

دانشگاه ساری نور

ترکیبیات و کاربردها

(رشته ریاضی)

دکتر نازلی بشارتی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

پنج

پیشگفتار

1

فصل اول: ترکیبیات چیست؟

1

هدف کلی

1

هدف‌های یادگیری

1

مقدمه

2

1-1 ترکیبیات چیست؟

3

1-2 معرفی برخی از مسائل ترکیبیاتی

12

خلاصه فصل اول

12

خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول

13

خودآزمایی تشریحی فصل اول

15

فصل دوم: دنباله‌های شمارشی خاص و اصول شمارش پولیا

15

هدف کلی

15

هدف‌های یادگیری

15

مقدمه

16

1-2 اعداد کاتالان

23

2-2 اعداد استرلینگ نوع دوم

28

1-2-2 اعداد بل

30

3-2 اعداد استرلینگ نوع اول

33

2-4 تابع مولد برای اعداد استرلینگ نوع اول و دوم

35

2-5 اصول شمارش پولیا

55

خلاصه فصل دوم

56

خودآزمایی چهار گزینه‌ای فصل دوم

58

خودآزمایی تشریحی فصل دوم

63	فصل سوم: سیستم نمایندگی متمایز و پرمنت
63	هدف کلی
63	هدف‌های یادگیری
63	مقدمه
63	1-3 سیستم نمایندگی متمایز
71	2-3 پرمنت
75	خلاصه فصل سوم
75	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم
78	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
81	فصل چهارم: مربع لاتین و کاربردهای آن
81	هدف کلی
81	هدف‌های یادگیری
81	مقدمه
82	1-4 مربع لاتین
93	2-4 ارتباط بین مربع لاتین و گراف
95	3-4 مربع‌های لاتین متعامد
104	4-4 مربع جادویی
112	5-4 ارتباط بین مربع جادویی و مربع لاتین
114	6-4 سودوکو
116	خلاصه فصل چهارم
117	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم
119	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
123	فصل پنجم: طرح‌های بلوکی و هندسه متناهی
123	هدف کلی
123	هدف‌های یادگیری
124	مقدمه
124	1-5 طرح‌های بلوکی غیرکامل متوازن
135	2-5 سیستم سه‌گانه اشتاینر
139	3-5 بلوک پایه
142	4-5 هندسه ترکیبیاتی
150	5-5 ارتباط بین هندسه ترکیبیاتی و مربع لاتین
156	خلاصه فصل پنجم
156	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم
159	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم

161	فصل ششم: ماتریس هادامارد
161	هدف کلی
161	هدف‌های یادگیری
161	مقدمه
161	1-6 ماتریس هادامارد
164	2-6 ساختن چند نوع ماتریس هادامارد
168	3-6 ارتباط بین ماتریس هادامارد و طرح‌های بلوکی و مربع لاتین
172	خلاصه فصل ششم
173	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل ششم
174	خودآزمایی تشریحی فصل ششم
175	فصل هفتم: کدگذاری و رمزنگاری
175	هدف کلی
175	هدف‌های یادگیری
176	مقدمه
176	1-7 اصول نظریه کدگذاری
186	2-7 کدهای ماتریسی
191	3-7 کد خطی
192	4-7 کد همینگ
194	5-7 کد هادامارد
197	6-7 کد دوری
201	7-7 ارتباط بین طرح بلوکی و کد
203	8-7 ارتباط بین مربع لاتین و کد
206	9-7 کد هافمن
208	1-9-7 کدنویسی و کدگشایی از روی درخت هافمن
210	10-7 رمزنگاری چیست؟
211	1-10-7 تفاوت بین رمزنگاری و کدگذاری
211	11-7 اجزای رمزنگاری
213	12-7 انواع الگوریتم‌های رمزنگاری
220	خلاصه فصل هفتم
221	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هفتم
223	خودآزمایی تشریحی فصل هفتم
227	فصل هشتم: نظریه رمزی
227	هدف کلی
227	هدف‌های یادگیری
227	مقدمه

228	1-8 اعداد رمزی
233	2-8 کران اعداد رمزی
239	خلاصه فصل هشتم
240	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هشتم
241	خودآزمایی تشریحی فصل هشتم
243	نمایه
245	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
247	پاسخ‌نامه
249	کتابنامه

