت لزوم توسعه نظریه ریاضی مربوط به آن، که مقدار بهینه را بر اساس معیار مطلوبیت سیستم به‌دست دهد.

در این فصل مسئله برنامه‌ریزی خطی مطرح می‌شود و چند نمونه مسئله برای مدل‌سازی بیان و مدل آنها ساخته می‌شود.

۱-۱. صورت کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی

یک مسئله برنامه‌ریزی خطی از دو قسمت اصلی، تابع هدف و محدودیت‌ها تشکیل می‌شود که به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\text{هدف} \quad (\text{Max or}) \text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{S.to} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \text{ یا } \geq b_i, i=1, \dots, m \\ x_j \geq 0; j=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

که در آن، x_j ، متغیرهای تصمیم‌گیری مسئله هستند (برای نمونه x_j می‌تواند بیانگر تعداد محصول j ام یا زمان تولید کار j ام باشد)، c_j ، ضریب سود یا هزینه متغیر j ام می‌باشد.

a_{ij} : ضرایب فنی یا تکنولوژیکی (میزان ماده اولیه‌ای که از منبع i ام در تولید محصول j ام نقش دارد).

b_i : میزان موجودی منبع i ام می‌باشد.

(لازم به توضیح است که متغیرهای تصمیم مسئله می‌توانند منفی یا آزاد در علامت نیز باشند)

(*) فرم ماتریسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر است:

$$\text{Max یا Min } Z = Cx$$

$$\text{S.to: } Ax \leq \text{یا } \geq b$$

$$x \geq 0$$

که در آن C را بردار ضرایب هدف و x را بردار متغیرهای تصمیم و A را

ماتریس ضرایب فنی و b را ماتریس طرف دوم یا جواب می‌نامیم.
نکته ۱: از آنجایی که متغیرهای تصمیم بیان‌کننده تعداد و مقدار در مسئله می‌باشند، به صورت نامنفی فرض می‌شوند. ($x \geq 0$).
 حال با تعریف ساختار کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی، به فرموله کردن چند مسئله نمونه می‌پردازیم.

۲-۱. مدل‌سازی

فرموله کردن مسائل برنامه‌ریزی خطی در واقع نوعی هنر تلقی می‌شود، هنری که علی‌القاعده به مدد تجربه و شناخت و مطالعه حاصل می‌گردد. در این بخش، ابتدا تکنیک‌های ساده فرموله کردن و سپس فنون خاص برای فرموله کردن را ارائه می‌دهیم و در پایان فرموله کردن مسائل مشکل‌تر را تجربه می‌کنیم.

۱-۲-۱. مثال. یک کمپانی سه نوع ماشین تولید می‌کند که به تکنیک‌های مختلفی نیاز می‌باشد. نوع سوپر دولوکس، ۱۷ ساعت کارگری و ۸ ساعت بازرسی نیاز دارد و ۳۰۰ دلار سود می‌دهد. نوع سوپر، ۱۰ ساعت کارگری و ۴ ساعت بازرسی نیاز دارد و ۲۰۰ دلار سود می‌دهد. نوع عادی، ۲ ساعت کارگری و ۲ ساعت بازرسی نیاز دارد و ۱۰۰ دلار سود می‌دهد. مجموعاً، ۱۰۰۰ ساعت کارگری، ۵۰۰ ساعت بازرسی از نظر نیروی انسانی در دسترس می‌باشد. بازاریابی نشان می‌دهد که بیش از ۵۰ عدد نوع سوپر دولوکس، ۸۰ عدد نوع سوپر، و ۱۵۰ عدد نوع عادی نمی‌توان فروخت. کمپانی می‌خواهد بداند که از هر ماشین بایستی چند عدد تولید کند که سود حاصل ماکزیمم باشد. مسئله را به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌کنیم.
 ابتدا متغیرهای تصمیم مسئله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

x_j : تعداد ماشین‌های نوع j ام ($j = ۱, ۲, ۳$)

یعنی:

x_1 : تعداد ماشین سوپر دولوکس

x_2 : تعداد ماشین سوپر

x_3 : تعداد ماشین عادی

با توجه به سوددهی هر ماشین، تابع هدف مسئله به صورت زیر است:

$$\text{Max } Z = 300 x_1 + 200 x_2 + 100 x_3$$

اما توجه به محدودیت‌های بازرسی و کارگری و تعداد ماشین‌ها، قیدهای مسئله به صورت زیر می‌باشند.

