



دانشگاه پشاور

جبر جابجایی

(کارشناسی ارشد رشته ریاضی)

دکتر احمد خاکساری دکتر مجید ارشاد لنگرودی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

پیشگفتار مؤلفان

هفت

۱	قسمت اول - مقدمه‌ای بر حلقه‌های جابه‌جایی
۳	فصل اول. ایده‌آل اول و ماکسیمال
۳	۱-۱. یادآوری از حلقه‌ها و هم‌ریختی‌ها
۴	۱-۲. ایده‌آل‌ها و حلقه‌های خارج قسمتی
۶	۱-۳. عضوهای یکه، پوچ توان و مقسوم‌علیه صفر
۱۰	۱-۴. ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال
۱۹	۱-۵. پوچ رادیکال و جیکوبسون رادیکال
۲۶	۱-۶. یادآوری ایده‌آل حاصل تقسیم
۲۹	۱-۷. انقباض و انبساط ایده‌آل
۳۰	۱-۸. تمرین‌های فصل اول
۳۵	فصل دوم. مدول‌ها و زیر مدول‌ها
۳۵	۲-۱. مدول‌ها، هم‌ریختی‌های مدولی، زیر مدول‌ها و مدول‌های خارج قسمتی و عملیات مقدماتی روی زیر مدول‌ها
۴۴	۲-۲. طریقه ساختن مدول آزاد
۴۹	۲-۳. نکاتی درباره هم‌ریختی‌ها
۵۱	۲-۴. مدول‌های نوتری - مدول‌های آرئینی
۶۵	۲-۵. تمرین‌های فصل دوم
۶۹	فصل سوم. شرط‌های زنجیره‌ای برای حلقه‌ها
۶۹	۳-۱. حلقه‌های نوتری و آرئینی
۷۷	۳-۲. تمرین‌های فصل سوم
۷۹	فصل چهارم. مدول‌های کسری
۷۹	۴-۱. حلقه و مدول کسرها
۸۵	۴-۲. مثال‌ها در رابطه با Sهای مختلف
۸۶	۴-۳. مدول کسری
۸۹	۴-۴. حاصل ضرب‌های تنسوری
۹۷	۴-۵. خاصیت‌های موضعی

۱۱۱	۴-۶. گذری بر مدول‌های هموار (flat)
۱۱۴	۴-۷. تمرین‌های فصل چهار
۱۱۹	فصل پنجم. تجزیه
۱۱۹	۵-۱. تجزیه اولیه
۱۴۶	۵-۲. تجزیه اولیه برای مدول‌ها
۱۶۱	۵-۳. تمرین‌های فصل پنجم
۱۶۷	فصل ششم. حلقه‌های ارزیاب و ددکیند
۱۶۷	۶-۱. حلقه‌های ارزیاب گسسته و دامنه‌های ددکیند
۱۸۰	۶-۲. تمرین‌های فصل ششم
۱۸۳	قسمت دوم: تئوری بعد در حلقه‌های جابه‌جایی
۱۸۵	فصل اول. یادآوری
۱۸۵	۱-۱. نظریه بعدها
۱۹۱	۱-۲. تمرین‌های فصل اول
۱۹۳	فصل دوم. بلندی ایده‌آل‌ها
۱۹۳	۲-۱. قضیه ایده‌آل اصلی (PIT) کرویل و نتایج آن
۱۹۸	۲-۲. تعمیم قضیه ایده‌آل اصلی کرویل (GPIT) و نتایج آن
۲۰۶	۲-۳. دستگاه پارامتری و حلقه‌های منظم
۲۲۰	۲-۴. تمرینات فصل دوم
۲۲۳	فصل سوم. رشته‌ها
۲۲۳	۳-۱. M-رشته
۲۳۳	۳-۲. تمرین‌های فصل سوم
۲۳۵	فصل چهارم. درجه ایده‌آل
۲۳۵	۴-۱. درجه یک ایده‌آل
۲۳۹	۴-۲. تمرین‌های فصل چهارم
۲۴۱	فصل پنجم. حلقه‌های کوهن مکولی
۲۴۱	۵-۱. حلقه‌های Cohen-Macaulay یا به اختصار C-M
۲۴۹	۵-۲. تمرینات فصل پنجم
۲۵۲	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۵۴	منابع

