



دانشگاه ساه نور

جبر جابجایی

(کارشناسی ارشد ریاضی)

دکتر شمس الملوک خوش دل دکتر منصوره معانی شیرازی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

پیشگفتار	نه
مقدمه	یازده
فصل اول: حلقه ها و ایده آل ها	۱
هدف کلی	۱
هدف های یادگیری	۱
۱-۱ تعاریف و پیش نیازها	۲
۲-۱ ایده آل های ماکزیمال	۱۰
۳-۱ ایده آل های اول	۱۷
۴-۱ اجتناب از ایده آل های اول	۲۸
۵-۱ انبساط و انقباض ایده آل ها	۳۱
خلاصه فصل اول	۳۴
خودآزمایی تشریحی فصل اول	۳۴
فصل دوم: مدول ها و زیرمدول ها	۴۱
هدف کلی	۴۱
هدف های یادگیری	۴۱
۱-۲ مدول ها و همریختی های مدولی	۴۲
۲-۲ زیرمدول ها و مدول های خارج قسمتی	۴۶
۳-۲ اعمال روی زیرمدول ها	۴۹
۴-۲ رشته های دقیق	۵۴
۵-۲ حاصل ضرب و حاصل جمع مستقیم مدول ها	۵۷
۶-۲ مدول های آزاد	۶۲
۷-۲ حاصل ضرب تانسوری مدول ها	۶۶
۸-۲ تحدید و توسیع اسکالرها	۷۵

۷۹	۹-۲ ویژگی‌های دقیق بودن حاصل ضرب تانسوری
۸۲	خلاصه فصل دوم
۸۳	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۸۹	فصل سوم: موضعی سازی
۸۹	هدف کلی
۸۹	هدف‌های یادگیری
۹۰	۱-۳ حلقه‌ها و مدول‌های کسرها
۱۰۱	۲-۳ ویژگی‌های موضعی
۱۰۴	۳-۳ انبساط و انقباض ایده‌آل‌ها در حلقه‌های کسرها
۱۱۳	خلاصه فصل سوم
۱۱۳	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
۱۱۷	فصل چهارم: شرایط زنجیری
۱۱۷	هدف کلی
۱۱۷	هدف‌های یادگیری
۱۱۸	۱-۴ شرایط زنجیری روی مدول‌ها
۱۲۸	۲-۴ مدول‌های با طول متناهی
۱۳۶	۳-۴ حلقه‌های نوتری و آرتینی
۱۴۶	خلاصه فصل چهارم
۱۴۷	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۱۵۳	فصل پنجم: تجزیه ابتدایی
۱۵۳	هدف کلی
۱۵۳	هدف‌های یادگیری
۱۵۴	۱-۵ زیرمدول‌های ابتدایی
۱۶۳	۲-۵ زیرمدول‌هایی با یک تجزیه ابتدایی
۱۷۱	۳-۵ وجود تجزیه ابتدایی
۱۷۷	۴-۵ زیرمدول‌های ابتدایی و کسرها
۱۸۱	۵-۵ قضیه اشتراک کرول
۱۸۴	خلاصه فصل پنجم
۱۸۵	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۱۹۱	فصل ششم: توسیع صحیح روی زیرحلقه‌ها
۱۹۱	هدف کلی
۱۹۱	هدف‌های یادگیری
۱۹۲	۱-۶ عناصر صحیح و توسیع صحیح حلقه‌ها
۱۹۹	۲-۶ ویژگی‌های توسیع صحیح حلقه‌ها و قضیه بالارو

