



دانشگاه سیام نور
پی

جبر ۱

(رشته ریاضی)

محمد رضا فلکی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و کمک‌درسی (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

پیشگفتار.....	هفت
فصل اول: عمل‌های دوتایی.....	۱
فصل دوم: گروه‌ها.....	۱۱
فصل سوم: قضایای بنیادی گروه‌ها.....	۲۷
فصل چهارم: رتبه هر عنصر و گروه‌های دوری.....	۴۱
فصل پنجم: زیر گروه‌ها.....	۶۱
فصل ششم: حاصلضرب‌های مستقیم.....	۸۳
فصل هفتم: توابع.....	۹۱
فصل هشتم: گروه‌های متقارن.....	۱۰۳
فصل نهم: هم مجموعه‌ها و قضیه لاگرانژ.....	۱۲۳
فصل دهم: زیرگروه‌های نرمال و گروه‌های خارج قسمتی.....	۱۳۹
فصل یازدهم: همسانی.....	۱۵۵
فصل دوازدهم: همسانی‌ها و زیرگروه‌های نرمال.....	۱۷۵
فصل سیزدهم: رابطه بین حاصل ضرب‌های داخلی و خارجی.....	۱۹۵
فصل چهاردهم: حلقه‌ها.....	۲۰۷
فصل پانزدهم: زیرحلقه‌ها و ایده‌آل‌ها.....	۲۲۵
فصل شانزدهم: همسانی‌های حلقه.....	۲۴۵
مراجع.....	۲۷۱

پیشگفتار مؤلف

کتاب حاضر نتیجه سالها تجربه تدریس جبر در سیستم پیام نور است. از آنجا که درک مفاهیم مجرد نسبت به مفاهیم کاربردی کمی مشکل تر است و بخصوص در دانشگاه پیام نور بار سنگین دروس ریاضی بر روی دانشجو متمرکز است سعی شده است تا حد امکان کتاب در قالب یک کتاب خودخوان عرضه شود. تقریباً تمام مفاهیمی که در جبر ۱ بحث می شود در کتاب جمع آوری شده است. بعضی از مطالب مهم به دلیل آنکه دانشجو از روند موضوع مورد بحث خارج نشود و یا جزییات باعث کسالت آوری درس نگردد در قسمت مسائل به آن پرداخته شده است، همچون مفهوم مهم زیرگروه تعویض گر در فصل ده. تشخیص آنکه چه موضوعاتی از درس باید در متن قرار گیرد و چه موضوعاتی در حاشیه آن مورد اختلاف اغلب نویسندگان جبر و دروس دیگر است. مسلماً اهمیت مطالبی که در حاشیه می آیند توسط مدرس برای دانشجو مشخص می شود. موضوعاتی از قبیل توابع، رابطه های هم ارزی و مطالبی در نظریه اعداد گر چه جزء رئوس درس جبر نمی باشند ولی ارائه آنها در متن درس و یا اختصاص فصلی جدا برای توابع، گویای اهمیت آنها بعنوان ابزاری برای درک عمیق این کتاب می باشد. تقریباً تمام مسائلی که فکر می کردم ممکن است احتیاج به راهنمایی برای حل آنها باشد در آخر کتاب نه به صورت کامل بلکه تا حدی که دانشجو را ترغیب به اثبات کامل

مسئله کند آورده شده است. در موارد بسیاری در سراسر کتاب صحبت از اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی و اعداد مختلط شده است که به ترتیب به وسیله نمادهای خطدار $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نمایش داده شده‌اند و مراجعی که از آنها استفاده شده است در آخر کتاب معرفی شده‌اند. در انتها از استاد ارجمند آقای دکتر بیژن‌زاده که با ویراستاری کتاب (علیرغم ضیق وقت) بر وزن آن افزودند صمیمانه تشکر می‌کنم.

محمد رضا فلکی

فصل اول

عمل‌های دوتایی

مقدمه

در دروس جبر دبیرستانی برای حل معادلاتی که شامل اعداد حقیقی یا موهومی بودند وقت زیادی صرف کردیم. در بطن این دروس آن چه واقعاً انجام می‌دادیم پاسخ به سوالاتی درباره جمع و ضرب این اعداد بود.