پیشگفتار مؤلفان

از آنجا که ادامه تحصیل در گرایش جابه‌جایی احتیاج به کتاب‌های مناسب می‌باشد و اکثر کتاب‌ها در این زمینه به زبان لاتین بوده و به راحتی در دسترس دانشجویان مخصوصاً دانشگاه پیام‌نور قرار نمی‌گیرد لذا برآن شدیم تا کتابی تهیه کنیم که اولاً دانشجو کمتر به مشکلات برخورد کند ثانیاً کتاب جامع و مناسبی برای یک نیمسال تحصیلی برای دانشجویان کارشناسی ارشد باشد. این کتاب شامل دو قسمت بوده که در قسمت اول حلقه‌ها و مدول‌ها تألیف آقایان دکتر احمد خاکساری و دکتر مجید ارشاد و در قسمت دوم تئوری بعدها تألیف دکتر احمد خاکساری مورد بررسی قرار گرفته که می‌تواند جهت استفاده دانشجویان دکتری نیز قرار گیرد و سعی بر آن شده تا مطالب به‌طور کامل توضیح داده شود و خواننده به راحتی بتواند مطالب کتاب را دنبال کند و با حل تمرینات متنوعی که در کتاب گنجانده شده است بتواند تسلط خود را به موضوع افزایش دهد. در اینجا از خانم سیده نگین صالحی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی که نسخه دست‌نویس این کتاب را با دقت مطالعه نموده و با رهنمودهای خود ما را در بهتر شدن کتاب یاری داده‌اند تشکر می‌کنیم.

مؤلفان

احمد خاکساری

مجید ارشاد

قسمت اول

مقدمه‌ای بر حلقه‌های جابه‌جایی

فصل اول

ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال

در این فصل، برای راحتی خواننده، چند مطلب اساسی که فرض می‌کنیم کاملاً با آنها آشناست (احتمالاً به جز انبساط (extention) و انقباض (constraction) ایده‌آل‌ها) را به‌طور خلاصه همراه قضایای مورد نیاز یادآوری می‌کنیم. این تعاریف و قضیه‌ها در فصل‌های بعد مکرر به کار خواهد رفت.

۱-۱ یادآوری از حلقه‌ها و هم‌ریختی‌ها

در این کتاب منظور از حلقه، حلقهٔ جابه‌جایی یک‌دار است و معمولاً R نمایش‌دهندهٔ چنین حلقه‌ای خواهد بود. لذا R مجموعه‌ای است همراه با دو عمل دوتایی جمع (+) و ضرب (.) به‌طوری‌که:

۱. R همراه با عمل + یک گروه آبلی است (عضو خنثی را با صفر (۰) نمایش می‌دهند).

۲. عمل ضرب روی R خاصیت شرکت‌پذیری $((xy)z = x(yz))$ ضرب خاصیت‌پذیری روی عمل جمع را دارد.

$$(y+z)x = yx + zx, x(y+z) = xy + xz$$

۳. برای هر دو عضو دلخواه y, x از R داریم $xy = yx$.

۴. عضوی مانند $t \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in R$ داریم $xt = tx = x$.

این عضو را معمولاً با «۱» نمایش می‌دهند و عضو همانی یا یک حلقه می‌نامند و

منحصر به فرد است (چرا).

تذکر مهم ۱-۱-۱: اگر حلقه R فقط شامل یک عضو باشد آن را حلقه بدیهی یا حلقه صفر گویند و داریم $1_R = 0_R$ ، بنابراین برای هر $x \in R$ داریم $x = x1 = x0 = 0$ ، لذا R نابدیهی است اگر و تنها اگر $0_R \neq 1_R$ یا اگر و تنها اگر R بیش از یک عضو داشته باشد.