۲۰۸	۳-۶ دامنه‌های صحیح به‌طور صحیح بسته و قضیه پایین - رو
۲۱۴	خلاصه فصل ششم
۲۱۴	خودآزمایی تشریحی فصل ششم
۲۱۷	فصل هفتم: حلقه‌های ارزیاب گسسته و دامنه‌های ددکیند
۲۱۷	هدف کلی
۲۱۷	هدف‌های یادگیری
۲۱۸	۱-۷ حلقه‌های ارزیاب
۲۲۵	۲-۷ حلقه‌های ارزیاب گسسته
۲۲۸	۳-۷ دامنه‌های ددکیند
۲۴۰	خلاصه فصل هفتم
۲۴۰	خودآزمایی فصل هفتم
۲۴۳	فصل هشتم: حلقه‌های کوهن - مکولی و حلقه‌های منظم
۲۴۳	هدف کلی
۲۴۳	هدف‌های یادگیری
۲۴۴	۱-۸ قضیه ایده‌آل اصلی کرول
۲۵۰	۲-۸ دستگاه‌های پارامترها
۲۵۲	۳-۸ حلقه‌های کوهن - مکولی
۲۵۵	۴-۸ R- رشته‌های منظم و نمره
۲۷۸	۵-۸ حلقه‌های موضعی منظم
۲۸۸	خلاصه فصل هشتم
۲۸۹	خودآزمایی فصل هشتم
۲۹۱	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی
۲۹۷	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی
۳۰۷	نمایه
۳۱۳	کتابنامه

پیشگفتار

حمد و سپاس بر پروردگار یکتا که توفیق تألیف این کتاب را به ما عنایت فرمود. کتاب حاضر به گونه‌ای خود آموز نگارش شده که امکان استفاده آسان‌تر برای علاقه‌مندان به مطالعه جبر جابجایی را میسر می‌سازد. فصول مختلف این کتاب تمام سرفصل‌های مصوب برای درس جبر جابجایی را به‌طور کامل پوشش می‌دهد.

این کتاب با مطالبی مقدماتی شروع می‌شود و در ادامه به بیان و بررسی مطالب مهم و اساسی جبر جابجایی می‌پردازد. قبل از شروع هر فصل هدف‌های یادگیری آورده شده‌است که خواننده بعد از مطالعه آن فصل بتواند میزان آموخته‌های خود را از آن فصل محک بزند. در هر فصل، مثال‌هایی به منظور فهم بهتر مطالب ذکر شده و در پایان آن تمرین‌های متنوعی آورده شده‌است. توصیه می‌شود که پس از مطالعه هر فصل به آن تمرین‌ها مراجعه و با حوصله نسبت به حل آن‌ها مبادرت شود که این خود کمک مؤثری به یادگیری مطالب آن فصل است.

این نوشتار حاصل چندین دوره تدریس مؤلفان در دانشگاه در درس جبر جابجایی در سطح کارشناسی ارشد است و به منظور افزایش توانایی‌های علمی دانشجویان این درس تألیف شده‌است. امید است بتواند گامی مؤثر در جهت پیشرفت آن عزیزان باشد. اینک بر خود لازم می‌دانیم از سرکار خانم دکتر خدیجه احمدی آملی که مسئولیت ویراستاری علمی کتاب را عهده‌دار بودند صمیمانه تشکر و قدردانی کنیم. در پایان پذیرای هرگونه پیشنهاد سازنده درخصوص رفع کمبود و کاستی‌های احتمالی این نوشتار بوده و پیشاپیش از خوانندگان عزیزی که در این راستا ما را همراهی می‌کنند کمال تشکر و سپاس را داریم.

مقدمه

در سراسر این کتاب منظور از حلقه، یک حلقه جابجایی و یک‌دار است. این کتاب مشتمل بر ۸ فصل است. فصل اول تحت عنوان حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها، به تعاریف و پیش‌نیازها اختصاص دارد. برخی اطلاعات پایه از نظریه گروه‌ها و فضاهای برداری روی اعداد حقیقی، اعداد مختلط و... دانسته فرض شده است. مطالب این فصل به گونه‌ای آورده شده که خواننده با مطالعه و تسلط بر آن از کتب دیگر بی‌نیاز است.

در فصل دوم به مطالعه مفهوم مدول‌ها روی حلقه‌های جابجایی که توسیعی از مفهوم فضاهای برداری روی میدان‌ها است می‌پردازیم. رشته‌های دقیق که در مطالعه مدول‌ها نقش کلیدی دارد در بخش چهارم از این فصل مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش هفتم پس از معرفی نگاشت‌های دوخطی و ارائه مثال‌هایی از آن شیوه ساخت حاصل ضرب تانسوری ذکر و نتایجی در رابطه با آن‌ها به دست آورده شده است. بخش هشتم به توسیع و تحدید اسکالرهای اختصاص دارد.