$$17 x_1 + 10 x_2 + 2 x_3 \leq 1000 \quad \text{محدودیت کارگری:}$$

$$8 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 \leq 500 \quad \text{محدودیت بازرسی:}$$

محدودیت‌های تعداد ماشین‌ها:

$$0 \leq x_1 \leq 50$$

$$0 \leq x_2 \leq 80$$

$$0 \leq x_3 \leq 150$$

۲-۲-۱. مثال (مسئله ترکیب تولید). شرکتی می‌خواهد بداند که از هر یک از

سه محصولش چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع حداکثر سود را داشته باشد. نیروی کار و مواد مورد نیاز و همچنین سود هر یک از سه محصول در جدول زیر بیان شده است:

مقدار منابع مورد نیاز				
مقدار در دسترس	محصول ۳	محصول ۲	محصول ۱	منابع
۲۴۰ ساعت	۴	۲	۵	نیروی کار (برحسب ساعت)
۴۰۰ کیلوگرم	۳	۶	۴	مواد (برحسب کیلوگرم)
-	۲	۵	۳	سود هر محصول (به واحد پول)

ابتدا متغیرهای تصمیم مسئله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

x_1 : مقدار تولید محصول ۱

x_2 : مقدار تولید محصول ۲

x_3 : مقدار تولید محصول ۳

با توجه به سود دهی هر محصول، تابع هدف مسئله عبارت است از:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

محدودیت‌های مدل

در این مسئله، محدودیت‌ها شامل نیروی کار و مواد در دسترس برای تولید هستند.

تولید هر یک از سه محصول به نیروی کار و مواد بستگی دارد. نیروی کار لازم برای تولید هر یک واحد از محصول اول ۵ ساعت است.

بنابراین کل نیروی کار لازم برای تولید محصول ۱، $5x_1$ ساعت است. همین‌طور محصول ۲ مساوی با $2x_2$ ساعت و محصول ۳ مساوی با $4x_3$ ساعت نیروی کار نیاز دارند. کل موجودی نیروی کار نیز ۲۴۰ ساعت است. بنابراین محدودیت نیروی کار عبارتست از:

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$$

محدودیت مواد نیز به همین روش فرموله می‌شود، یعنی

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$$

در پایان نامنفی بودن متغیرها باید لحاظ شود، یعنی

$$x_1 \geq 0 \text{ و } x_2 \geq 0 \text{ و } x_3 \geq 0$$

چون تولید منفی از هر محصول غیرمنطقی و نامفهوم است.

(*) در اکثر مسائل برنامه‌ریزی خطی شرط نامنفی بودن متغیرها وجود دارد. اما چنانچه مسئله مستلزم استفاده از متغیرهای منفی باشد می‌توان روش حل مسئله برنامه‌ریزی خطی را باز هم به کار برد. وجود یک یا چند متغیر منفی در مسئله برنامه‌ریزی خطی زمانی اتفاق می‌افتد که متغیر تصمیم بیانگر سود یا زیان شرکت و یا نرخ رشد تولید یا نرخ کاهش تولید باشد. زیان دادن بازده شرکت و یا کاهش نرخ رشد به معنای وجود یک متغیر تصمیم منفی است.

۱-۲-۳. مثال (مسئله بازاریابی). یک فروشگاه زنجیره‌ای برای بالا بردن فروش خود درصدد است که تبلیغات را در سطح وسیعی برنامه‌ریزی کند. سه نوع وسیله تبلیغاتی موجود عبارت‌اند از: آگهی تجاری تلویزیون، آگهی تجاری رادیو و ستون تبلیغاتی روزنامه. هزینه هر بار تبلیغات و تعداد مشتریانی که در معرض هر بار تبلیغات قرار می‌گیرند، برحسب نوع وسیله تبلیغات در جدول زیر داده شده است.

هزینه (تومان)	تعداد افراد در معرض تبلیغات	وسیله تبلیغات
۱۵۰۰۰۰	۲۰۰۰	آگهی تجاری تلویزیون
۶۰۰۰۰	۱۲۰۰۰	آگهی تجاری رادیو
۴۰۰۰۰	۹۰۰۰	ستون تبلیغاتی روزنامه

شرکت باید محدودیت‌های زیر را در تبلیغات خود مدنظر داشته باشد:

الف) کل بودجه تبلیغات ۱/۰۰۰/۰۰۰ تومان است.