در جبر مجرد نگرش کلی‌تری را دنبال می‌کنیم و جمع و ضرب را فقط روش‌هایی می‌پنداریم که با تبعیت از قوانین خاصی، از دو عنصر مفروض عنصر سوم را بدست می‌دهند. در این جا موردی را مطالعه می‌کنیم که در آن یک مجموعه و تعدادی (عمل) داریم و می‌خواهیم بر اساس قواعد معینی، از داده‌های مفروضی در این مجموعه، نتایجی بدست آوریم که باز هم در همان مجموعه باشد.

با این توصیف احتمال دارد که شما پرداختن به جبر مجرد را مانند شمردن دانه‌های شن یک ساحل، کاری بیهوده تلقی کنید، در حالی که جبر مجرد به چند دلیل بسیار مفید است. نخست این که در جبر مجرد با کنار گذاشتن جنبه‌های نامربوط رویدادها، دیدگاهی شفاف نسبت به موارد آشنا بدست می‌آوریم. دلیل دوم این است که در جبر مجرد دستگاه‌های جدیدی را در نظر می‌گیریم که با ارزش هستند؛ زیرا که در پرتو آن‌ها می‌توانیم مسائل قدیمی را حل کنیم. به علاوه با اتخاذ رهیافتی کلی که در آن چند مورد مشخص را یک جا در نظر می‌گیریم می‌توانیم از اتلاف وقت جلوگیری کنیم و سرانجام این که جبر مجرد به تنهایی زیباست هر چند پی بردن به این زیبایی وقت زیادی می‌طلبد.

هدف کلی:

در این فصل دانشجویان با تعریف عمل دوتائی روی یک مجموعه مانند S آشنا می‌شوند و اگر چه این عمل در واقع تابعی از $S \times S$ به S می‌باشد یعنی $S \times S \rightarrow S$ ولی به جای نوشتن $(s_1, s_2) = s_3$ ، ما از عبارت $s_1 * s_2 = s_3$ استفاده کرده و آن را در سراسر کتاب به همین صورت به کار خواهیم برد.

هدف‌های آموزشی:

دانشجویان پس از خواندن این فصل:

۱- تعریف عمل دوتائی را به عنوان یک تابع که به نوبه خود یک مجموعه است درک کرده و همیشه به جای عبارت‌هایی از نوع $((x, y), z) \in *$ و یا $(x, y) = z$ از عبارت $x * y = z$ استفاده می‌کنیم.

۲- دانشجو همیشه می‌تواند در مواقعی که فهم عمل دوتائی مورد بحث کمی پیچیده می‌شود آن را با اعمال دوتائی جمع و ضرب اعداد مقایسه کند و مواظب باشد که از عمل دوتائی مورد بحث لزوماً انتظار خاصیت جابجائی یا شرکت‌پذیری نداشته باشد.

تعریف عمل دوتائی:

اگر مجموعه‌ای مانند S داشته باشیم، عمل دوتائی $*$ روی S ، تابعی است که به هر زوج مرتب (s_1, s_2) از اعضای S عنصری از S نسبت می‌دهد که آن را با $s_1 * s_2$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه کنید که در این تعریف از زوج مرتب صحبت کردیم. بنابراین (s_1, s_2) الزاماً با (s_2, s_1) و $s_1 * s_2$ الزاماً با $s_2 * s_1$ یکی نیست. توجه کنید که $*$ باید به هر زوج مرتب، عنصری از S را نسبت دهد از جمله زوج‌هایی مانند (s_2, s_1) که s_1 و s_2 با هم برابرند.

مثال‌ها

۱- جمع، یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}^+$ است و $a * b = a + b$. تفاضل $(a * b = a - b)$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}^+$ نیست؛ ولی یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}$ هست.

