



جبر پیشرفته

(کارشناسی ارشد رشته ریاضی)

دکتر احمد خاکساری

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیش‌گفتار مولفان:	نه
فصل اول: مقدمه‌ای بر حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها	۱
هدف کلی و اهداف یادگیری	۱
۱-۱ حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها	۲
۱-۲ گروه‌های آزاد، حاصل ضرب‌های آزاد، مولدها و رابطه‌ها	۳
۱-۳ تمرینات فصل اول	۶
فصل دوم: حلقه‌ها، زیرحلقه‌ها، ایده‌آل‌ها و هم‌ریختی حلقه‌ها	۹
هدف کلی و اهداف یادگیری	۹
۲-۱ تعریف حلقه	۱۰
۲-۲ معرفی تعدادی از حلقه‌های شناخته شده	۱۱
۲-۳ زیرحلقه	۱۹
۲-۴ ساختن دو نمونه حلقه با استفاده از یک خانواده از حلقه‌ها	۲۳
۲-۵ ساختن یک حلقه با استفاده از یک حلقه دیگر	۲۴
۲-۶ ساختن یک حلقه با استفاده از یک مجموعه دلخواه غیرتهی	۲۵
۲-۷ ساختن یک حلقه جدید با استفاده از یک حلقه $\mathbb{R}$ و اعداد صحیح $\mathbb{Z}$	۲۵

۲-۸	ساختن یک زیرحلقه با استفاده از یک زیرمجموعه دلخواه حلقه	۲۶....
۲-۹	مشخصه حلقه	۲۶.....
۲-۱۰	ایده آل ها	۲۸.....
۲-۱۱	ایده آل تولید شده توسط یک زیرمجموعه دلخواه حلقه	۲۹.....
۲-۱۲	پوچ ساز یک زیرمجموعه دلخواه غیرتهی X از حلقه R	۳۴.....
۲-۱۳	جبر ایده آل ها	۳۸.....
۲-۱۴	بخشی از مبانی ریاضی	۳۹.....
۲-۱۵	زیرمجموعه بسته ضربی حلقه	۴۳.....
۲-۱۶	ایده آل های ماکسیمال و مینیمال	۴۶.....
۲-۱۷	ایده آل پوچ و پوچ توان	۵۰.....
۲-۱۸	حلقه خارج قسمتی	۵۲.....
۲-۱۹	ایده آل خارج قسمتی	۵۶.....
۲-۲۰	حلقه موضعی و نیمه موضعی	۶۰.....
۲-۲۱	رادیکال یک ایده آل	۶۲.....
۲-۲۲	همریختی حلقه ها	۶۶.....
۲-۲۳	قضایای اساسی همریختی ها	۷۱.....
۲-۲۴	حلقه درون ریختی	۷۶.....
۲-۲۵	حلقه و میدان کسرها	۷۹.....
۲-۲۶	میدان های اول	۸۲.....
۸۳	تمرینات فصل دوم	
۸۷	فصل سوم: مدول	
۸۷	هدف کلی و اهداف یادگیری	
۳-۱	مجموع و مجموع مستقیم زیرمدول ها	۹۴.....
۳-۲	حاصل ضرب و حاصل جمع زیرمدول ها	۹۷.....
۳-۳	مدول های آزاد	۱۰۰.....
۳-۴	مدول های خارج قسمتی	۱۰۵.....