فصل سوم به تکنیک موضعی سازی اختصاص داده شده است که بسیاری از مسائل در جبر جابجایی را به مسائلی راجع به حلقه‌های موضعی تبدیل می‌کند. در این فصل تعاریف پایه و ویژگی‌های مربوط به موضعی سازی ارائه می‌شود. نظر به اینکه توصیف بیشتر توسیع و انقباض ایده‌آل‌ها در حلقه‌های کسرها از اهمیت خاصی برخوردار است بنابراین بخش آخر این فصل به این مهم می‌پردازد.

در فصل چهارم به مطالعه ویژگی‌های پایه از کلاس مهمی از مدول‌ها و حلقه‌ها (نوتری و آرتینی) می‌پردازیم. ابتدا شرایط زنجیری روی مدول‌ها و سری‌های ترکیبی را

معرفی می‌کنیم. سپس مفهوم طول یک مدول را که تعمیمی از مفهوم بعد در نظریه فضاهای برداری است را مطرح و ویژگی‌های یک مدول با طول متناهی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل پنجم به معرفی زیرمدول‌های ابتدایی و بیان برخی از ویژگی‌های آن اختصاص دارد. نشان می‌دهیم که تمام زیرمدول‌های سره از یک مدول نوتری دارای یک تجزیه ابتدایی است. در انتهای این فصل قضیه اشتراک کرول بیان و اثبات می‌شود. مطالعه نظریه توسیع صحیح به عنوان تعمیمی از توسیع‌های میدان جبری در حلقه‌های جایجایی هدف اصلی فصل ششم است. این مفهوم بیان و برخی از نتایج آن از جمله قضایای از کوهن - سیدنبرگ (قضیه بالا - رو، قضیه پایین - رو) در ارتباط با ایده‌آل‌های اول از یک حلقه صحیح روی یک زیرحلقه از آن اثبات شده است.

فصل هفتم به معرفی حلقه‌های ارزیاب، حلقه‌های ارزیاب گسسته و دامنه‌های ددکیند که در نظریه اعداد جبری دارای اهمیت است اختصاص دارد. با بیان و اثبات قضیه‌ای نشان داده‌ایم که دامنه‌های ددکیند را می‌توان به چندشیوه متفاوت شناسایی کرد.

فصل پایانی این کتاب یعنی فصل هشتم به معرفی حلقه‌های کوهن - مکولی و حلقه‌های منظم اختصاص یافته است. در این فصل قضیه ایده‌آل اصلی کرول بیان و اثبات شده است. مفاهیم نمره و R -رشته‌ها معرفی و ویژگی‌های اساسی آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، نتایجی دال بر ارتباط این مفاهیم با حلقه‌های کوهن - مکولی مورد بررسی قرار داده شده است.

فصل اول

حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها

هدف کلی

این فصل تحت عنوان حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها، به تعاریف و پیش‌نیازها اختصاص دارد. برخی اطلاعات پایه از نظریه گروه‌ها و فضاهاى برداری روی اعداد حقیقی، اعداد مختلط و... دانسته فرض شده‌است. در بخش‌هایی از این فصل به معرفی دودسته مهم از ایده‌آل‌ها تحت عنوان ایده‌آل‌های اول و ایده‌آل‌های ماکزیمال پرداخته و نشان می‌دهیم که هر ایده‌آل ماکزیمال یک ایده‌آل اول است.

هدف‌های یادگیری

پس از مطالعه این فصل انتظار می‌رود دانشجو بتواند:

۱. یک حلقه را تعریف کند.
۲. محک زیرحلقه بودن را بیان کند.
۳. همریختی حلقه‌ای را تعریف کند.
۴. هسته یک همریختی را پیدا کند.
۵. یک ایده‌آل را تعریف کند.
۶. پوچ‌ساز یک عنصر همچنین، پوچ‌ساز زیرمجموعه ناتهی از یک حلقه را مشخص کند.
۷. کوچک‌ترین ایده‌آل تولیدشده توسط یک مجموعه را پیدا کند.
۸. عناصر یکال یک حلقه را شناسایی کند.