ب) مجوز تعداد تبلیغات تلویزیون حداکثر ۴ نوبت است.

ج) مجوز تعداد تبلیغات رادیو حداکثر ۱۰ نوبت است.

د) مجوز تعداد آگهی روزنامه حداکثر ۷ نوبت است.

ه) مجموع آگهی‌های تبلیغاتی در سه وسیله نباید بیشتر از ۱۵ نوبت باشد.

مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌کنیم.

متغیرهای تصمیم مدل عبارت‌اند از:

x_1 : تعداد آگهی تجاری تلویزیون

x_2 : تعداد آگهی تجاری رادیو

x_3 : تعداد آگهی تبلیغاتی روزنامه

هدف این مسئله حداکثر تعداد افرادی هستند که در معرض آگهی‌های تبلیغاتی

قرار می‌گیرند، یعنی

$$\text{Max } Z = 20000 x_1 + 12000 x_2 + 9000 x_3$$

که در آن؛ $20000 x_1$ تعداد افرادی می‌باشند که در معرض آگهی‌های تجاری

تلویزیونی شرکت قرار می‌گیرند.

$12000 x_2$ تعداد افرادی می‌باشند که در معرض آگهی‌های تجاری رادیویی

شرکت قرار می‌گیرند.

$9000 x_3$ تعداد افرادی می‌باشند که در معرض آگهی‌های تبلیغاتی روزنامه‌ای

شرکت قرار می‌گیرند.

محدودیت‌های مدل

محدودیت بودجه تبلیغات

$$150/000 x_1 + 60/000 x_2 + 40/000 x_3 \leq 1/000/000$$

محدودیت‌های نوبت آگهی: تلویزیون، رادیو، روزنامه

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_3 \leq 7$$

محدودیت نوبت تبلیغاتی

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

و در نهایت باید $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ و $x_3 \geq 0$.

۴-۲-۱. مثال. یک شرکت تولیدکننده مصالح ساختمانی، سفارشی برای الوار در

۳ اندازه مختلف دریافت کرده است.

تعداد سفارش	اندازه
۷۰۰	۷ متر
۱۲۰۰	۹ متر
۳۰۰	۱۰ متر

طول الوارهای موجود در شرکت همگی دارای استاندارد ۲۵ متری است. بنابراین شرکت باید الوارهای موجود را به اندازه‌های سفارش شده برش دهد. این شرکت می‌خواهد بداند الوارهای استاندارد را با چه الگویی برش بزند تا تعداد کل تخته‌های الوار مورد نیاز برای تأمین سفارش حداقل گردد. مسئله را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌کنیم. ابتدا الگوهای متفاوت برش را از این الوارهای ۲۵ متری به صورت زیر نشان می‌دهیم.

الگوها سفارشات	الگوی ۱	الگوی ۲	الگوی ۳	الگوی ۴	الگوی ۵	الگوی ۶
۷ متر	۳	۲	۲	۱	۰	۰
۹ متر	۰	۱	۰	۲	۰	۱
۱۰ متر	۰	۰	۱	۰	۲	۱
دور ریز به متر	۴	۲	۱	۰	۵	۶

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

x_i ، تعداد الوار برش داده شده با الگوی i ام (۶ و ۰۰۰ و ۳ و ۲ و ۱ و i)

بنابراین،

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 5x_5 + 6x_6$$

$$\text{S.to: } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 700 \\ x_2 + 2x_4 + x_6 \geq 1200 \\ x_3 + 2x_5 + x_6 \geq 300 \\ x_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

۱-۲-۵. مثال (مخلوط کردن مواد خوراکی). فرض کنید مقدار خوراک موردنیاز یک مرغداری ۱۰۰ کیلو در روز باشد، این خوراک مخلوط باید شامل مواد زیر باشد.