۳-۵	همریختی مدول‌ها	۱۰۷
۳-۶	قضایای یکریختی مدول‌ها	۱۱۱
۳-۷	زیرمدول‌های ماکسیمال و مینیمال	۱۲۰
۳-۸	مدول‌ها روی دامنه‌های ایده‌آل اصلی	۱۳۳
	تمرین‌های فصل سوم	۱۴۰
	فصل چهارم: شرط‌های زنجیره‌ای در مدول‌ها	۱۴۵
	هدف کلی و اهداف یادگیری	۱۴۵
۴-۱	مدول‌های آرتینی	۱۴۶
۴-۲	مدول‌های نوتری	۱۵۱
۴-۳	مدول‌های با طول متناهی	۱۵۹
۴-۴	حلقه‌های نوتری و آرتینی	۱۶۶
۴-۵	رادیکال جیکوبسن حلقه	۱۷۹
۴-۶	ایده‌آل‌های اول مینیمال	۱۸۵
۴-۷	رادیکال جیکوبسن حلقه‌های آرتینی	۱۸۹
۴-۸	ایده‌آل اولیه	۱۹۳
	تمرین‌های فصل چهارم	۲۱۲
	فصل پنجم: تانسور	۲۱۷
	هدف کلی و اهداف یادگیری	۲۱۷
۵-۱	حاصل ضرب تانسوری	۲۲۱
۵-۲	دنباله‌های دقیق	۲۳۴
	تمرین‌های فصل پنجم	۲۴۰
	فصل ششم: کاربردی از همریختی‌ها و دنباله‌های دقیق	۲۳۹
	هدف کلی و اهداف یادگیری	۲۳۹
۶-۱	بررسی ساختار حلقه‌های درون‌ریختی مدول‌های نیمه ساده	۲۴۵
۶-۲	Hom و دنباله‌های دقیق	۲۵۱
۶-۳	دنباله‌های دقیق کوتاه و شکافته‌شدنی	۲۵۷

۲۶۴.....	۶-۴ تانسور و دنباله‌های دقیق
۲۶۸.....	۶-۵ خاصیت‌های Hom و $\otimes$
۲۸۱.....	تمرین‌های فصل ششم
۲۸۳.....	فصل هفتم: رسته
۲۸۳.....	هدف کلی و اهداف یادگیری
۲۸۸.....	۷-۱ رسته ملموس
۲۹۵.....	۷-۲ تابعگر (فانکتور)
۳۰۱.....	تمرین‌های فصل هفتم
۳۰۳.....	فصل هشتم: مدول‌های خاص
۳۰۳.....	هدف کلی و اهداف یادگیری
۳۰۶.....	۸-۱ مدول‌های پروژکتیو
۳۱۲.....	۸-۲ مدول‌های یکدست
۳۱۶.....	۸-۳ مدول‌های انژکتیو
۳۳۰.....	۸-۴ مدول‌های بخش‌پذیر
۳۳۶.....	۸-۵ پوشش انژکتیو
۳۴۰.....	تمرین‌های فصل هشتم
۳۴۳.....	فصل نهم: حلقه‌های ساده نیمه آریتی، J -نیم ساده و ابتدایی
۳۴۳.....	هدف کلی و اهداف یادگیری
۳۴۷.....	۹-۱ حلقه‌های J -نیم ساده
۳۵۳.....	۹-۲ حلقه‌های ابتدایی
۳۶۳.....	تمرین‌های فصل نهم
۳۶۵.....	حل مسائل برگزیده کتاب
۳۸۷.....	فهرست علائم
۳۸۹.....	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۳۹۷.....	منابع

سایه عمر آدمی یک نفس است
آن نفس از برای یک هم نفس است
با هم نفسی گر نفسی بنشینی
مجموع حیات عمر آن یک نفس است
(سعید ابوالخیر)

پیش گفتار

از آن جا که ادامه تحصیل در گرایش های وابسته به جبر جابه جایی، جبر ناجابه جایی، جبر همولوژی، نظریه رسته ها، ... نیاز به آشنایی کامل با ساختارهای جبری (حلقه و مدول) دارد و با توجه به محدودیت دسترسی دانشجویان ریاضی به منابع گوناگون، مخصوصاً دانشجویان دانشگاه پیام نور، بر آن شدیم تا کتابی خودآموز حاوی مثال هایی متنوع تهیه کنیم تا بتواند جوابگوی نیاز دانشجویان سال اول کارشناسی ارشد باشد. البته در بعضی از اثبات ها با آوردن چرا، سعی بر آن شده که خواننده با توجه به یادگیری مطالب قبل، خود را محک بزند. این کتاب شامل نه فصل می باشد که خواننده به راحتی می تواند مطالب کتاب را دنبال کند و با حل تمرینات متنوعی که در کتاب گنجانده شده است، تسلط خود را به موضوع افزایش دهد. قابل ذکر است که تکنیک حل هر تمرین ارتباط مستقیم و مستمری با موضوعات آن درس دارد. لذا فهم و درک قضیه های مربوطه و روش های اثبات آنها کمک شایانی به حل تمرینات مربوطه می نماید.