تعریف: فرض کنید R و R' حلقه باشند. تابع $f: R \rightarrow R'$ را همریختی (Homomorphism) حلقه می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

$$1. f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ لذا } f(x-y) = f(x) - f(y) \text{ و } f(-x) = -f(x) \text{ و } f(0_R) = 0_{R'} \text{ و } f(1_R) = 1_{R'} \text{ و } f(0_{R'}) = 0_R \text{ و } f(1_{R'}) = 1_R \text{ هستند.}$$

$$2. f(xy) = f(x)f(y)$$

$$3. f(1_R) = 1_{R'} \text{ و } f(1_{R'}) = 1_R \text{ و } f(0_R) = 0_{R'} \text{ و } f(0_{R'}) = 0_R \text{ هستند.}$$

تعریف: اگر همریختی f ، برو و یک به یک باشد، آن را یکریختی (ایزومورفیسم) (Isomorphism) می‌نامیم، در صورتی که f تنها برو باشد، آن را برویختی (اپی مورفیسم) (Epimorphism) و اگر یک به یک باشد، آن را تکریختی (مونومورفیسم) (Monomorphism) می‌گوییم. در صورتی که f یکریختی باشد، f^{-1} نیز یکریختی خواهد بود.

تعریف: زیرمجموعه غیر تهی S از R را یک زیرحلقه $R(\text{subring})$ می‌نامند، هر گاه S با همان اعمال جمع و ضرب حلقه R خود تشکیل یک حلقه بدهد و $1_R = 1_S$ بدیهی است که در این صورت تابع شمول از S به R یک همریختی یک به یک است. **تذکر ۱-۱-۲:** اگر Z اعداد صحیح باشد، آنگاه با تعریف بالا $2Z$ زیر حلقه Z نیست، زیرا $2Z$ یک ندارد.

۲-۱ ایده‌آل‌ها و حلقه‌های خارج قسمتی

تعریف: زیر مجموعه غیر تهی I از حلقه R را یک ایده‌آل $R(\text{Ideal})$ می‌نامند، در صورتی که به ازای هر $x, y \in I$ و $r \in R$ داشته باشیم:

$$1. x - y \in I$$

$$2. xr \in I$$

تذکره ۱-۲-۱: از اینکه R یک‌دار است، لذا برای هر $x \in I$ داریم $x \in (-1_R)$ و بنابراین (۱) را می‌توان با $x + y \in I$ عوض کرد.

تذکره ۱-۲-۲: با توجه به تعریف زیر حلقه، نمی‌توان گفت هر ایده‌آل یک زیر حلقه است، چون $I = I_R = I_L$ لزوماً برقرار نخواهد بود (در حالت کلی ایده‌آل یک ندارد، مگر حالت بدیهی $I = R$).

تعریف: فرض کنید I یک ایده‌آل R باشد، در این صورت تابع $f: R \rightarrow \frac{R}{I}$ ضابطه $\forall x \in R, f(x) = x + I$ یک هم‌ریختی برو از حلقه‌هاست. این هم‌ریختی را، هم‌ریختی طبیعی (Natural Homomorphism) می‌نامند و $x + I$ را معمولاً با $[x]$ یا $\bar{x}$ (کلاس x) نشان می‌دهند. بنابراین $f(x)$ مساوی $\bar{x}$ می‌شود.

تعریف: فرض کنید I یک ایده‌آل R باشد، در این صورت I را ایده‌آل محض R گوئیم، هر گاه $I \neq R$ ($I \not\subseteq R$).

تذکره ۱-۲-۳: اگر I یک ایده‌آل R باشد، آنگاه $\frac{R}{I}$ نابدیهی است اگر و تنها اگر $I \neq R$ اگر و تنها اگر $\frac{I_R}{I} \neq \frac{I_L}{I}$.