پیشگفتار

ترکیبیات شاخه‌ای از ریاضیات است که به مطالعه ساختارهای گسسته متناهی یا قابل شمارش می‌پردازد. ترکیبیات را می‌توان هنر تنظیم اشیا براساس قوانین مشخص دانست. به عبارت دیگر ترکیبیات علم مطالعه بر روی آرایش‌های مختلف اعضای یک مجموعه است. مسائل ترکیبیاتی به دو دسته اساسی تقسیم می‌شوند. وجود یک آرایش، آیا یک آرایش به خصوص بر روی اعضا مجموعه وجود دارد؟ شمارش تعداد آرایش‌ها یا طبقه‌بندی آرایش‌ها، اگر یک آرایش خاص امکان‌پذیر باشد، چند روش مختلف برای رسیدن به آن وجود دارد؟

پیدایش ریاضیات ترکیبیاتی از قاره آسیا به‌ویژه کشورهای هند و چین آغاز گردید، شاید به‌توان شروع این نوع ریاضیات را به سال 2200 قبل از میلاد مسیح و ایجاد اولین مربع جادویی در چین نسبت داد، ولی اولین دیدگاه ریاضیات ترکیبیاتی در غرب، حدود قرن 12 میلادی و در کارهای فیبوناچی دیده شده است.

در ابتدا مسائل ترکیبیاتی به‌صورت بازی و سرگرمی ارائه می‌شده است، حتی برخی از مسائل مانند مربع لاتین و مربع جادویی ریشه در طلسم و جادو دارند.

نیاز اساسی تکنولوژی‌های جدید به مباحث گسسته باعث شد که ریاضیات ترکیبیاتی از یک ریاضیات سرگرمی به یک مبحث جدی و وسیع تبدیل شود و در بخش‌های زیادی از ریاضیات محض مانند جبر، نظریه احتمالات، توپولوژی و هندسه و در بخش‌های زیادی از ریاضیات کاربردی مانند بهینه‌سازی، علوم رایانه، نظریه ارگودیک، نظریه بازی‌ها و نظریه گراف کاربرد پیدا کند. به‌عنوان مثال ترکیبیات در

علوم رایانه برای به دست آوردن فرمول‌ها و تخمین‌ها در تحلیل الگوریتم‌ها کاربرد بسیاری دارد. در اواخر قرن بیستم روش‌های کلی و قدرتمندی ارائه شد که ترکیبیات را به شاخه مستقلی از ریاضیات تبدیل کرد.

تجربه چندین ساله تدریس درس ترکیبیات و کاربردهای آن در پیام‌نور و سایر دانشگاه‌ها در رشته ریاضی و نبود کتاب فارسی در این زمینه که سرفصل شورای عالی برنامه‌ریزی را پوشش دهد، نویسنده را بر آن داشت تا کتابی متناسب با سرفصل شورای عالی برنامه‌ریزی و متناسب با دانشجویان پیام‌نور فراهم آورد. البته کتاب حاضر می‌تواند مورد استفاده دانشجویان تمامی دانشگاه‌ها باشد. این کتاب در هشت فصل تألیف شده است. در هر فصل متناسب با مطالب آن مثال‌های متنوع و کاربردی بیان شده است. از آنجایی که مسائل ترکیبیاتی ریشه در بازی و سرگرمی دارد، سعی شده مثال‌هایی که حالت سرگرمی دارند، نیز بیان شود تا انگیزه بیشتری برای مطالعه ایجاد گردد.

در فصل اول به تاریخچه ریاضیات ترکیبیات می‌پردازیم و مسائل مهم و مشهور در ترکیبیات را بیان می‌کنیم تا شناخت بیشتری نسبت به این نوع تفکر ریاضی پیدا کرده و انگیزه بیشتری برای مطالعه فصل‌های بعد ایجاد شود.

همان‌طور که گفتیم دسته‌ای از مسائل ترکیبیاتی مربوط به شمارش تعداد آرایش‌های خاص یک مجموعه است؛ برخی از روش‌های شمارشی مانند جایگشت‌ها، اصل شامل - طرد، اصل لانه کبوتری و... قبلاً در درس ریاضیات گسسته مورد بحث قرار گرفته است. در فصل دوم به برخی دیگر از روش‌های شمارش ترکیبیاتی مانند دنباله اعداد استرلینگ نوع اول و دوم، دنباله اعداد بل و کاتالان و اصول شمارش پولیا پرداخته و به حل مسائلی که با این روش‌ها حل می‌شوند، می‌پردازیم.

در فصل سوم، سیستم نمایندگی متمایز و پرممنت را تعریف کرده و کاربرد آن‌ها را در حل مسائل شمارشی بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم، به مفهوم مربع لاتین که یکی از مهم‌ترین مباحث ترکیبیاتی است، می‌پردازیم. در سال 1782 مسئله 36 افسر توسط اوایلر مطرح گردید. مسئله 36 افسر و تعمیم آن در حالت کلی، باعث تعریف مفهوم مربع لاتین و مربع لاتین دوبه‌دو متعامد گردید. در این فصل، به بررسی مربع لاتین و مربع لاتین دوبه‌دو متعامد و کاربردهای آن می‌پردازیم، علاوه بر آن مربع جادویی را تعریف کرده و طریقه ساخت

مربع‌های جادویی را بیان می‌کنیم. همچنین به ارتباط بین مربع لاتین با گراف و مربع جادویی می‌پردازیم. در انتها اشاره‌ای به حل جدول سودوکو که امروزه بسیار مورد توجه اقشار مختلف جامعه قرار گرفته است، می‌کنیم.