ارجاعات در این کتاب نیز به این صورت است که اگر در فصلی نوشته باشیم قضیه $m - n$ منظور قضیه شماره n از فصل m است.

بر خود لازم می دانیم از کسانی که در مراحل مختلف ما را یاری نموده اند سپاس گذاری

شود. از آقای دکتر غلامرضا صفاکیش به خاطر نظرات ارزنده در تکمیل کتاب تشکر می‌کنیم. همچنین از زحمات جناب آقای دکتر علیرضا وحیدی سفیدان به خاطر ویرایش علمی کتاب کمال تشکر را داریم.

بدیهی است که در تدوین هر اثر علمی لغزش و خطا اجتناب ناپذیر است. از این رو انتظار می‌رود دانش پژوهان و دانشجویان ارجمند نظرات اصلاحی خود را تذکر دهند.

احمد خاکساری

فصل اول

مقدمه‌ای بر حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها

هدف کلی

آشنایی با مفاهیم حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها

هدف‌های یادگیری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. حاصل ضرب مستقیم خانواده‌ای از گروه‌ها را تعریف کند.
۲. حاصل ضرب مستقیم ضعیف خانواده‌ای از گروه‌ها را بیان کند.
۳. مفهوم مجموع مستقیم گروه‌ها را تعریف کند.
۴. با استفاده از مفهوم کلمات تحویل‌یافته، گروه آزاد $F(X)$ را تشکیل دهد.

در این فصل حاصل ضرب مستقیم $G \times H$ گروه‌های G و H (که در جبر ۱ مورد بررسی

قرار گرفته است) را به خانواده‌ای از گروه‌های دلخواه $\{G_i \mid i \in I\}$ تعمیم می‌دهیم. حاصل ضرب دکارتی این خانواده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I ; g_i \in G_i\}$$

اکنون می‌خواهیم یک عمل دوتایی را روی این مجموعه تعریف کنیم که این حاصل ضرب دکارتی را به یک گروه تبدیل کند. فرض کنید به ازای هر i از I ، عمل گروه G_i به صورت $\star_i$ نشان داده شود و e_i عضو همانی G_i باشد. نگاشت $\star$ را روی حاصل ضرب دکارتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \star : \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \prod_{i \in I} G_i \\ \star((g_i)_{i \in I}, (g'_i)_{i \in I}) = (g_i \star_i g'_i)_{i \in I} \end{cases}$$

به راحتی ثابت می‌شود که نگاشت $\star$ یک عمل دوتایی (تابع) است و مجموعه $\prod_{i \in I} G_i$ همراه با عمل $\star$ تشکیل یک گروه می‌دهد به طوری که در آن $(e_i)_{i \in I}$ عضو خنثی و $(g_i^{-1})_{i \in I}$ وارون عضو $(g_i)_{i \in I}$ و g_i^{-1} وارون g_i در گروه G_i است.

۱-۱ حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها

تعریف ۱-۱: گروه $(\prod_{i \in I} G_i, \star)$ را حاصل ضرب مستقیم خانواده‌ی گروه‌های $\{G_i \mid i \in I\}$ می‌نامند. اگر $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ، آن‌گاه حاصل ضرب مستقیم را با $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ نشان می‌دهند.

تذکر: برای هر $k \in I$ ، نگاشت

$$\begin{cases} P_k : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow G_k \\ P_k((g_i)_{i \in I}) = g_k \end{cases}$$

یک همریختی پوشا از گروه‌ها است (چرا؟) و تصویرگر کانونی حاصل ضرب مستقیم نامیده می‌شود.

مقدمه‌ای بر حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها ۳

تعریف ۱-۲: حاصل ضرب مستقیم ضعیف (خارجی) خانواده $\{G_i \mid i \in I\}$ از گروه‌ها که با نماد $\prod_{i \in I}^w G_i$ نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه تمام عضوهای $(g_i)_{i \in I}$ از $\prod_{i \in I} G_i$ به طوری که جز تعداد متناهی مؤلفه، بقیه مؤلفه‌های $(g_i)_{i \in I}$ عضو خنثی گروه G_i می‌باشند.