تذکره ۱-۲-۴: $\frac{I_R}{I} = \frac{I_L}{I} + I = I$, $\frac{I_R}{I} = I_R + I$

قضیه ۱-۲-۵

فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R و $\phi: R \rightarrow \frac{R}{I}$ هم‌ریختی طبیعی باشد. در این صورت تناظر یک به یکی بین مجموعه ایده‌آل‌های حلقه $\frac{R}{I}$ و مجموعه ایده‌آل‌هایی از R که شامل I هستند، برقرار است؛ به قسمی که متناظر هر ایده‌آل J از $\frac{R}{I}$ ایده‌آل $\phi^{-1}(J)$ از R را خواهیم داشت و متناظر ایده‌آل I' شامل I از R ایده‌آل $\frac{I'}{I}$ از $\frac{R}{I}$ می‌باشد. به علاوه این تناظر جزئیت را حفظ می‌کند، یعنی اگر I' و I'' ایده‌آل‌هایی از R باشند که $I \subseteq I' \subseteq I''$ آنگاه خواهیم داشت $\frac{I'}{I} \subseteq \frac{I''}{I}$.

برهان. ساده و به خواننده واگذار می‌شود.

تعریف: فرض کنید R و R' دو حلقه بوده و $f: R \rightarrow R'$ همریختی حلقه‌ها باشد در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\text{Ker} f = f^{-1}(\{0_{R'}\}) = \{x \in R \mid f(x) = 0_{R'}\}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\text{Ker} f$ یک ایده‌آل R می‌باشد و f یک به یک است اگر و تنها اگر $\text{Ker} f = \{0\}$ (چرا؟)

تذکره ۱-۲-۶: اگر $f: R \rightarrow R'$ همریختی حلقه‌ها باشد، در این صورت $f(R)$ زیر حلقه R' است و لزوماً ایده‌آل نیست (چرا؟) و در نتیجه $f: R \rightarrow f(R)$ یک همریختی برو از حلقه‌ها می‌باشد. لذا نگاشت $f: \frac{R}{\text{Ker} f} \rightarrow f(R)$ با ضابطه $f^*(x + \text{Ker} f) = f(x)$ ، یکرخیختی است (چرا؟) و f^* را یکرخیختی القایی توسط f می‌نامند.

تذکره ۱-۲-۷: اگر I یک ایده‌آل R باشد، معمولاً از علامات زیر استفاده می‌کند:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in R, x \equiv y \pmod{I} &\Leftrightarrow x - y \in I \Leftrightarrow x - y + I = I \\ &\Leftrightarrow x + I = y + I \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \end{aligned}$$

۱-۳ عضوهای یکه، پوچ توان و مقسوم‌علیه صفر

تعریف. فرض کنید R یک حلقه و $x \in R$ ، در این صورت x را یک مقسوم‌علیه صفر R می‌نامند هرگاه عضو غیر صفر $y \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $xy = 0$. لذا با این تعریف خود صفر نیز می‌تواند یک مقسوم‌علیه صفر باشد.

تعریف. حلقه R را حوزه صحیح یا دامنه صحیح می‌نامند (Integral domain) هرگاه R نابدیهی بوده و صفر تنها مقسوم‌علیه صفر R باشد. به عبارت دیگر برای هر x و y متعلق به R از $xy = 0$ بتوان نتیجه گرفت $x = 0$ یا $y = 0$.

مثال: در حلقه Z_6 عضو $\bar{2}$ یک مقسوم‌علیه صفر است زیرا $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$.

مثال: Z اعداد صحیح حوزه صحیح است.

تعریف. عضو x از حلقه R را پوچ توان نامند هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به‌طوری که $x^n = 0$.

تذکره ۱-۳-۱: هر عضو پوچ توان یک مقسوم‌علیه صفر است؛ زیرا اگر n

کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد به طوری که $x^n = 0$ ، آنگاه $x = x^{n-1} \cdot 0 = 0$.
عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست مثلاً در حلقه Z_6 داریم $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{0}$ اما برای هر عدد طبیعی n داریم $\bar{3}^n = \bar{3}$.