الف) کلسیم حداقل ۰/۸٪ و حداکثر ۱/۲٪ (برحسب کیلو)

ب) پروتئین حداقل ۲۲٪

ج) الیاف خام حداکثر ۵٪

به علاوه فرض کنید اجزای ترکیبی اصلی (مواد غذایی) که مورد استفاده قرار می گیرند سنگ آهک، ذرت و آرد لوبیای روغنی باشند. محتوای غذایی این اجزای ترکیبی در جدول زیر داده شده است:

اجزای ترکیبی	کلسیم	پروتئین	الیاف خام	هزینه هر کیلو
سنگ آهک	۰/۳۸۰	۰	۰	۰/۰۱۶۴
ذرت	۰/۰۰۱	۰/۰۹	۰/۰۲	۰/۰۴۶۳
آرد لوبیای روغنی	۰/۰۰۲	۰/۵۰	۰/۰۸	۰/۱۲۵۰

مسئله را به گونه ایی فرموله می کنیم که هزینه حاصل از ترکیبات فوق با محدودیت های مربوطه حداقل گردد.

فرض کنید x_1, x_2, x_3 به ترتیب (برحسب کیلو) سنگ آهک، ذرت و آرد لوبیای روغنی باشند که برای تولید یک بسته ۱۰۰ کیلویی از خوراک مخلوط مصرف می شوند. بنابراین:

$$\text{Min } Z = 0.0164x_1 + 0.0463x_2 + 0.1250x_3$$

$$\text{S.to: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 0.38x_1 + 0.01x_2 + 0.02x_3 \leq 1.2 \\ 0.38x_1 + 0.01x_2 + 0.02x_3 \geq 0.8 \\ 0.09x_2 + 0.50x_3 \geq 22 \\ 0.02x_2 + 0.08x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

۱-۲-۶. مثال. یک بررسی ساده در یک بیمارستان نشان می دهد که بیمارستان در ساعات مختلف شبانه روز از نظر پرستار نیازی به صورت ذیل دارد.

دوره	وقت	کمترین پرستار مورد نیاز (نفر)
۱	۶ صبح تا ۱۰ صبح	۶۰
۲	۱۰ صبح تا ۲ بعد از ظهر	۷۰
۳	۲ بعد از ظهر تا ۶ بعد از ظهر	۶۰
۴	۶ بعد از ظهر تا ۱۰ شب	۵۰
۵	۱۰ شب تا ۲ صبح	۲۰
۶	۲ صبح تا ۶ صبح	۳۰

پرستارها به محض ورود به بیمارستان در شروع هر دوره خود را معرفی می‌نمایند و کار خود را شروع و می‌توانند ۸ ساعت کار کنند. بیمارستان می‌خواهد بداند که حداقل چند نفر پرستار بایستی استخدام نماید به‌طوری‌که نیروی انسانی لازم موردنظر را برای دوره‌های مختلف کار داشته باشد. مسئله را به‌صورت برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌کنیم.

ابتدا متغیرهای تصمیم این مسئله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

x_1 ، تعداد پرستارانی که ساعت ۶ صبح وارد بیمارستان می‌شوند.

x_2 ، تعداد پرستارانی که ساعت ۱۰ صبح وارد بیمارستان می‌شوند.

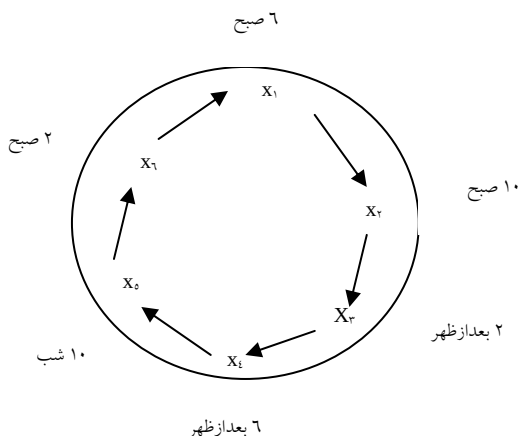
x_3 ، تعداد پرستارانی که ساعت ۲ بعد از ظهر وارد بیمارستان می‌شوند.

x_4 ، تعداد پرستارانی که ساعت ۶ بعد از ظهر وارد بیمارستان می‌شوند.

x_5 ، تعداد پرستارانی که ساعت ۱۰ شب وارد بیمارستان می‌شوند.

x_6 ، تعداد پرستارانی که ساعت ۲ صبح وارد بیمارستان می‌شوند.