۲- ضرب $(a * b = a \cdot b)$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}^+$ یا $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}$ و یا $\mathbb{Q}$ است. تقسیم $(a * b = \frac{a}{b})$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Q}^+$ و یا $\mathbb{R}^+$ است. ولی یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}^+$ ، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{Q}$ نیست. (چرا؟)

۳- $a * b = a^3 + b^2 + 1$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Z}^+$ ، $\mathbb{Q}^+$ یا $\mathbb{R}^+$ است.

۴- فرض کنید مجموعه‌ای مانند X داریم و S مجموعه تمام زیر مجموعه‌های X است. برای مثال اگر $X = \{1\}$ آنگاه $S = \{\emptyset, \{1\}\}$ ، و اگر $X = \{1, 2\}$ آنگاه

$$S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

عمل اشتراک یک عمل دوتایی روی مجموعه S است زیرا اگر A ، B اعضای S باشند، آنگاه $A * B = A \cap B$ نیز عضوی از S است. به همین نحو اجتماع نیز یک عمل دوتایی دیگر روی S است.

۵- فرض کنید S مجموعه تمام ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های اعداد حقیقی باشد. بنابراین هر عضو از S باید بشکل $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ را حاصلضرب ماتریس‌های x و y تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

آنگاه * یک عمل دوتائی روی S است. برای مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 3 & \pi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 3-\pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تعریف یک عمل دوتائی محدودیتی را روی * تحمیل نمی‌کند و به طور کلی یک عمل دوتائی می‌تواند رفتاری غیرطبیعی داشته باشد. معمولاً ما خواستار آنیم که عمل‌های دوتائی‌ای را در نظر بگیریم که حداقل خواص مشترکی با مثال‌های آشنا و استاندارد ما داشته باشند.

تعریف اگر * یک عمل دوتائی روی مجموعه S باشد آنگاه * را **جابجائی** می‌گوئیم اگر به ازای هر s_1, s_2 در S داشته باشیم $s_1 * s_2 = s_2 * s_1$. از سوی دیگر * **شرکت‌پذیر** گفته می‌شود اگر به ازای هر $s_1, s_2, s_3 \in S$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$(s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3)$$

مثال‌ها

۱- تفریق روی $\mathbb{Z}$ نه جابجائی است و نه شرکت‌پذیر. برای مثال

$$1-2 \neq 2-1 \text{ و } (1-2)-3 \neq 1-(2-3)$$

۲- فرض کنید عمل دوتائی * روی $\mathbb{Z}$ بصورت $a * b = 2(a+b)$ تعریف شود در این صورت بدیهی است که * جابجائی است. حال

$$(a * b) * c = 2(a+b) * c = 2(2(a+b)+c) = 4a + 4b + 2c$$

و

$$a * (b * c) = a * 2(b+c) = 2(a+2(b+c)) = 2a + 4b + 4c$$

چون نتایج حاصل همیشه برابر یکدیگر نیستند پس * شرکت‌پذیر نیست.

۳- فرض کنید $a * b = {}^2ab$ یک عمل دوتائی روی $\mathbb{Z}$ باشد. جابجائی این عمل دوتائی واضح است و چون داریم:

$$(a * b) * c = {}^2ab * c = {}^2({}^2ab \cdot c) = {}^4abc \quad \text{و} \quad a * (b * c) = a * {}^2bc = {}^2(a \cdot {}^2bc) = {}^4abc$$

پس $*$ شرکت‌پذیر نیز است.

۴- ضرب ماتریس‌های 2×2 شرکت‌پذیر است:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \left[\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right]$$

که می‌توان با ضرب این ماتریس‌ها به ترتیبی که در بالا آمده است تساوی فوق را تحقیق کرد. با این حال این عمل جابجائی نیست. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ولی} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

قبل از این که مثال‌های پیچیده‌تری را بررسی کنیم توجه کنید که چهار مثال بالا رابطه‌ای ما بین شرکت‌پذیری و جابجائی را ذکر می‌کنند و آن این است که هیچ رابطه‌ای بین این دو وجود ندارد. یک عمل دوتائی می‌تواند جابجائی باشد؛ خواه شرکت‌پذیر باشد، خواه نه و می‌تواند غیر جابجائی باشد، خواه شرکت‌پذیر باشد، خواه نه.