در فصل پنجم، طرح بلوکی غیرکامل متوازن و حالت خاص آن سیستم سه‌گانه اشتاینر را مورد بررسی قرار داده و طرز ساخت برخی از طرح‌های بلوکی و کاربردهای آن را بیان می‌کنیم. طرح‌های بلوکی پایه و اساس طرح‌های آزمایشی در آمار می‌باشند. در این فصل اشاره‌ای نیز به هندسه ترکیبیاتی داریم و دو ساختار مهم هندسه ترکیبیاتی، صفحه‌تصویری متناهی و صفحه‌آفین را تعریف و طرز ساخت آن‌ها را بیان می‌کنیم. همچنین ارتباط بین صفحه‌تصویری متناهی و صفحه‌آفین با مربع لاتین را بیان می‌کنیم. در فصل ششم، ماتریس هادامارد را تعریف کرده و برخی از روش‌های ساخت آن را بیان می‌کنیم. همچنین ارتباط بین ماتریس هادامارد با دیگر ساختارهای ترکیبیاتی مانند مربع لاتین و طرح بلوکی را بیان می‌کنیم.

در فصل هفتم، به مبحث نظریه کدگذاری و رمزنگاری می‌پردازیم. در بخش اول این فصل، با اصول نظریه کدگذاری و انواع کدها آشنا می‌شویم. همچنین اشاره‌ای به ارتباط بین طرح بلوکی، مربع لاتین و کد داریم. در بخش دوم، با اصول رمزنگاری آشنا شده و تفاوت بین رمزنگاری و کدگذاری را بیان می‌کنیم. انواع الگوریتم‌های رمزنگاری را بیان و با برخی از سیستم‌های رمزنگاری جابه‌جایی آشنا می‌شویم.

در فصل هشتم، به بررسی نظریه رمزی می‌پردازیم. نظریه رمزی، توسط فرانک رمزی در سال 1928 مطرح گردیده است، ولی در سال 1930 توجه ریاضیدانان بزرگ مجارستانی پل اردوش را جلب کرد. اردوش نظریه رمزی را به صورت گرافی بیان و آن را در نظریه گراف به کار گرفت. می‌توان گفت نظریه رمزی جواهری درخشان از ترکیبیات است که نشان می‌دهد، در هر ساختاری به اندازه کافی بزرگ می‌توان یک زیرساختاری یافت که منظم باشد. لذا از آن می‌توان در هر مبحثی از ریاضیات و فیزیک نجوم گرفته تا مخابرات و علوم کامپیوتر استفاده کرد. از آنجایی که حتی با محاسبات کامپیوتری هنوز مقدار دقیق اعداد رمزی برای مقادیر کوچک مشخص نشده است، لذا مبحث نظریه رمزی یکی از مباحث جالب و بحث برانگیز ریاضی است. در این فصل اعداد رمزی را تعریف کرده و کران‌هایی را برای مقدار آن به دست می‌آوریم.

در کل کتاب اهتمام کافی به عمل آمده است که کتاب نوعی «خودآموز» باشد. بدین معنی که دانشجو بتواند بدون کمک استاد، آن را مطالعه کند. علاوه بر اینکه مثال‌های متنوعی برای هر تعریف و قضیه گفته شده است، تمرین‌هایی در آخر هر فصل ارائه شده است.

همان‌طور که گفته شد بسیاری از مباحث مهم ترکیبیاتی مانند مربع لاتین و سیستم سه‌گانه کرک‌من، از یک مسئله سرگرمی ایجاد شده‌اند، ولی حل آن‌ها سال‌های متمادی طول کشیده است (مانند حل ادعای اوپلر)، لذا در ابتدا ممکن است صورت یک مسئله ترکیبیاتی خیلی ساده و پیش‌افتاده به نظر برسد، ولی حل آن احتیاج به ابتکار و ذهن خلاق دارد، مانند مسائل اعداد رمزی. بنابراین تجربه در حل مسائل ترکیبیاتی بسیار مهم است، لذا حل تمرین‌ها به مهارت دانشجو در به‌کار بستن قضیه‌ها و داشتن خلاقیت و تفکر ترکیبیاتی کمک شایانی می‌کند.