تذکر: به راحتی ثابت می‌شود که مجموعه $\prod_{i \in I}^w G_i$ همراه با عمل $*$ که روی $\prod_{i \in I} G_i$ تعریف شد تشکیل یک گروه می‌دهد (چرا؟) که در آن $\prod_{i \in I}^w G_i$ زیرگروه نرمالی از $\prod_{i \in I} G_i$ است (چرا؟). برای هر $k \in I$ ، نگاشت

$$\begin{cases} i_k : G_k \longrightarrow \prod_{i \in I}^w G_i \\ i_k(a)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} \end{cases}$$

که در آن به ازای $i \neq k$ ، $a_i = e_i$ و $a_k = a$ ، یک همریختی یک‌به‌یک از گروه‌هاست و $i_k(G_k)$ یک زیرگروه نرمال $\prod_{i \in I} G_i$ است (چرا؟). همریختی i_k را انترکسیون کانونی می‌گویند.

تعریف ۱-۳: اگر گروه‌های $\{G_i \mid i \in I\}$ همگی آبلی (جمعی) باشند، آن‌گاه $\prod_{i \in I}^w G_i$ را معمولاً با نماد $\sum_{i \in I} G_i$ نشان می‌دهند و مجموع مستقیم خوانده می‌شود. حال اگر $\{N_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های نرمال گروه G به طوری که مجموعه $\sum_{i \in I} N_i$ مولد G باشد و برای هر $k \in I$ داشته باشیم $\langle e \rangle = \sum_{i \neq k} N_i \cap N_k$ ، آن‌گاه $G \cong \prod_{i \in I}^w N_i$ (چرا؟). در این حالت گوییم G حاصل ضرب مستقیم ضعیف داخلی خانواده $\{N_i \mid i \in I\}$ (یا مجموع مستقیم داخلی اگر G آبلی (جمعی) باشد) است.

۱-۲ گروه‌های آزاد، حاصل ضرب‌های آزاد، مولدها و رابطه‌ها

در این قسمت هدف این است که با استفاده از یک مجموعه دلخواه X گروهی بسازیم به نام گروه آزاد بر مجموعه X که معمولاً با نماد $F(X)$ نشان می‌دهیم. اگر مجموعه X تهی باشد گروه آزاد را گروه بدیهی $\langle e \rangle$ تعریف می‌کنیم. بنابراین فرض کنید $X \neq \emptyset$. مجموعه X^{-1} را طوری انتخاب می‌کنیم که $|X| = |X^{-1}|$ و $X \cap X^{-1} = \emptyset$. اعضای

X^{-1} را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$$

بالاخره مجموعه‌ای جدا از $X \cup X^{-1}$ انتخاب می‌کنیم که دقیقاً یک عنصر داشته باشد. این عنصر را با ۱ نمایش می‌دهیم. یک کلمه بر X را دنباله‌ای انتخاب می‌کنیم مانند $(a_1, a_2, \dots)$ به طوری که به ازای هر i از $\mathbb{N}$ ، $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ و وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ به طوری که به ازای هر $k \geq n$ ، $a_k = 1$. دنباله ثابت $(1, 1, \dots)$ را کلمه تهی می‌گوییم و آن را با ۱ نشان می‌دهیم. کلمه $(a_1, a_2, \dots)$ را تحویل‌یافته می‌گوییم هرگاه ۱. به ازای هر $x \in X$ و x^{-1} مجاور هم نباشند یعنی به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ و $x \in X$

$$a_i = x^{-1} \implies a_{i+1} \neq x$$

$$a_i = x \implies a_{i+1} \neq x^{-1}$$

۲. اگر $a_k = 1$ ، آن‌گاه برای هر $i \geq k$ ، $a_i = 1$.