با توجه به متغیرهای تصمیم، آنها را می‌توان در شکل زیر نشان داد:



حال با توجه به مفروضات مسئله و توضیحات فوق، مسئله را به یک برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کنیم:

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{S.to: } \begin{cases} x_1 + x_2 & \geq 70 \\ x_2 + x_3 & \geq 60 \\ x_3 + x_4 & \geq 50 \\ x_4 + x_5 & \geq 20 \\ x_5 + x_6 & \geq 30 \\ x_1 + x_6 & \geq 60 \\ x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

۷-۲-۱. مثال. مسئله برنامه‌ریزی هفتگی تولید یک محصولی را برای ۴ هفته آینده در نظر می‌گیریم تولید هر عدد این محصول برای هفته اول و دوم ۱۰ تومان خرج دارد و در هفته سوم و چهارم تهیه گردد و ۱۵ تومان هزینه دارد. تقاضا برای این محصول برای هفته‌های اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب ۳۰۰، ۷۰۰، ۹۰۰، ۸۰۰ عدد می‌باشد که بایستی طبق قرارداد در اختیار مشتری قرار گیرد. کارخانه قادر است حداکثر در هفته ۷۰۰ عدد از محصول را تولید نماید. به‌علاوه کمپانی می‌تواند با به‌کار بردن اضافه کار، ۲۰۰ عدد دیگر نیز در عرض یک هفته به تولید خود بیافزاید ولی برای هر عدد از محصول ۵ تومان اضافه دستمزد به خاطر اضافه کار باید پردازد. محصول اضافی هر هفته را می‌توان در انبار ذخیره نمود ولی هزینه انبارداری ۳ تومان برای هر هفته می‌باشد. به چه صورتی بایستی محصول تولید گردد تا هزینه تولید مینیمم باشد و بتوان طبق تقاضای مشتری، محصول را تحویل داد. مسئله را به‌صورت برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌کنیم.

فرض می‌کنیم:

x_{ij} مقدار کالای تولید شده در هفته i ام به منظور فروش در هفته j ام که در وقت عادی تولید شده است، به ازای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ $i, j = 1, 2, \dots, 4$.
 y_{ij} مقدار کالای تولید شده در هفته i ام به منظور فروش در هفته j ام که در وقت اضافه کاری تولید می‌شود، به ازای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ $i, j = 1, 2, \dots, 4$.
 بنابراین مسئله را می‌توان به‌صورت زیر فرموله نمود:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 10(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 10(x_{22} + x_{23} + x_{24}) \\ & + 15(x_{33} + x_{34}) + 15x_{44} + 15(y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14}) \\ & + 15(y_{22} + y_{23} + y_{24}) + 20(y_{33} + y_{34}) + 20y_{44} \\ & + 3(x_{12} + y_{12}) + 6(x_{13} + y_{13}) + 9(x_{14} + y_{14}) \\ & + 3(x_{23} + y_{23}) + 6(x_{24} + y_{24}) \\ & + 3(x_{34} + y_{34}) \end{aligned}$$

محدودیت‌های برآورده شده که بایستی طبق تقاضا در اختیار مشتری قرار گیرد:

$$\text{S.to: } \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + y_{11} = 300 \\ x_{12} + x_{22} + y_{12} + y_{22} = 700 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_{13} + y_{23} + y_{33} = 900 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + y_{14} + y_{24} + y_{34} + y_{44} = 800 \\ \\ \text{محدودیت‌های تولید کالا در وقت عادی برای هر هفته:} \\ \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 700 \\ x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 700 \\ x_{33} + x_{34} \leq 700 \\ x_{44} \leq 700 \\ \\ \text{محدودیت‌های تولید کالا در وقت اضافی برای هر هفته:} \\ \\ y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} \leq 700 \\ y_{22} + y_{23} + y_{24} \leq 700 \\ y_{33} + y_{34} \leq 700 \\ y_{44} \leq 700 \end{array} \right.$$

محدودیت‌های نامنفی: $x_{ij} \geq 0, y_{ij} \geq 0; i, j = 1, 2, 3, 4$

۸-۲-۱. مثال. کارخانه ذوب آهن با مسئله حمل ذغال از دو معدن به چهار

کوره کک سازی روبرو می‌باشد. ذغال‌های موجود در معادن به ترتیب a_1 و a_2 تن می‌باشند و مقادیر مورد نیاز از ذغال در کوره‌های کک سازی b_1, b_2, b_3, b_4 تن می‌باشد. فقط یک قطار وجود دارد که ذغال را از معادن به کوره‌ها حمل می‌نماید.