۹. وجود حداقل یک ایده‌آل ماکزیمال در یک حلقه نابدیهی را ثابت کند.
۱۰. شرط لازم و کافی برای این که یک ایده‌آل سره از یک حلقه ماکزیمال باشد را بیان کند.
۱۱. ارتباط بین ایده‌آل ماکزیمال و عنصر یکال در یک حلقه را تشخیص دهد.
۱۲. رادیکال جیکوبسن یک حلقه را با معرفی عناصرش مشخص سازد.
۱۳. مفهوم ایده‌آل اول در یک حلقه را بیان کند.
۱۴. رادیکال یک ایده‌آل را تعریف کرده و آن را در یک حلقه دلخواه محاسبه کند.
۱۵. شرط لازم و کافی برای اول بودن یک ایده‌آل را بیان کند.
۱۶. قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول را بیان کند.
۱۷. عناصر تحویل‌ناپذیر یک حلقه را در صورت وجود پیدا کند.
۱۸. یک دامنه تجزیه یکتا را تعریف کند و چندمثال ارائه دهد.
۱۹. عنصر اول یک حلقه را تعریف کرده و چندمثال ارائه دهد.
۲۰. توسیع و انقباض یک ایده‌آل را تعریف و ویژگی‌های آن‌ها را بیان کند.

۱-۱ تعاریف و پیش‌نیازها

در سراسر این کتاب، برخی اطلاعات پایه از نظریه گروه‌ها و فضاهای برداری (روی اعداد حقیقی، اعداد مختلط، و ...) دانسته فرض شده‌است. شایان ذکر است که از برهان تعداد معدودی از قضایا به دلیل سادگی صرف نظر و تنها به ذکر منبع اکتفا شده‌است.

۱-۱-۱ تعریف

یک حلقه R مجموعه‌ای است همراه با دو عمل دوتایی جمع و ضرب به طوری که

(الف) R همراه با عمل جمع یک گروه آبلی است.

(ب) ضرب شرکت‌پذیر است.

(ج) ضرب از چپ و راست نسبت به جمع توزیع‌پذیر است.

در صورتی که عمل ضرب در حلقه R دارای خاصیت جابجایی باشد، R را یک حلقه جابجایی می‌نامیم. اگر در حلقه R ، عنصری مانند $1 \in R$ موجود باشد که برای هر $a \in R$ ، $a1 = 1a = a$ ، آنگاه گوییم R دارای عنصر همانی (ضربی) است و

حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها ۳

به اختصار حلقه R را یک حلقه یک‌دار می‌نامیم. می‌توان دید که عنصر همانی در یک حلقه در صورت وجود، منحصر به فرد است. عنصر همانی ضربی در یک حلقه R را در صورت وجود، با 1_R یا به اختصار با 1 و عنصر حثی جمعی حلقه R را با 0_R یا 0 به اختصار با 0 نشان می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را واحد و صفر حلقه R نامیم. حلقه R را بدیهی می‌نامیم هرگاه $1=0$. در این صورت R تنها شامل عنصر صفر است. صفر تنها حلقه‌ای است که در آن $1=0$.

در سراسر این کتاب منظور از حلقه، یک حلقه جابجایی و یک‌دار است. همچنین مجموعه اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ و مجموعه اعداد صحیح نامنفی را با نماد $\mathbb{N}_0$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۲ مثال‌ها

مجموعه‌های اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$)، اعداد گویا ($\mathbb{Q}$)، اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)، و اعداد مختلط ($\mathbb{C}$)، با اعمال جمع و ضرب معمولی اعداد حلقه هستند.

۱-۱-۳ مثال

برای یک عدد صحیح و مثبت n ، مجموعه $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ متشکل از باقیمانده‌های اعداد صحیح به پیمانه n را در نظر می‌گیریم. همراه با جمع و ضرب به پیمانه n ، $\mathbb{Z}_n$ یک حلقه است که آن را حلقه اعداد صحیح به پیمانه n یا حلقه رده‌های مانده‌ای می‌نامیم. در این حلقه $\overline{0}$ عنصر صفر و $\overline{1}$ عنصر واحد است.