بدون تردید ویراستاری هر کتاب ریاضی بسیار حائز اهمیت است، لذا مؤلف وظیفه خود می‌داند که از زحمات سرکار خانم دکتر فاطمه موسوی برای ویراستاری علمی کتاب تشکر و قدردانی نماید.

از مدیریت محترم تدوین و سرکارخانم معدلت، کارشناس محترم تدوین برای پیگیری‌های مستمرشان در تمامی مراحل اداری تشکر می‌نمایم. از آقای مهندس دانیال طاهرخانی بابت زحماتی که برای تایپ برخی از فصول و ترسیم شکل‌ها متحمل شده‌اند، سپاسگزارم. همچنین از خانواده عزیزم به‌خاطر حمایت‌های بی‌دریغشان سپاس و قدردانی ویژه دارم.

در آخر، اذعان می‌دارم که این کتاب عاری از خطا و اشتباه نیست. لذا، از تمامی اساتید بزرگوار و دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود، نظرات و انتقادات خود را ارسال کنند تا در چاپ‌های بعدی کتاب مدنظر قرار گیرد.

نازلی بشارتی

تایستان 96

nbesharati@pnu.ac.ir

فصل اول

ترکیبیات چیست؟

هدف کلی

در این فصل با برخی از مسائل معروف ترکیبیاتی آشنا می‌شویم.

هدف‌های یادگیری

در پایان این فصل دانشجو توانایی توضیح مطالب زیر را خواهد داشت:

1. ریاضیات ترکیبیاتی چیست.
2. مسائل مهم و مشهور در ترکیبیات و تاریخچه ایجاد آن‌ها را بیان کند.

مقدمه

تعجب‌آور خواهد بود اگر خواننده این کتاب تاکنون هیچ مسئله ترکیبیات را حل نکرده باشد. آیا تاکنون به شمارش تعداد بازی‌هایی که باید بین n تیم برگزار شود، به‌طوری که هر تیم با هر تیم دیگر دقیقاً یک‌بار بازی کند، پرداخته‌اید؟ آیا به چگونگی انتخاب یک تیم ورزشی از اعضای یک کلاس فکر کرده‌اید؟ آیا به این موضوع فکر کرده‌اید که اگر در سر جلسه امتحان، لحظه‌ای مراقب امتحانی، جلسه امتحان را ترک کند، احتمال اینکه در برگشت مراقب، ورقه هیچ دانشجویی در نزد خودش نباشد چقدر است؟ آیا تاکنون به این موضوع فکر کرده‌اید که اگر با 7 نفر از دوستان خود دور میز گردی بنشینید؛ به چند طریق می‌توانید دوه‌دو با هم دست بدهید به‌طوری که بازوهایتان از روی هم عبور نکند؟ آیا اخیراً به حل یک جدول سودوکو پرداخته‌اید؟

سؤالات فوق، نمونه‌هایی از مسائل ترکیبیات هستند. این مثال‌ها نشان می‌دهد که ترکیبیات، ریشه در سرگرمی‌ها و بازی‌ها دارد. نیاز حیاتی تکنولوژی‌های جدید به مباحث گسسته باعث شد که ریاضیات ترکیبیاتی از یک ریاضیات سرگرمی به یک مبحث جدی و وسیع در ریاضیات تبدیل شود و در بخش‌های زیادی از ریاضیات محض مانند جبر، نظریه احتمالات، توپولوژی و هندسه و در بخش‌های زیادی از ریاضیات کاربردی مانند بهینه‌سازی، علوم رایانه، نظریه ارگودیک، نظریه بازی‌ها و نظریه گراف کاربرد پیدا کند. یکی از دلایل رشد فوق‌العاده ترکیبیات در سال‌های اخیر، تأثیر عمده‌ای است که کامپیوتر بر جامعه ما داشته است. پایه و اساس اغلب برنامه‌های کامپیوتری، الگوریتم‌های ترکیبیاتی هستند که تجزیه و تحلیل این الگوریتم‌ها برای بهره‌وری بیشتر از نظر زمان اجرای برنامه و حافظه مورد نیاز، احتیاج به تفکر ترکیبیاتی دارد.

اکثر مباحث ریاضی را می‌توان در یک دورهٔ سخنرانی تحت پوشش قرار داد و به سمت یک هدف تعریف شده، پیش رفت (مانند قضیهٔ اعداد اول)، اما ترکیبیات خاص است و به نظر می‌رسد که مجموعه‌ای از پازل‌های نامرتب است که به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند. دلیل این تفاوت این است که مباحث ترکیبیاتی، گستردگی بسیار زیادی دارد و تفکر ترکیبیاتی به تمامی شاخه‌های ریاضیات کشیده شده است.