امکان ارسال ذغال از هر معدن به هر کوره می‌باشد اما قطار نمی‌تواند بیش از یک سفر از یک معدن به یک کوره، بار حمل بنماید. مسئله عبارتست از کمترین ظرفیت بارگیری قطار به طریقی که این حمل و نقل را صورت دهد. مسئله را به‌صورت برنامه ریزی خطی فرموله می‌کنیم.

با معرفی متغیرهای تصمیم x_{ij} به‌صورت:

مقدار ذغال ارسالی از معدن i ام به کوره j ام برحسب تن

مسئله فوق به‌صورت ریاضی عبارت است از:

$$\text{Min } z = \text{Max } (x_{ij})$$

$$\text{S.to } \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & \leq a_1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq a_2 \\ x_{11} & & + x_{21} & = b_1 \\ & x_{12} & & + x_{22} & = b_2 \\ & & x_{13} & & + x_{23} & = b_3 \\ & & & x_{14} & & + x_{24} & = b_4 \\ x_{ij} \geq 0 ; i=1,2 ; j=1,2,3,4 \end{cases}$$

۱-۲-۹. مثال. یک کمپانی غله را نقد خرید و فروش می‌کند. او دارای انباری به ظرفیت ۵۰۰۰ تن می‌باشد. در اول ماه فروردین، موجودی انبار ۱۰۰۰ تن است و موجودی حساب ۲/۰۰۰/۰۰۰ تومان. قیمت تقریبی غله برای هر تن در فصل بهار چنین است:

قیمت خرید برحسب تومان	قیمت فروش برحسب تومان	
۳۱۰۰	۲۸۵۰	فروردین
۳۲۵۰	۳۰۵۰	اردیبهشت
۲۹۵۰	۲۹۰۰	خرداد

غله‌ای که در ماه تحویل می‌گردد تا ماه بعدی فروخته نمی‌شود. خرید و فروش نقدی و در موعد تحویل صورت می‌گیرد. کمپانی مایل است موجودی نهائی انبارش ۲۰۰۰ تن باشد (در پایان فصل بهار) چه خط مشی برای خرید و فروش در بهار انتخاب کنیم تا سود کلی، بیشینه گردد. مسئله را به‌صورت یک برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌کنیم.

x_i ، مقدار غله‌ای که در ماه i ام فصل بهار خریداری می‌شود. ۳ و ۲ و $i = 1$

y_j ، مقدار غله‌ای که در ماه j ام فصل بهار فروخته می‌شود. ۳ و ۲ و $j = 1$

در هر ماه، سه محدودیت داریم:

۱. محدودیت ظرفیت انبار

۲. محدودیت پول

۳. محدودیت فروش

بنابراین

$$\text{Max } z = (3100y_1 - 2850x_1) + (3250y_2 + 3050x_2) + (2950y_3 - 2900x_3)$$

مشروط بر این که:

محدودیت‌های ماه فروردین:

$$x_1 + (1000 - y_1) \leq 5000$$

$$2850x_1 \leq 2/000/000 + 3100y_1$$

$$y_1 \leq 1000$$

محدودیت‌های ماه اردیبهشت:

$$x_2 + (x_1 - y_1 + 1000) \leq 5000$$

$$3050x_2 \leq 2/000/000 + 3100y_1 + 3250y_2 - 2850x_1$$

$$y_2 \leq (1000 - y_1) + x_1$$

محدودیت‌های ماه خرداد:

$$x_3 + (x_2 - y_2) + (x_1 - y_1) + 1000 = 2000$$

$$2900x_3 \leq 2/000/000 + 3100y_1 + 3250y_2 + 2950y_3 - 3050x_2 - 2850x_1$$

$$y_3 \leq (1000 - y_1) + x_1 + x_2 - y_2$$

۱-۲-۱۰. مثال. یک کمپانی سه نوع محصول A, B, C را تولید می‌کند. هر واحد

از محصول A یک ساعت کار مهندسی، ۱۰ ساعت کار کارگری و ۳ کیلو ماده اولیه

لازم دارد. تولید یک واحد از محصول B، ۲ ساعت کار مهندسی، ۴ ساعت کار کارگری

و ۲ کیلو ماده اولیه لازم دارد. هر واحد محصول C، یک ساعت کار مهندسی ۵ ساعت

کار کارگری و یک کیلو ماده اولیه لازم دارد. کارخانه، ۱۰۰ ساعت کار مهندسی، ۷۰۰

ساعت کار کارگری و ۴۰۰ کیلو ماده اولیه دارد.