تعریف. عضو x از حلقه R را یک (یکال) می‌نامند؛ در صورتی که $y \in R$ یافت شود به طوری که $xy = 1$.

متذکر می‌شویم که عضو y در تعریف بالا در صورت وجود به طور منحصر به فرد توسط x مشخص می‌شود (چرا) و معمولاً با x^{-1} نمایش می‌دهند و آن را معکوس x می‌نامند.

تذکر ۱-۳-۲: به راحتی می‌توان دید که مجموعه یکال‌های حلقه نابدی R با عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهند. (چرا؟)

تعریف. حلقه R را میدان (field) می‌نامند در صورتی که R نابدی بوده و هر عضو غیر صفر R یکه باشد. بدیهی است که هر میدان یک حوزه صحیح است، زیرا اگر $xy = 0$ و $x \neq 0$ آنگاه $x^{-1}(xy) = 0$ ، لذا $y = 0$. اما عکس آن درست نیست، مثلاً Z اعداد صحیح یک حوزه صحیح است ولی میدان نیست.

یادآوری اعمال مقدماتی روی ایده‌آل‌ها

اگر I و J ایده‌آل‌های حلقه R باشند، آنگاه $I+J$ نیز ایده‌آل حلقه R است و اگر $\{I_i\}_{i \in J}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های حلقه R باشد، آنگاه $\sum_{i \in J} I_i$ مجموعه تمام جمع‌های متناهی عضوهای I_i و $\prod_{i \in J} I_i$ مجموعه تمام جمع‌های متناهی از ضرب‌های متناهی از اعضای I_i (در صفحه بعد توضیح کامل) و $\bigcap_{i \in J} I_i$ نیز ایده‌آل‌هایی از حلقه R می‌باشند (چرا؟). لازم به ذکر است هرگاه $J = \emptyset$ باشد آنگاه $\bigcap_{i \in J} I_i = R$ تعریف می‌شود.

همچنین اگر X زیر مجموعه‌ای از حلقه R باشد، مجموعه تمامی ترکیبات خطی متناهی به صورت $r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n$ را که در آن $r_i \in R$ و $x_i \in X$ می‌باشد، ایده‌آل تولید شده توسط X می‌نامیم. در صورتی که $X = \emptyset$ باشد ایده‌آل تولید شده توسط X را بنابر قرارداد ایده‌آل صفر در نظر می‌گیرند و اگر X متناهی باشد، مثلاً

$\{x_1, \dots, x_n\}$ در این صورت ایده‌آل تولید شده توسط X را با علامت زیر به کار می‌برند:

$$Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

و اگر X تک عضوی باشد؛ مثلاً $X = \{x\}$ ، ایده‌آل تولید شده توسط x را با Rx یا $\langle x \rangle$ نمایش داده و ایده‌آل اصلی تولید شده توسط x می‌خوانند و به راحتی ثابت می‌شود که x یک‌ه است اگر و تنها اگر $Rx = R$ چرا؟

یادآوری می‌کنیم که اگر I و J ایده‌آل‌های حلقه R باشند، ایده‌آل تولید شده توسط $\{xy \mid x \in I, y \in J\}$ را با علامت IJ نمایش می‌دهیم و آن را حاصل ضرب دو ایده‌آل I و J می‌نامیم. بنابراین

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{N} \right\}$$

به‌طور کلی اگر $I_1, I_2, \dots, I_k$ ایده‌آل‌های حلقه R باشند، ایده‌آل پدید آمده توسط

$$\{x_1 x_2 x_3 \dots x_k \mid x_i \in I_i, 1 \leq i \leq k\}$$

را با $I_1 I_2 \dots I_k$ نشان می‌دهند و آن را حاصل ضرب ایده‌آل‌های $I_1, I_2, \dots, I_k$ می‌نامند. در صورتی که $I_1 = I_2 = \dots = I_k$ ، ایده‌آل $I_1 I_2 \dots I_k$ را با علامت I^k نشان می‌دهند و داریم:

$$\prod_{j=1}^k I_i = I_1 I_2 \dots I_k = \left\{ \sum_{i=1}^t x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik} \mid t \in \mathbb{N}, x_{in} \in I_i \right\}$$