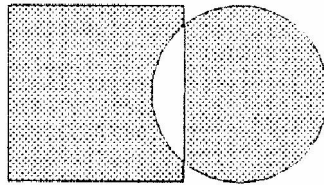
۵- در این جا عمل دیگری را روی مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم. اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه $A \Delta B$ را **تفاضل متقارن** A و B می‌نامیم. این مجموعه طبق تعریف عبارتست از مجموعه تمام عناصری که به A و B متعلق هستند ولی نه به هر دوی آنها. بنابراین

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

که در آن $A - B$ مجموعه‌ای شامل آن دسته از عناصر A است که در B نیستند و $B - A$ مجموعه‌ای شامل تمام عناصری از B است که در A نیستند. همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

در شکل ۱-۱ اگر A مجموعه تمام نقاط داخل مربع و B مجموعه تمام نقاط داخل دایره باشد آنگاه $A \Delta B$ شامل نقاط ناحیه هاشورزده خواهد بود.



شکل ۱-۱

برای مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ آنگاه $A \Delta B = \{1, 3, 5, 6\}$ ، و اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 0\}$ آنگاه

$$A \Delta B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \neq 0\}$$

همچنین به ازای هر مجموعه A داریم $A \Delta A = \emptyset$ و $A \Delta \emptyset = A$. حال فرض کنید X یک مجموعه و S مجموعه تمام زیر مجموعه‌های X باشد. در این صورت $A * B = A \Delta B$ یک عمل دوتائی را روی S تعریف می‌کند. بوضوح دیده می‌شود که عمل Δ جابجائی است. ادعا می‌کنیم که Δ یک عمل شرکت‌پذیر روی S است؛ یعنی اگر C, B, A زیر مجموعه‌های X باشند آنگاه

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

برای اثبات معادله فوق باید نشان دهیم که هر طرف معادله فوق، زیر مجموعه طرف

دیگر است. فرض کنید $x \in (A \Delta B) \Delta C$ و نشان می‌دهیم که $x \in A \Delta (B \Delta C)$.

از آنجا که $x \in (A \Delta B) \Delta C$ ، یکی از دو حالت زیر برقرار است:

حالت I. $x \in (A \Delta B)$ و $x \notin C$ ، یا

حالت II. $x \notin (A \Delta B)$ و $x \in C$.

در حالت اول $x \in (A \Delta B)$ ایجاب می‌کند که $x \in A$ و $x \notin B$ یا $x \notin A$ و $x \in B$. اگر اولی برقرار باشد، آنگاه داریم $x \in A$ و $x \notin B$ و $x \notin C$ و در نتیجه $x \in A$ و $x \notin (B \Delta C)$ که به معنای این است که $x \in A \Delta (B \Delta C)$. اگر دومی برقرار باشد آنگاه $x \notin A$ و $x \in B$ و $x \notin C$ و در نتیجه $x \notin A$ و $x \in (B \Delta C)$ که به معنای این است که $x \in A \Delta (B \Delta C)$. در حالت II، $x \notin (A \Delta B)$ ایجاب می‌کند که $x \in A$ و $x \in B$ یا $x \notin A$ و $x \notin B$. اگر اولی برقرار باشد آنگاه خواهیم داشت $x \in A$ و $x \in B$ و $x \in C$ و در نتیجه $x \in A$ و $x \in (B \Delta C)$ و این به معنای آن است که $x \in A \Delta (B \Delta C)$. اگر دومی برقرار باشد آنگاه $x \notin A$ و $x \notin B$ و $x \in C$ به عبارت دیگر $x \notin A$ و $x \in (B \Delta C)$ و بنابراین $x \in A \Delta (B \Delta C)$.

بدین ترتیب اثبات $(A \Delta B) \Delta C \subseteq A \Delta (B \Delta C)$ کامل می‌شود. اثبات عکس این قضیه بعهدہ دانشجو است.