به خصوص کلمه تهی ۱ تحویل‌یافته است. لذا هر کلمه تحویل‌یافته ناتهی به شکل $(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_m^{\alpha_m}, 1, 1, 1, \dots)$ است که در آن $m \in \mathbb{N}$ و $x_i \in X$ و $\alpha_i = \pm 1$. از این به بعد این کلمه را با $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ نشان خواهیم داد. توجه کنید که تعریف تساوی دنباله‌ها نشان می‌دهد که دو کلمه تحویل‌یافته $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ و $y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n}$ مساویند اگر و تنها اگر هر دو ۱ باشند یا $m = n$ و $(x_i, y_i \in X; \alpha_i = \pm 1, \beta_i = \pm 1)$ به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ و $\alpha_i = \beta_i$ و $x_i = y_i$. حال $F(X)$ را مجموعه تمام کلمات تحویل‌یافته بر X می‌گیریم. با توجه به توضیحات بالا نداشت از X به توی مجموعه $F(X)$ یعنی $x \rightarrow x = x^1$ یک‌به‌یک است. بنابراین X را با نقشش یکی کرده و X را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $F(X)$ در نظر می‌گیریم. حال می‌خواهیم یک عمل دوتایی را روی $F(X)$ تعریف و $F(X)$ را تبدیل به یک گروه کنیم. لذا نگاشت " . " را به صورت

مقدمه‌ای بر حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها ۵

زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot : F(X) \times F(X) \longrightarrow F(X) \\ \cdot (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m})(y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n} \end{array} \right.$$

کلمه $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}$ ممکن است تحویل‌یافته نباشد (برای مثال $x_m^{\alpha_m} = y_1^{-\beta_1}$)، بنابراین برای دوری از چنین حالتی حاصل ضرب را با پهلوی هم گذاشتن و حذف جملات مجاور به شکل xx^{-1} یا $x^{-1}x$ تعریف می‌کنیم؛ مثلاً کلمه $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}$ را با کلمه تحویل‌یافته $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}$ جایگزین می‌کنیم. به عبارت دیگر اگر کلمات تحویل‌یافته ناتهی X با خاصیت $n \geq m$ باشد، آن‌گاه k را بزرگ‌ترین عدد صحیح می‌گیریم ($m \geq k \geq 0$) که به ازای $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ، $x_{m-j}^{\alpha_{m-j}} = y_{j+1}^{-\beta_{j+1}}$ در این صورت عمل $\cdot$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\cdot (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m})(y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_n^{\beta_n}$$

$$= \begin{cases} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_{m-k}^{\alpha_{m-k}} y_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots y_n^{\beta_n} & k \leq m \\ y_{m+1}^{\beta_{m+1}} \cdots y_n^{\beta_n} & k = m \leq n \\ 1 & k = m = n \end{cases}$$

اگر $m > n$ باشد حاصل ضرب را به همین نحو تعریف می‌کنیم. حال به راحتی با این تعریف می‌توان ثابت کرد که حاصل ضرب دو کلمه تحویل‌یافته، باز هم کلمه‌ای تحویل‌یافته است. $F(X)$ همراه با عمل ضرب $\cdot$ تشکیل گروه می‌دهد که آن را گروه آزاد بر مجموعه X می‌نامند و مولد این گروه X می‌باشد یعنی $F(X) = \langle X \rangle$. اگر $|X| \geq 2$ ، آن‌گاه گروه آزاد بر مجموعه X غیرآبلی و هر عضو غیرهمانی آن از مرتبه نامتناهی است و اگر X یک مجموعه تک عضوی باشد مانند $X = \{a\}$ ، آن‌گاه گروه آزاد $F(X)$ بر مجموعه تک عضوی X دوری از مرتبه نامتناهی خواهد شد (چرا؟).