به‌ویژه I^0 را بنابر قرار داد R تعریف می‌کنند. همچنین به راحتی می‌توان دید که ایده‌آل‌ها با ضرب خاصیت شرکت‌پذیری دارند. یعنی $(I_1 I_2) \cdot I_3 = I_1 (I_2 I_3)$ و چون حلقه جابجایی است، لذا $I_1 I_2 = I_2 I_1$ و به علاوه همیشه داریم $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ (چرا). اما تساوی چه زمانی صورت می‌گیرد؟

به‌عنوان مثال یکی از حالت‌هایی که تساوی برقرار می‌شود این است که I_2, I_1 نسبت به هم اول (coprime) باشند، یعنی $I_1 + I_2 = R$. زیرا

$$\begin{aligned} I_1 \cap I_2 &= (I_1 \cap I_2)R = (I_1 \cap I_2)(I_1 + I_2) \\ &= (I_1 \cap I_2)I_1 + (I_1 \cap I_2)I_2 \subseteq I_1 I_2 \end{aligned}$$

از طرفی همیشه داریم $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ ، لذا $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$. جالب است تحقیق شود این موضوع در چه حالت‌های دیگری اتفاق می‌افتد یا در چه حلقه‌هایی اتفاق می‌افتد.

لازم به یادآوری است که اگر $R_1, R_2, \dots, R_n$ تعداد متناهی حلقه جابجایی یک‌دار باشند، آنگاه

$$\bigoplus_{i=1}^n R_i = \prod_{i=1}^n R_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R_i, 1 \leq i \leq n\}$$

با جمع و ضرب مولفه‌ای تشکیل یک حلقه جابجایی یک‌دار با عضو همانی

$(1, 1, \dots, 1)$ می‌دهد. ولی اگر تعداد R_i ها نامتناهی باشد، $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ با همان عمل جمع و ضرب مولفه‌ای تشکیل حلقه می‌دهد اما $\bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$ تشکیل حلقه نمی‌دهد زیرا دارای

عضو همانی نیست و فقط یک زیر مجموعه از حلقه $\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ می‌باشد.

یاد آوری: اگر I یک مجموعه غیر تهی باشد، آنگاه داریم

$$\bigoplus_{i \in I} R_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, 0, \dots) \mid x_i \in R_i, k \in \mathbb{N}\}$$

$$\prod_{i \in j} R_i = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in R_i\}$$

قضیه ۱-۳-۳

فرض کنید که R یک حلقه نا بدیهی باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. R یک میدان است؛

۲. صفر و R تنها ایده‌آل‌های R هستند؛

۳. اگر R' یک حلقه نا بدیهی و $f: R \rightarrow R'$ هم‌ریختی حلقه‌ها باشند، آنگاه f یک به یک است.

برهان:

۱ $\Rightarrow$ ۲ اگر $I \neq 0$ یک ایده‌آل باشد، آنگاه $x \neq 0$ متعلق به I وجود دارد. لذا

$$1_R = x^{-1} x \in I \quad (چرا) \quad I = R$$

۲ $\Rightarrow$ ۳ اولاً چون $1_{R'} \neq 0_{R'}$ ، $f(1_R) = 1_{R'} \neq 0_{R'}$ ، لذا f غیر صفر است. از طرفی $\text{Ker } f$ یک

ایده آل R است لذا طبق تعریف کل R نیست پس بنا به قسمت (۲) لزوماً بایستی $\{0\}$ باشد بنابراین f یک به یک است.

۱ $\Rightarrow$ ۳ فرض کنید $x \in R, x \neq 0$ در این صورت $Rx = \{rx \mid r \in R\}$ یک ایده آل R است. حال ثابت می کنیم که هر عضو غیر صفر R یکه است.