۶- A را یک مجموعه و S را مجموعه توابع از A به A در نظر بگیرید. در این صورت عمل ترکیب توابع یک عمل دوتائی روی S می‌باشد. مجموعه S را معمولاً با A_A نمایش می‌دهند و با توجه به شناختی که از خواص ترکیب توابع داریم بسادگی می‌توانیم ثابت کنیم این عمل شرکت‌پذیر و در حالت کلی غیرجابجائی است.

۷- عمل $*$ را روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x * y = x + y - xy$$

این عمل شرکت‌پذیر و جابجائی است زیرا

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y - xy + z - (x + y - xy)z$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + y + z - yz - x(y + z - yz)$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد که دو عبارت بالا برابرند و از آن جا که

$$x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$$

پس این عمل جابجائی است.

۸- عمل ضرب خارجی روی بردارهای فضای سه بعدی یک عمل دوتائی است. در ریاضیات عمومی خوانده‌اید که این عمل نه شرکت‌پذیر و نه جابجائی است. قبل از این که مبحث عمل‌های دوتائی را تمام کنیم شاید بهتر باشد که در وهله اول روشن سازیم که چه نیازی به آن داریم. همگی ما با خاصیت جابجائی و شرکت‌پذیری جمع و ضرب روی اعداد صحیح گویا و اعداد حقیقی آشنا هستیم و آن‌ها را دانسته فرض می‌کنیم. هیچ وقت اتفاق نیافتاده است که در مورد آن‌ها برایمان سوالی ایجاد شود. نکته این جاست که هر چه قدر حوزه دیدمان را وسعت بخشیده و سیستم‌های ناآشناتری را بررسی کنیم، به موارد زیادی بر می‌خوریم که در آن‌ها خواص جابجائی و شرکت‌پذیری برقرار نیستند. در این صورت باید برای کار با این سیستم‌ها کمی دقت داشته باشیم؛ فقط در صورتی می‌توانیم در محاسباتمان از خواص جابجائی و شرکت‌پذیری استفاده کنیم که از قبل مطمئن باشیم که این خواص در سیستمی که در آن کار می‌کنیم برقرار است. محاسبات مربوط به اعداد صحیح ساده می‌باشند زیرا هر موقع که بخواهیم می‌توانیم xy را با yx جایگزین کنیم و هرگز نباید نگران باشیم که آیا $(x + y) + z$ همان $x + (y + z)$ هست یا نه. ولی به طور کلی، همیشه آن قدر خوش‌شانس نیستیم و حتماً باید در مورد درستی اینگونه سوالات نگران باشیم.

تمرینات

۱-۱ کدامیک از عمل‌های زیر یک عمل دوتایی روی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است؟

(الف) $a * b = a + b$

(ب) $a * b = a - b$

(ج) $a * b = a + b - ab$

۲-۱ روی یک مجموعه ۳ عضوی چند عمل دوتائی می‌توان تعریف کرد؟

۳-۱ نشان دهید عمل زیر روی مجموعه اعداد حقیقی هم جابجائی و هم شرکت‌پذیر است؟

$$a * b = \min\{a, b\}$$

۴-۱ روی مجموعه اعداد صحیح، عمل دوتائی تعریف کنید که

(۱) جابجائی و شرکت‌پذیر باشد.

(۲) جابجائی باشد ولی شرکت‌پذیر نباشد.

(۳) نه جابجائی و نه شرکت‌پذیر باشد.

۵-۱ عمل دوتائی شرکت‌پذیر و جابجائی $*$ را روی اعداد صحیح مثال بزنید که در $\mathbb{Z}$

عددی صحیح مانند x وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر $y \in \mathbb{Z}$ ، $x * y = y$ و لزوماً $y * x = y$ صحیح نباشد.

فصل دوم

گروه‌ها

مقدمه

چنانچه قبلاً گفتیم در جبر، انواع مختلف سیستم‌های مجرد را مطالعه می‌کنیم. یکی از بنیادی‌ترین انواع این سیستم‌ها گروه نام دارد. در این فصل با مفهوم گروه آشنا خواهیم شد.