1-1 ترکیبیات چیست؟

ترکیبیات را می‌توان هنر تنظیم اشیا براساس قوانین مشخص دانست. به عبارت دیگر ترکیبیات علم مطالعه بر روی آرایش‌های مختلف اعضای یک مجموعه است. بنابراین علم ترکیبیات مرتبط با وجود، شمارش، تجزیه و تحلیل و بهینه‌سازی ساختارهای گسسته متناهی است. مسائل ترکیبیاتی به دو دستهٔ اساسی تقسیم می‌شوند:

وجود یک آرایش: اگر کسی بخواهد اشیا یک مجموعه را تحت شرایط معینی مرتب کند، ممکن است مشاهده کند که چنین آرایشی برای اشیا غیرممکن است. اگر آرایش همیشه غیرممکن باشد، می‌توان این سؤال را مطرح کرد که تحت چه شرایطی می‌توان یک آرایش مطلوب را به دست آورد.

شمارش یا طبقه‌بندی آرایش‌ها: اگر یک آرایش خاص امکان‌پذیر باشد، در این صورت این سؤال مطرح می‌گردد که چند روش مختلف برای رسیدن به آن وجود دارد؛ تعداد روش‌ها را محاسبه و آن‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم.

3 ترکیبیات چیست؟

اگر تعداد آرایش‌ها در یک مسئله خاص کم باشد، می‌توان آرایش‌های مختلف را لیست کرد. اما اگر تعداد آرایش‌ها زیاد باشد، لیست کردن آن‌ها مشکل یا غیرممکن است، لذا باید به دنبال تکنیک‌هایی برای محاسبه تعداد آرایش‌ها بدون لیست کردن آن‌ها باشیم.

بنابراین یک توصیف کلی از ترکیبیات این است که موضوعات ترکیبیاتی، مرتبط با وجود، شمارش و تجزیه و تحلیل ساختارهای گسسته است.

یک راه‌حل از یک مسئله ترکیبیاتی می‌تواند شامل مراحل زیر باشد:

I. تنظیم یک مدل ریاضی برای آن

II. انجام محاسبه برای حالت‌های کوچک

III. استدلال دقیق برای به دست آوردن راه‌حل مسئله

برای حل مسائل شمارش به عنوان نمونه می‌توان از اصل شامل - طرد، لانه کبوتری، تابع مولد، روابط بازگشتی و... استفاده کرد. با این حال هوش و ذکاوت لازم است تا چه روش و فرمولی را برای حل یک مسئله به کار ببریم. بنابراین، تجزیه و تحلیل در حل مسائل ترکیبیاتی، بسیار مهم است.

2-1 معرفی برخی از مسائل ترکیبیاتی

حال به چند نمونه از مسائل ترکیبیاتی می‌پردازیم. سؤالات انتخابی برای نشان دادن ماهیت موضوعات ترکیبیاتی است. برخی از آن‌ها مسائل ساده‌ای هستند اما راه‌حل آن‌ها نیاز به ابتکار و خلاقیت دارد و برخی از آن‌ها مسائل دشواری هستند که راه‌حل آن‌ها یک دستاورد بزرگ در ترکیبیات است.

نمونه اول. مسئله دختران مدرسه کرک من¹: 15 دانش‌آموز دختر در پنج گروه سه نفری، هر روز هفته به پیاده‌روی می‌روند. آیا می‌توان این دانش‌آموزان را هر روز در گروه‌های سه نفری قرار داد، به طوری که هر دو نفر دقیقاً یک‌بار در یک گروه در طول هفته قرار گیرند؟

مسئله فوق توسط کرک من در سال 1847 بیان و حل شده است. به عنوان مثال می‌توان 15 دانش‌آموز را به صورت زیر گروه‌بندی کرد:

1. Kirkman

روز هفتم	روز ششم	روز پنجم	روز چهارم	روز سوم	روز دوم	روز اول
1 11 15	1 6 12	1 8 10	1 9 13	1 5 14	1 4 7	1 2 3
2 6 8	2 9 14	2 11 13	2 7 12	2 4 15	2 5 10	4 5 6
3 7 14	3 10 15	3 5 9	3 4 11	3 8 12	3 6 13	7 8 9
4 9 10	4 8 13	4 12 14	5 8 15	6 9 11	8 11 14	10 11 12
5 12 13	5 7 11	6 7 15	6 10 14	10 7 13	9 12 15	13 14 15

این مسئله را می‌توان به‌طور کلی بیان کرد:

«آیا می‌توان $(6n + 3)$ دانش‌آموز دختر را در $(3n + 1)$ روز در $(2n + 1)$ گروه سه نفری به پیاده‌روی برد، به‌طوری که هر دو نفر دقیقاً یک‌بار در یک گروه قرار گیرند؟»

در سال 1970 نشان‌داده شد که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت v ، $v \equiv 3 \pmod{6}$ (پیمانه 6) مسئله فوق دارای جواب است. یعنی می‌توان v ، $v \equiv 3 \pmod{6}$ (پیمانه 6) دانش‌آموز را در گروه‌های سه نفری به پیاده‌روی برد، به‌طوری که هر دو نفر دقیقاً یک‌بار در یک گروه قرار گیرند.