فرض کنید $x \in R, x \neq 0$ یکه نباشد در این صورت Rx ایده آل محض R خواهد بود. در نتیجه حلقه $R' = \frac{R}{Rx}$ نابدیهی است. حال همریختی طبیعی $f: R \rightarrow R'$ را در نظر می گیریم با توجه به فرض f یک به یک است. لذا $Rx = \ker f = \{0\}$ پس $Rx = 0$ بنابراین $x = 0$ (چرا) که این تناقض با $x \neq 0$ است.

۱-۴ ایده آل های اول و ماکسیمال

تعریف: ایده آل P از حلقه R را اول (prime) می نامند، در صورتی که

$$P \neq R.$$

۲. برای هر x و y از R اگر $xy \in P$ ، آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

قضیه ۱-۴-۱

ایده آل P از R اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح باشد.

برهان: فرض کنیم P یک ایده آل اول R است و $(x+P)(y+P) = P$ و بنابراین $xy+P = P$ لذا $xy \in P$ و بنا به فرض $x \in P$ یا $y \in P$ که این نتیجه می دهد $x+p=p$ یا $y+p=p$. حال طرف عکس فرض کنیم $\frac{R}{P}$ حوزه صحیح و $xy \in P$ ، بنابراین داریم

$$xy+p=p \Rightarrow (x+p)(y+p)=p \Rightarrow x+p=p \text{ یا } y+p=p$$

$$p \Rightarrow x \in p \text{ یا } y \in p$$

علامت گذاری: مجموعه ایده آل های اول حلقه R را با علامت $\text{Spec}(R)$ نشان می دهند.

تعریف: ایده آل m از حلقه R را ماکسیمال می نامند، در صورتی که $m \neq R$ و به ازای هر ایده آل I از R ، اگر $m \subseteq I$ آنگاه $I = R$ یا $m = I$.

علامت‌گذاری: مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R را با علامت $\text{Max}(R)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱-۴-۲

ایده‌آل m از حلقه R ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{m}$ میدان باشد.
برهان: فرض کنید m یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه R باشد، از اینکه بین ایده‌آل‌های $\frac{R}{m}$ و ایده‌آل‌های R که شامل m است تناظر یک به یکی برقرار است، لذا تنها ایده‌آل‌های $\frac{R}{m}$ صفر و خود $\frac{R}{m}$ است. بنابراین $\frac{R}{m}$ یک میدان است. از طرفی اگر $\frac{R}{m}$ میدان باشد و I یک ایده‌آل به‌طوری که $m \subseteq I$ در این صورت $\frac{I}{m}$ یک ایده‌آل $\frac{R}{m}$ است. بنابراین $I = R$ یا $I = m$ لذا m ایده‌آل ماکسیمال R است.

قضیه ۱-۴-۳

هر ایده‌آل ماکسیمال m از حلقه R اول است.
برهان: از اینکه $\frac{R}{m}$ میدان است در نتیجه حوزه صحیح می‌باشد. بنابراین m یک ایده‌آل اول R است.
تذکر ۱-۴-۴: عکس قضیه فوق همواره برقرار نیست. زیرا ایده‌آل صفر در حلقه اعداد صحیح Z اول است، ولی ماکسیمال نیست.
تذکر ۱-۴-۵: اگر $f: R \rightarrow R', g: R' \rightarrow R''$ هم‌ریختی‌های حلقه باشند، آنگاه $\text{gof}: R \rightarrow R''$ (ترکیب (g, f)) نیز هم‌ریختی حلقه می‌باشد (چرا).

قضیه ۱-۴-۶

فرض کنید $f: R \rightarrow R'$ یک هم‌ریختی حلقه‌ها باشد، در این صورت اگر $P \in \text{Spec } R'$ آنگاه $f^{-1}(P) \in \text{Spec } R$.
برهان: فرض کنید $\phi: R' \rightarrow \frac{R'}{P}$ هم‌ریختی طبیعی باشد، در این صورت