بدون تردید یکی از جذاب‌ترین ویژگی‌های ریاضیات جدید، تداخلی است که بین شاخه‌های مختلف ریاضیات پیش می‌آید. برای مثال اگر جبر، آنالیز، توپولوژی و یا منطق ریاضی را مطالعه کنیم، مشاهده می‌کنیم که ایده‌های خاصی در تمام این شاخه‌ها مطرح می‌شوند. مفهوم گروه یکی از همین ایده‌هاست که همه جا ظاهر می‌شود. به علاوه در رشته‌های دیگری از علوم، مانند شیمی، مکانیک کوانتوم و فیزیک ذرات بنیادی، که در آنها ریاضیات به عنوان ابزار به کار می‌رود، گروه‌ها اهمیت دارند.

هدف کلی:

در این فصل دانشجو باید ساختار گروه را بشناسد و با الگو گرفتن از اعداد صحیح تحت عمل جمع، با گروه‌هایی آشنا شود که عمل دوتائی‌شان نسبت به جمع معمولی اعداد ناآشنا تر است.

هدف‌های آموزشی:

در این فصل می‌خواهیم تا حد ممکن مجموعه‌هائی را که تحت اعمال آشنا (مثلاً ضرب، جمع و ترکیب توابع) می‌شناختیم بصورت کلی‌تر و به ازای مجموعه‌هایی که کمتر با آن‌ها کار کرده‌ایم و اعمال دوتائی که کمتر با آن‌ها آشنا بوده‌ایم مورد بررسی قرار دهیم خواص مشترکی را که بسیاری از مجموعه‌ها تحت یک عمل دوتائی با یکدیگر دارند در نظر گرفته و به آن نام گروه می‌دهیم و در مورد $\mathbb{Z}$ تحت عمل جمع مشاهده می‌کنیم که بعضی از مفاهیم مانند خاصیت عدد صفر، یا وجود قرینه هر عدد نسبت به جمع و همچنین شرکت‌پذیری و یا خاصیت جابجائی جمع جزء خواص جبری $\mathbb{Z}$ و مفاهیمی نظیر مثبت و منفی بودن، عاد کردن، بزرگتر یا کوچکتر بودن، خاص خود $\mathbb{Z}$ می‌باشد و به خواص جبری آن بستگی ندارد.

تعریف فرض کنید که

(i) G عبارتست از یک مجموعه و $*$ یک عمل دوتائی روی G است،

(ii) $*$ شرکت‌پذیر است،

(iii) عضوی مانند e در G وجود دارد به طوریکه به ازای هر x در G داریم

$$x * e = e * x = x \text{ و}$$

(iv) به ازای هر عضو x در G ، عضوی مانند y در G وجود دارد به طوریکه

$$x * y = y * x = e.$$

در اینصورت G همراه با عمل دوتائی $*$ گروه نامیده می‌شود و آن را با $(G, *)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که (iii) نتیجه می‌دهد که G غیر تهی است. عضو e در G عضو همانی نام دارد (دیری نخواهد پائید که نشان خواهیم داد فقط یک عضو با چنین خاصیتی وجود دارد و در نتیجه خواهیم توانست آن را عضو همانی بنامیم). عضو y در (iv) معکوس x نام دارد؛ خواهیم دید که هر عضوی مانند x فقط یک معکوس دارد، و از این رو می‌توانیم آن را معکوس x بنامیم. در اینجا شایسته است بر این واقعیت تاکید کنیم که عضو منحصر به فرد همانی e معادلات $x * e = e * x = x$ را به ازای هر x در

G ارضاء می‌کند، حال آن که y در (iv) به x بستگی دارد. خواهیم دید که دو عضو متمایز G هیچ وقت نمی‌توانند معکوس‌های برابری داشته باشند و در نتیجه اعضای متفاوت x ، معکوس‌های متفاوتی همچون y خواهند داشت.

همچنین مناسب است تاکید کنیم فرض ما این نیست که $*$ یک عمل جابجائی است. گروه‌هایی که عمل آن‌ها جابجائی است گروه‌های آبدلی نام دارند. این نامگذاری به افتخار ریاضیدان نروژی نیل آبل (۱۸۲۹-۱۸۰۲) صورت گرفته است.