۱-۱-۴ تعریف

فرض کنید R و S دو حلقه باشند. همچنین، فرض کنید $T = R \times S$ حاصل ضرب دکارتی R و S باشد. همراه با اعمال جمع و ضرب مؤلفه به مؤلفه، T یک حلقه است که آن را حاصل ضرب مستقیم R در S می‌نامیم. عنصر واحد این حلقه برابر با $(1_R, 1_S)$ است.

به طور کلی، اگر $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک خانواده ناتهی از حلقه‌ها باشد، آنگاه حاصل ضرب مستقیم $T = \prod_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ همراه با اعمال جمع و ضرب مؤلفه به مؤلفه یک

حلقه است. درحالتی که برای هر $\lambda \in \Lambda$ ، $R_\lambda = R$ می نویسیم $R = \prod_{\lambda \in \Lambda} R$ اگر Λ متناهی باشد، آنگاه $R = \prod_{\lambda \in \Lambda} R = R^n = R \times \dots \times R$ که در آن n تعداد عناصر Λ است.

۱-۱-۵ قضیه [۷]

ویژگی های زیر در حلقه دلخواه R برقرار است.

(الف) برای هر $a \in R$ ، $a \circ = \circ = a^\circ$.

(ب) برای هر $a, b \in R$ ، $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.

(ج) برای هر $a, b \in R$ و $n \in \mathbb{Z}$ ، $n(ab) = (na)b = a(nb)$.

(د) برای هر $n, m \in \mathbb{Z}$ و $a \in R$ ، $(mn)a = m(na) = n(ma)$ ، که در آن

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + a + \dots + a}_n, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -(\underbrace{a + a + \dots + a}_{|n|}), & n < 0 \end{cases}$$

۱-۱-۶ تعریف

یک زیرمجموعه S از حلقه R را یک زیرحلقه R می نامیم هرگاه S همراه با اعمال جمع و ضرب R خود یک حلقه باشد و $1_S = 1_R$.

۱-۱-۷ قضیه [۱]. (محک زیرحلقه بودن)

فرض کنید S زیرمجموعه ای از حلقه R باشد. دراین صورت S یک زیرحلقه از R است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند.

(الف) $1_R \in S$.

(ب) برای هر $a, b \in S$ ، $a - b \in S$.

(ج) برای هر $a, b \in S$ ، $ab \in S$.

۸-۱-۱ مثال

زیرمجموعه $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ از $\mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که $\mathbb{Z}[i]$ یک زیرحلقه از $\mathbb{C}$ است که آن را حلقه اعداد صحیح گاوسی می‌نامیم. در این حلقه اعمال جمع و ضرب، همان جمع و ضرب اعداد مختلط است.

۹-۱-۱ تعریف

یک همریختی حلقه‌ها نگاشتی مانند f از حلقه R به حلقه S است به طوری که

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad a, b \in R \quad (\text{الف})$$

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad a, b \in R \quad (\text{ب})$$

$$f(1_R) = 1_S \quad (\text{ج})$$

اگر همریختی f در تعریف ۹-۱-۱، یک به یک (به ترتیب پوشا، دوسویی) باشد، f را یک تک‌ریختی (به ترتیب بروریختی، یک‌ریختی) حلقه‌ها می‌نامیم. در حالتی که f یک یک‌ریختی حلقه‌ها باشد، گوئیم R و S یک‌ریختند و می‌نویسیم $R \cong S$.
به راحتی می‌توان دید که اگر $f: R \rightarrow S$ و $g: S \rightarrow T$ دو همریختی حلقه‌ها باشند، آنگاه نگاشت ترکیبی $gf: R \rightarrow T$ با ضابطه تعریف $gf(a) = g(f(a))$ نیز یک همریختی حلقه‌ها است.