تذکر: اگر $(G, \star)$ یک گروه دلخواه با مجموعه مولد X و $F(X)$ گروه آزاد بر مجموعه X

باشد، آن گاه می توان همریختی گروهی $g : F(X) \rightarrow G$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} g : F(X) \rightarrow G \\ g(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}) = x_1^{\alpha_1} \star x_2^{\alpha_2} \star \cdots \star x_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

لازم به ذکر است که x_i^{-1} در $F(X)$ یک کلمه تحویل یافته است اما در G وارون x_i می باشد. حال به راحتی ثابت می شود که g خوش تعریف و همریختی پوشا است (چرا؟). لذا بنابر قضیه اول همریختی برای گروه ها داریم:

$$\frac{F(X)}{\ker g} \cong \text{Im } g = G$$

که در آن

$$\begin{aligned} \ker g &= \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} \in F(X) \mid g(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}) = e\} \\ &= \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} \in F(X) \mid x_1^{\alpha_1} \star x_2^{\alpha_2} \star \cdots \star x_k^{\alpha_k} = e\} \end{aligned}$$

معادله $x_1^{\alpha_1} \star x_2^{\alpha_2} \star \cdots \star x_k^{\alpha_k} = e$ را یک رابطه بر مولدهای G می نامند. در واقع گروه G نقش همریختی یک گروه آزاد است و بنابراین با مجموعه مولد X رابطه هایی که بر مولدها به دست می آید کاملاً شناخته می شود.

تمرین

۱. هرگاه $N_1, N_2, \dots, N_r$ زیرگروه های نرمالی از گروه G باشند به طوری که $G = N_1 N_2 \cdots N_r$ و به ازای هر $1 \leq k \leq r$

$$N_k \cap (N_1 \cdots N_{k-1} N_{k+1} \cdots N_r) = \langle e \rangle$$

آن گاه داریم $G \cong N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_r$.

۲. فرض کنید $\{N_i \mid i \in I\}$ خانواده ای از زیرگروه های نرمال گروه G باشند. حاصل ضرب مستقیم ضعیف داخلی خانواده $\{N_i \mid i \in I\}$ است اگر و فقط اگر هر عنصر غیر

مقدمه‌ای بر حاصل ضرب و مجموع مستقیم گروه‌ها ۷

همانی G حاصل ضرب منحصر به فردی مانند $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$ باشد که در آن $i_1, \dots, i_n$ عناصر متمایزی از I باشند و به ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ داریم $e \neq a_{i_k} \in N_{i_k}$.
 ۳. فرض کنید $\{f_i : G_i \rightarrow H_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از همریختی گروه‌ها باشد. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f = \prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \prod_{i \in I} H_i \\ \{a_i\} \longrightarrow \{f_i(a_i)\} \end{cases}$$

در این صورت f یک همریختی گروه‌هاست به طوری که

$$Im f = \prod_{i \in I} Im f_i, \quad \ker f = \prod_{i \in I} \ker f_i, \quad f\left(\prod_{i \in I} {}^w G_i\right) \subset \prod_{i \in I} {}^w H_i$$

در نتیجه f یک تکریختی (بروریختی) است اگر و تنها اگر هر f_i چنین باشد.

۴. فرض کنید $\{G_i \mid i \in I\}$ و $\{N_i \mid i \in I\}$ خانواده‌هایی از گروه‌ها باشند به طوری که

به ازای هر $i \in I$ N_i زیرگروه نرمالی از G باشد. در این صورت نشان دهید که $\prod_{i \in I} N_i$

$$\frac{\prod_{i \in I} G_i}{\prod_{i \in I} N_i} \cong \prod_{i \in I} \frac{G_i}{N_i} \text{ بوده و } \prod_{i \in I} G_i \text{ از نرمالی}$$

فصل دوم

حلقه‌ها، زیرحلقه‌ها، ایده‌آل‌ها و هم‌ریختی حلقه‌ها

هدف کلی

آشنایی با مفاهیم حلقه‌ها، زیرحلقه‌ها و هم‌ریختی حلقه‌ها

هدف‌های یادگیری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. حلقه را تعریف کند.
۲. عناصر پوچ‌توان و خودتوان حلقه را شناسایی کند.
۳. زیرحلقه را تعریف کرده و با استفاده از محک فشرده، زیرحلقه بودن را تشخیص دهد.
۴. حلقه $P(X)$ را شناسایی کند.
۵. مفهوم ایده‌آل را بیان کند.
۶. پوچ‌سازیک زیرمجموعه دلخواه غیرتهی X از حلقه را توضیح دهد.
۷. مفهوم زیرمجموعه بسته ضربی را بیان کند.