نمونه دوم. مسئله افسران اوایلر: فرض کنیم 36 افسر از 6 گردان مختلف داریم که هر گردان دارای 6 افسر از درجات مختلف است. آیا می‌توان این 36 افسر را در یک رژه نظامی در 6 ردیف و 6 ستون طوری قرار داد که در هر ردیف و هر ستون، یک افسر از هر گردان و از هر درجه وجود داشته باشد؟

این مسئله در سال 1782 توسط اوایلر مطرح گردید. او معتقد بود که جواب منفی است و چنین آرایشی وجود ندارد ولی اثباتی برای ادعای خود ارائه نداد. این مسئله تا سال 1900 حل‌نشده بود ولی در آن سال یک افسر فرانسوی به نام تاری¹ با بررسی تمام حالت‌های ممکن، آن را حل کرد و نشان داد که ادعای اوایلر درست است و چنین آرایشی وجود ندارد.

مسئله فوق را می‌توان تعمیم داد، فرض کنیم n^2 افسر با شرایط فوق وجود باشند. آیا می‌توان آن‌ها را در n ردیف و n ستون قرار داد، به‌طوری که در هر ردیف و در هر ستون، یک افسر از هر درجه و از هر گردان داشته باشیم. اوایلر حدس زد که جواب مسئله فوق برای هر عدد صحیح مثبت n به‌طوری که $n \equiv 2 \pmod{4}$ (پیمانه 4)، منفی است و

1. Tarry

5 ترکیبیات چیست؟

چنین آرایشی وجود ندارد. اما در سال 1960 سه ریاضیدان به نام‌های پارکر، بوس و شیرخنده¹ ثابت کردند که حدس اوایلر، فقط برای حالت $n=2$ و $n=6$ درست است. به عبارت دیگر، به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، $n \neq 2, 6$ ، چنین آرایشی وجود دارد. طرح این مسئله و حل آن منجر به تعریف مفهوم مهم مربع لاتین و مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد گردید. منظور از مربع لاتین، یک آرایه $n \times n$ روی یک مجموعه n عضوی مانند A است به طوری که هر عضو A دقیقاً یک بار در هر سطر و در هر ستون ظاهر شود. به خاطر اینکه اوایلر در نمایش آن از حروف لاتین استفاده کرده بود، این ساختار به مربع لاتین مشهور شد. در فصل 4 به طور مفصل در مورد مربع لاتین و کاربردهای آن بحث خواهیم کرد.

نمونه سوم. مربع جادویی: یکی از قدیمی‌ترین سرگرمی‌های ریاضی، مربع جادویی است. یک مربع جادویی از مرتبه n ، یک آرایه $n \times n$ است که با اعداد $1, 2, \dots, n^2$ ساخته می‌شود، به طوری که حاصل جمع اعداد روی هر سطر، روی هر ستون و هر دو قطر آن برابر با عدد S باشد. عدد S را جمع جادویی مربع می‌نامیم. به عنوان مثال، یک مربع جادویی از مرتبه 3 و 4 در زیر آمده است.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$$S = 15$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$S = 34$$

جمع همه اعداد مربع جادویی از مرتبه n با استفاده از فرمول تصاعد حسابی برابر است با:

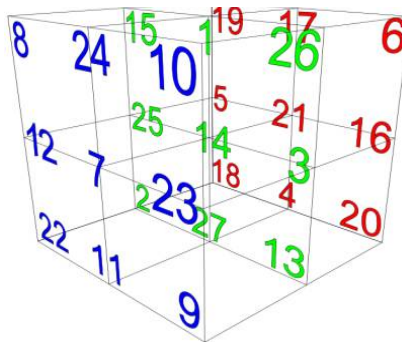
$$1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

چون یک مربع جادویی از مرتبه n دارای n سطر (یا n ستون) با جمع جادویی

S است، داریم:

$$nS = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2} \rightarrow S = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