۱۰-۱-۱ تعریف

فرض کنید R یک حلقه باشد. یک زیرمجموعه I از R را یک ایده‌آل R می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

$$I \neq \emptyset \quad (\text{الف})$$

$$a+b \in I, \quad a, b \in I \quad (\text{ب})$$

$$ra \in I, \quad r \in R \text{ و } a \in I \quad (\text{ج})$$

روشن است که در یک حلقه دلخواه، هر ایده‌آل یک زیرحلقه است.
ایده‌آل I از حلقه R را سره می‌نامیم هرگاه $I \neq R$. ایده‌آل $\{0\}$ از یک حلقه R را با 0 نشان می‌دهیم. مجموعه تمام ایده‌آل‌های حلقه R را با نماد $\mathcal{I}_R$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۱۱ تعریف

ایده آل I از حلقه R را در نظر بگیرید. در این صورت از آنجا که R یک گروه آبلی تحت عمل جمع است، I یک زیرگروه نرمال آن است و بنابراین گروه خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ را می توان تشکیل داد. یک عنصر دلخواه در این گروه به صورت $a+I$ است که آن را یک

هم مجموعه I در R می نامیم. برای هر $a, b \in R$ داریم

$$a+I = b+I \Leftrightarrow a-b \in I,$$

$$(a+I) + (b+I) = (a+b) + I.$$

این گروه، آبلی و همراه با عمل ضرب به صورت زیر یک حلقه است.

$$(a+I)(b+I) = ab + I.$$

در این حلقه عنصر صفر، $0+I=I$ و $1+I$ عنصر واحد است.

نگاشت $f: R \rightarrow \frac{R}{I}$ با ضابطه تعریف $f(a) = a+I$ ، برای هر $a \in R$ ، یک

همریختی حلقه ها است که آن را همریختی طبیعی می نامیم.

۱-۱-۱۲ قضیه [۸]

فرض کنید $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه ها باشد. در این صورت

(الف) اگر I یک ایده آل از R باشد، آنگاه $f(I)$ یک زیرحلقه از S است. به علاوه،

اگر f پوشا باشد، آنگاه $f(I)$ ایده آلی از S است.

(ب) اگر J یک ایده آل از S باشد، آنگاه $f^{-1}(J)$ یک ایده آل از R است.

۱-۱-۱۳ تعریف

فرض کنید $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه ها باشد.

(الف) هسته f که آن را با $\text{Ker} f$ نشان می دهیم عبارت است از

$$\text{Ker} f = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$$

(ب) تصویر f که آن را با $\text{Im} f$ نشان می دهیم برابر است با

$$\text{Im} f = f(R) = \{f(a) \mid a \in R\}.$$

توجه کنید که هسته f یک ایده آل از R و تصویر f یک زیرحلقه S است.

۱-۱-۱۴ لم [۷]

فرض کنید $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ها باشد. در این صورت f یک به یک است اگر و تنها اگر $\text{Ker} f = 0$.

۱-۱-۱۵ قضیه [۸]

فرض کنید $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ها باشد. اگر I یک ایده‌آل از R باشد که $I \subseteq \text{Ker} f$ ، آنگاه نگاشت القایی $\bar{f}: \frac{R}{I} \rightarrow S$ با ضابطه تعریف $\bar{f}(a+I) = f(a)$ یک همریختی حلقه‌ها است و $\text{Ker} \bar{f} = \frac{\text{Ker} f}{I}$ اگر $I = \text{Ker} f$ آنگاه $\bar{f}$ یک تک‌ریختی حلقه‌ها است و $\frac{R}{\text{Ker} f} \cong \text{Im} f$.

۱-۱-۱۶ قضیه [۸]

فرض کنید $f: R \rightarrow S$ یک بروریختی حلقه‌ها باشد. در این صورت یک تناظر یک به یک بین ایده‌آل‌های J از R که شامل $\text{Ker} f$ هستند و ایده‌آل‌های K از S وجود دارد. در این تناظر اگر K متناظر J باشد، آنگاه $K = f(J)$ و $J = f^{-1}(K)$.