۸. ایده آل ماکسیمال و مینیمال را توضیح دهد.
۹. حاصل ضرب و حاصل جمع ایده آل‌ها را بیان کند.
۱۰. ایده آل پوچ و پوچ توان را تعریف کند.
۱۱. حلقه خارج قسمتی و ایده آل خارج قسمتی را توضیح دهد.
۱۲. حلقه‌های موضعی و نیمه موضعی را شناسایی کند.
۱۳. مفاهیم رادیکال ایده آل‌ها را شرح دهد.
۱۴. قضایای همریختی و یکریختی حلقه‌ها را توضیح دهد.
۱۵. حلقه‌های درون ریختی را شرح دهد.
۱۶. زیرمجموعه بسته ضربی را شناسایی و با کمک آن حلقه کسرها را شرح دهد.
۱۷. مفاهیم میدان‌های اول را توضیح دهد.

در این فصل فرض بر این است که خواننده با مطالب بنیادی در رابطه با نظریه گروه‌ها و جبر خطی آشنایی دارد. خواننده در نظریه گروه‌ها با یک مجموعه به نام گروه که یک عمل دوتایی روی آن بوده سرو کار داشته است. اما در این قسمت با مجموعه‌ای کار خواهد کرد به نام حلقه که مجهز به دو عمل دوتایی است و زیرمجموعه‌هایی از آن را مطالعه می‌کند به نام ایده آل‌ها که یکی از مهمترین بخش‌های نظریه حلقه‌ها است. بعضی از این ایده آل‌ها (ایده آل‌های دوطرفه) متناظر با زیرگروه‌های نرمال در مطالعه گروه‌هاست و در قسمت آخرین فصل همریختی حلقه‌ها که تعمیم طبیعی از همریختی گروه‌هاست (با اندکی اختلاف) مطالعه خواهد شد.

۲-۱ تعریف حلقه

تعریف ۲-۱: مجموعه غیرتهی R همراه با دو عمل دوتایی $+$ و $\cdot$ که به ترتیب جمع و ضرب نامیده می‌شوند و معمولاً با نماد $(R, +, \cdot)$ نمایش می‌دهند را یک حلقه گویند هرگاه:

۱. مجموعه R همراه با عمل جمع $(+)$ یک گروه آبلی باشد. به عبارت دیگر $(R, +)$

گروه آبلی باشد.

۲. مجموعه R همراه با عمل ضرب $(.)$ خاصیت شرکت‌پذیری داشته باشد. یعنی:

$$\forall a, b, c \in R ; (a.b).c = a.(b.c)$$

۳. مجموعه R از چپ و راست خاصیت پخشی داشته باشد. یعنی:

$$\forall a, b, c \in R ; \begin{cases} a.(b+c) = (a.b) + (a.c) \\ (b+c).a = (b.a) + (c.a) \end{cases}$$

تعریف ۲-۲: حلقه $(R, +, .)$ را یک حلقه جابه‌جایی گویند هرگاه:

$$\forall a, b \in R ; a.b = b.a$$

در غیر این صورت به آن یک حلقه غیرجابه‌جایی یا ناجابه‌جایی می‌گویند.

تعریف ۳-۲: $(R, +, .)$ را یک حلقه یک‌دار گویند هرگاه نسبت به ضرب دارای عضو همانی باشد. عضو همانی را با 1_R و یا صرفاً 1 نمایش داده و به آن عضو واحد R نیز می‌گویند.

مثال‌ها: مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ، اعداد گویا $\mathbb{Q}$ ، اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و اعداد مختلط $\mathbb{C}$ همراه با جمع و ضرب معمولی مثال‌هایی از حلقه‌های جابه‌جایی هستند و اگر $n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ همراه با جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها یک حلقه است. $\mathbb{C}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ حلقه‌های جابه‌جایی ولی حلقه ماتریس‌های $n \times n$ غیر جابه‌جایی است.

۲-۲ معرفی تعدادی از حلقه‌های شناخته شده:

۱. حلقه اعداد صحیح به پیمانه n : برای عدد طبیعی n فرض کنید

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$