سؤالی که مطرح می‌شود این است که به‌ازای چه مقادیری از n ، یک مربع جادویی از مرتبه n وجود دارد و یک راه‌حل عمومی برای ساختن آن بیابیم. می‌توان مسئله مربع جادویی را به مکعب جادویی تعمیم داد. به‌طور مشابه منظور از یک مکعب جادویی از مرتبه n ، یک آرایه $n \times n \times n$ روی اعداد صحیح $1, 2, \dots, n^3$ است به‌طوری که حاصل جمع اعداد روی هر سطر، هر ستون، هر پایه و هر چهار قطر فضایی آن با هم برابر باشد. واضح است که در این حالت، $S = \frac{1}{2}n(n^3 + 1)$ است. می‌توان این سؤال را مطرح کرد که به‌ازای چه مقداری از n ، یک مکعب جادویی وجود دارد؟ در صورت وجود، یک روش برای ساختن آن ارائه دهیم. در شکل 1-1، یک مکعب جادویی از مرتبه 3 نشان داده شده‌است. در این مکعب جادویی، $S = 42$ و 4 قطر فضایی آن، مجموعه‌های $\{10, 14, 18\}$ ، $\{8, 14, 20\}$ ، $\{22, 14, 6\}$ و $\{9, 14, 19\}$ هستند.



شکل 1-1. مکعب جادویی

نمونه چهارم. سودوکو: پازل سودوکو ریشه در چین باستان دارد. این پازل از سال 1986 توسط یک کمپانی ژاپنی با نام سودوکو معرفی گردید و از سال 2005 شهرت جهانی یافت به‌طوری که حتی در صفحات سرگرمی روزنامه‌ها نیز گنجانده شد. در سال‌های اخیر، میزان محبوبیت آن به حدی افزایش پیدا کرده که نرم‌افزار این بازی برای تلفن همراه نیز رایج گردیده است.

نوع متداول سودوکو یک جدول 9×9 است که به 9 قسمت 3×3 افراز شده‌است. باید اعداد 1 تا 9 را در خانه‌های جدول‌های کوچک 3×3 بدون تکرار قرار

7 ترکیبیات چیست؟

دهیم به طوری که در هر سطر و ستون جدول 9×9 هیچ عددی تکراری نباشد. در هر پازل سودوکو، تعدادی از خانه‌های جدول از قبل مشخص می‌شوند. سطح دشواری یک پازل سودوکو و طرز حل آن بستگی به تعداد خانه‌های خالی و منطق مورد نیاز برای تعیین نحوه پرکردن خانه‌های خالی دارد. به زبان ریاضی، در هر پازل سودوکو تعدادی از درایه‌های یک مربع 9×9 داده شده‌است و باید آن را به گونه‌ای منحصر به فرد و منطقی، به یک مربع لاتین 9×9 کامل کرد با این شرط اضافی که در هر 9 زیرمربع 3×3 آن، همه اعداد از 1 تا 9 وجود داشته باشند. در شکل 1-2، یک سودوکو 9×9 نشان داده شده‌است. اعدادی که زیر آن‌ها خط کشیده شده‌است، از قبل مشخص بوده‌اند.

5	3	<u>4</u>	<u>6</u>	7	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>1</u>	<u>2</u>
6	<u>7</u>	<u>2</u>	1	9	5	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>8</u>
<u>1</u>	9	8	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>2</u>	<u>5</u>	6	<u>7</u>
8	<u>5</u>	<u>9</u>	<u>7</u>	6	1	<u>4</u>	<u>2</u>	3
4	<u>2</u>	<u>6</u>	8	<u>5</u>	3	<u>7</u>	<u>9</u>	1
7	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>9</u>	2	<u>4</u>	<u>8</u>	<u>5</u>	6
<u>9</u>	6	<u>1</u>	<u>5</u>	<u>3</u>	<u>7</u>	2	8	<u>4</u>
<u>2</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	4	1	9	<u>6</u>	<u>3</u>	5
<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>2</u>	8	<u>6</u>	<u>1</u>	7	9

شکل 1-2. جدول سودوکو

می‌توان پازل سودوکو را به این صورت تعمیم داد که یک آرایه $n \times n$ را به n ناحیه که هر ناحیه دارای n خانه است افراز نمود به طوری که اعداد $1, 2, \dots, n$ در هر سطر، هر ستون و هر ناحیه، یکبار ظاهر شوند. در شکل 1-3، یک مثال از این نوع سودوکو نشان داده شده‌است.