۱-۱-۱۷ نتیجه [۸]

فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R باشد. در این صورت یک تناظر یک به یک بین ایده‌آل‌های J از R که شامل I هستند و ایده‌آل‌های K از $\frac{R}{I}$ وجود دارد. در این تناظر اگر K متناظر J باشد، آنگاه $K = \frac{J}{I}$.

۱-۱-۱۸ تعریف

فرض کنید R یک حلقه و I و J دو ایده‌آل از R باشند. در این صورت حاصل جمع I و J را به صورت

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$$

تعریف می‌کنیم.

می توان دید که حاصل جمع فوق کوچک ترین ایده آل از R است که شامل I و J است. این مفهوم را می توان به هر خانواده $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ از ایده آل های R نیز تعمیم داد. تعریف می کنیم

$$\sum I_\lambda = \left\{ \sum a_\lambda \mid a_\lambda \in I_\lambda, \text{ صفرند همگی متناهی} \right\}.$$

این حاصل جمع کوچک ترین ایده آل از R است که شامل I_λ ها است. توجه کنید که $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ نیز ایده آلی از R است.

۱-۱-۱۹ قضیه

فرض کنید R یک حلقه باشد.

(الف) اگر I و J دوایده آل از R باشند به طوری که $I \subseteq J$ ، آنگاه

$$\frac{R/I}{J/I} \cong \frac{R}{J}$$

(ب) اگر I و J دوایده آل از R باشند، آنگاه

$$\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$$

برهان. (الف) نگاشت $f: \frac{R}{I} \rightarrow \frac{R}{J}$ با ضابطه تعریف $f(a+I) = a+J$ یک بروریختی حلقه ها است و می توان دید که $\text{Ker} f = \frac{J}{I}$. بنابراین از قضیه ۱-۱-۱۵، حکم حاصل می شود.

(ب) نگاشت $g: I \rightarrow \frac{I+J}{J}$ با ضابطه تعریف، برای هر $a \in I$ ، $g(a) = a+J$ یک بروریختی حلقه ها است و می توان دید که $\text{Ker} g = I \cap J$. بنابراین با استفاده مجدد از قضیه ۱-۱-۱۵، حکم حاصل می شود. حاصل ضرب دوایده آل را به صورت زیر تعریف می کنیم.

۱-۱-۲۰ تعریف

فرض کنید I و J ایده آل هایی از حلقه R باشند. در این صورت حاصل ضرب IJ را به شکل

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N} \right\}$$

تعریف می‌کنیم.

توجه کنید که IJ ایده‌آلی از R است.

۱-۱-۲۱ نمادگذاری و تعریف

فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R و X یک زیرمجموعه ناتهی از R باشد. ایده‌آل

$$\{r \in R \mid rX \subseteq I\},$$

را با نماد $(I : X)$ یا به‌منظور تأکید روی R با نماد $(I :_R X)$ نشان می‌دهیم. برای

$a \in R$ ، از نماد $(I :_R a)$ به‌جای $(I : \{a\})$ استفاده می‌کنیم.

درحالت خاص، اگر $I = 0$ ، ایده‌آل

$$(0 : X) = \{r \in R \mid rX = 0\}$$

را پوچ‌ساز X نامیده و با نماد $\text{Ann}(X)$ (یا $\text{Ann}_R(X)$) نشان می‌دهیم. برای

$a \in R$ ، $(0 : a)$ را پوچ‌ساز a می‌نامیم و با $\text{ann}(a)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۲۲ تعریف

فرض کنید R یک حلقه و X یک زیرمجموعه از R باشد. ایده‌آل تولیدشده توسط X را

با نماد (X) (و یا با نماد RX) نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت کوچک‌ترین ایده‌آل از R

که شامل X است تعریف می‌کنیم. به‌عبارت معادل، ایده‌آل تولیدشده توسط X اشتراک

همه ایده‌آل‌های I از R است که شامل X هستند.

می‌توان ثابت کرد که

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(برای اثبات این تساوی به [۸] رجوع کنید.)

اگر $I = (X)$ ، آنگاه X را یک مجموعه مولد I و هر عنصر X را یک مولد I

می‌نامیم.