قبل از این که خواص عمومی گروه‌ها را بررسی کنیم تعدادی مثال را مطرح می‌کنیم تا بتوانیم کلیت این مفهوم را در ذهن خواننده روشن کنیم. البته از لحاظ تاریخی بعضی از مثال‌ها قبل از این که گروه به صورت مجرد تعریف شود وجود داشته‌اند؛ مفهوم مجرد گروه زمانی شکل گرفت که مردم متوجه شدند بسیاری از موضوعاتی که مطالعه می‌کردند دارای مشخصه‌های ساختاری مشترک هستند و این فکر در آن‌ها قوت گرفت که شاید بتوان با مطالعه مجرد این ویژگی‌های مشترک (نه هر کدام بصورت تک تک و جداگانه) به نوعی صرفه‌جویی در وقت و تلاش دست یافت. در تحلیل پیشرفت‌های این موضوع ای. تی. بل یادآور شده است که هر زمان گروه‌ها خود را ظاهر می‌سازند و یامی‌توان آن‌ها را معرفی کرد، سادگی و وضوح از لابلائی به هم ریختگی‌ها درخشش می‌یابد.

مثال‌ها

مثال‌ها را با یکی از آشناترین آن‌ها شروع می‌کنیم.

۱- $(\mathbb{Z}, +)$: عضو همانی و $-x$ عضو معکوس x است:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

همگی ما با این خاصیت که $+$ عملگر دوتایی شرکت‌پذیر روی $\mathbb{Z}$ است آشنا هستیم.

به همین نحو $(\mathbb{Q}, +)$ و $(\mathbb{R}, +)$ گروه هستند.

۲- $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$: ضرب یک عمل دوتائی شرکت‌پذیر روی $\mathbb{Q}^+$ است، ۱ عضو همانی و $1/x$ عضو معکوس x در $\mathbb{Q}^+$ است زیرا $x \cdot (1/x) = (1/x) \cdot x = 1$.

به همین نحو $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ نیز یک گروه است. با این وجود مشاهده می‌کنیم که $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ یک گروه نیست، چون هیچ عنصری به غیر از ۱ در $\mathbb{Z}^+$ دارای معکوس نیست. $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ و $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ گروه هستند. مجموعه $\mathbb{R}^-$ متشکل از اعداد حقیقی منفی تحت عمل ضرب یک گروه نیست زیرا ضرب روی $\mathbb{R}^-$ یک عمل دوتائی نمی‌باشد.

۳- مجموعه تمام n تائی‌های مرتب از اعداد حقیقی تحت جمع n تائی‌ها که به صورت زیر تعریف می‌شود یک گروه است:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) * (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$(0, 0, \dots, 0)$ عضو همانی و $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ معکوس عضو $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ است. این واقعیت که عمل دوتائی بالا شرکت‌پذیر است از شرکت‌پذیری عمل جمع در اعداد حقیقی نتیجه می‌شود.

اگر فضاهای برداری را مطالعه کرده باشید می‌بینید بطور کلی اعضای هر فضای برداری تحت جمع برداری تشکیل یک گروه می‌دهد.

۴- عمل دوتائی $*$ را که با $a * b = 2(a + b)$ داده شده است روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنیم که $(\mathbb{R}, *)$ به چند دلیل مختلف گروه نیست. اولاً $*$ شرکت‌پذیر نیست. ثانیاً $\mathbb{R}$ تحت این عمل دارای عضو همانی نیست. برای اثبات این مطلب فرض کنید e عضو همانی باشد. در این صورت به ازای هر a خواهیم داشت $a * e = a$ یعنی $2(a + e) = a$. و این رابطه به نوبه خود نتیجه می‌دهد $e = -a/2$ و بوضوح هیچ عددی چون e نمی‌تواند این معادله را برای تمام اعداد در $\mathbb{R}$ ارضاء کند. بنابراین عضو همانی e وجود ندارد.

اگر $\mathbb{R} - \{0\}$ با عمل دوتائی $a * b = 2ab$ را امتحان کنیم می‌بینیم که گروه بدست