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

شکل 1-3. جدول سودوکو

نمونه پنجم. بازی نیم¹: در ابتدا اشاره کردیم که ریشه بسیاری از مسائل ترکیبیاتی، در سرگرمی‌ها و بازی‌ها بوده است. نیم، یک بازی استراتژیکی ریاضی است که با دو بازیکن و کپه‌هایی از سنگ‌ریزه یا چوب کبریت انجام می‌شود. در این بازی، هر بازیکن در نوبت خود از یک کپه، حداقل یک سنگ‌ریزه برمی‌دارد، (بازیکن حتی می‌تواند تمام سنگ‌ریزه‌های یک کپه را بردارد). بازیکنی که آخرین سنگ‌ریزه را بردارد برنده بازی است. گفته شده است که این بازی در چین ابداع شده است و در قرن 16، اروپاییان با این بازی آشنا شده‌اند. نام کنونی این بازی در سال 1901 توسط بوتون² ابداع شده است. شاید نام این بازی از کلمه آلمانی "nim" به معنای «برداشتن» گرفته شده باشد.

فرض کنیم $k (k \geq 1)$ کپه از سنگ‌ریزه‌ها داشته باشیم که هر کدام از کپه‌ها به ترتیب شامل $n_k, \dots, n_2, n_1$ سنگ‌ریزه باشند. متغیرهای این بازی، k تعداد کپه‌ها و $n_k, \dots, n_2, n_1$ تعداد سنگ‌ریزه‌ها در هر کپه است. مسئله ترکیبیاتی این است که کدام یک از بازیکنان برنده می‌شود و چگونه می‌توان یک استراتژی برنده معرفی کرد. به عبارت دیگر راه‌حلی ارائه کرد که بازیکن چگونه حرکت کند تا پیروزی او در بازی قطعی باشد. اگر تعداد کپه‌ها کم باشد، به راحتی می‌توان مسئله را حل نمود. اگر در ابتدا فقط یک کپه داشته باشیم واضح است که بازیکن اول با برداشتن تمام سنگ‌ریزه‌های آن، برنده بازی است. اگر دو کپه به ترتیب با n_1 و n_2 سنگ‌ریزه داشته باشیم، برنده شدن بازیکن‌ها به مقدار n_1 و n_2 وابسته نیست؛ ولی به این وابسته است که آیا $n_1 = n_2$ ، یا خیر؟

1. Nim

2. Boutan

اگر $n_1 = n_2$ ، در این صورت بازیکن دوم با تقلید کردن حرکات بازیکن اول می‌تواند مطمئن باشد که برنده خواهد شد. اگر $n_1 > n_2$ ، بازیکن اول با برداشتن مقدار اضافی کپه اول می‌تواند اندازه دو کپه را برابر کند و این‌بار بازیکن اول می‌تواند با تقلید از حرکات بازیکن دوم، مطمئن باشد که برنده بازی خواهد بود. بنابراین بازی نیم با دو کپه کاملاً حل می‌شود. اما با افزایش تعداد کپه‌ها، بررسی این موضوع و ارائه یک استراتژیک برنده، پیچیده می‌شود و باید آن را به صورت یک مسئله ریاضی حل کرد.

نمونه ششم. بازی رمزی: فرض کنید در یک شبکه اجتماعی در یک گروه 100 نفری عضو هستید. می‌توانید در آن گروه پیغامی به شرح زیر بگذارید: «من شرط می‌بندم اگر 25 نفر از اعضای گروه را به طور دلخواه انتخاب کنیم، در بین آن‌ها می‌توان چهار نفر را یافت که دوه‌دو دوست باشند یا می‌توان 5 نفر را یافت که دوه‌دو آشنا نباشند.»

مطمئن باشید که شرط را خواهید برد! دلیل آن را در فصل 8، خواهیم دید. فرض کنیم دو بازیکن و یک قطعه کاغذ و دو مداد رنگی آبی و قرمز داریم. 6 نقطه روی کاغذ انتخاب می‌کنیم به طوری که هیچ سه‌تایی از آن‌ها روی یک خط نباشند. به هر کدام از بازیکنان، یک مداد می‌دهیم و می‌خواهیم به نوبت دو نقطه را انتخاب کرده و به هم وصل کنند. بازیکنی که یک مثلث با اضلاع هم رنگ ایجاد کند برنده است. آیا همیشه چنین بازی دارای برنده است؟

مسئله فوق را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد: نشان دهید که در یک مهمانی، هر 6 نفری که انتخاب کنیم حداقل 3 نفر وجود دارند که با یکدیگر آشنا هستند و یا حداقل 3 نفر وجود دارند که یکدیگر را نمی‌شناسند.

این مسئله را می‌توان به زبان گرافی نیز بیان کرد: اگر یال‌های گراف K_6 را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کنیم، نشان دهید که همواره می‌توان در آن یک K_3 (مثلث) با اضلاع قرمز یا یک K_3 با اضلاع آبی پیدا کرد. با استفاده از اصل لانه کبوتری نشان می‌دهیم که مسئله فوق همواره دارای جواب است و اگر بازی فوق را انجام دهیم همیشه یک برنده وجود خواهد داشت.