



## راهنمای آمار استنباطی در علوم تربیتی و روان‌شناسی

(رشته روان‌شناسی)

معصومه مسلمی‌مهنی      فرهنگ کرمی‌پور

## بسم الله الرحمن الرحيم

### پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

**کتاب درسی** ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

**متن آزمایشگاهی (م)** راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

**کتاب‌های فرادرسی (ف) و کمک‌درسی (ک)** به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

## فهرست مطالب

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| پیشگفتار                            | ۱-۱   |
| راهنمای مطالعه                      | ۱-۱-۱ |
| فصل اول: اصول و قواعد احتمالات      | ۱-۱-۱ |
| مقدمه                               | ۱-۱-۱ |
| ۱-۱. مفهوم آمار                     | ۱-۱-۱ |
| ۱-۱-۱. آمار توصیفی                  | ۱-۱-۱ |
| ۱-۱-۲. آمار استنباطی                | ۱-۱-۲ |
| ۱-۲. دلیل احتمالات در آمار استنباطی | ۱-۲-۱ |
| ۱-۲-۱. پیشامد تصادفی                | ۱-۲-۱ |
| ۱-۲-۲. نظریه احتمالات               | ۱-۲-۲ |
| ۱-۳. تعاریف واژه‌ها در احتمالات     | ۱-۳-۱ |
| ۱-۳-۱. فضای نمونه                   | ۱-۳-۱ |
| ۱-۳-۲. پیشامد                       | ۱-۳-۲ |
| ۱-۳-۳. حکم احتمال                   | ۱-۳-۳ |
| ۱-۳-۴. پیشامد ابتدایی               | ۱-۳-۴ |
| ۱-۴. انواع احتمال                   | ۱-۴-۱ |
| ۱-۴-۱. احتمال نظری                  | ۱-۴-۱ |
| ۱-۴-۲. احتمال تجربی                 | ۱-۴-۲ |
| ۱-۵. مجموعه‌ها و احتمالات           | ۱-۵-۱ |
| ۱-۵-۱. مجموعه                       | ۱-۵-۱ |
| ۱-۵-۲. اجتماع دو مجموعه             | ۱-۵-۲ |
| ۱-۵-۳. اشتراک دو مجموعه             | ۱-۵-۳ |
| ۱-۶. احتمالات ترکیبی                | ۱-۶-۱ |
| ۱-۶-۱. قوانین جمع احتمالات          | ۱-۶-۱ |
| ۱-۶-۲. قوانین ضرب احتمالات          | ۱-۶-۲ |

|    |                                              |
|----|----------------------------------------------|
| ۱۳ | ۱-۶-۳. احتمالات شرطی                         |
| ۱۴ | ۱-۷-۷. فنون شمارش                            |
| ۱۴ | ۱-۷-۱. جایگشت                                |
| ۱۴ | ۱-۷-۲. ترکیب                                 |
| ۱۵ | ۱-۸-۸. متغیرهای تصادفی                       |
| ۱۵ | ۱-۸-۱. متغیر تصادفی گسسته                    |
| ۱۶ | ۱-۸-۲. متغیر تصادفی پیوسته                   |
| ۱۶ | ۱-۹-۹. توزیع دوجمله‌ای                       |
| ۱۶ | ۱-۹-۱. احتمال $m$ پیشامد مساعد در $n$ آزمایش |
| ۱۷ | ۱-۹-۲. توزیع فراوانی دوجمله‌ای               |
| ۱۷ | ۱-۹-۳. منحنی توزیع دوجمله‌ای                 |
| ۱۸ | ۱-۹-۴. میانگین و واریانس توزیع احتمال        |
| ۱۹ | خودآزمایی‌های فصل اول                        |
| ۲۷ | خودآزمایی‌های پایان فصل اول                  |
| ۳۶ | سؤالات چهارگزینه‌ای فصل اول                  |
| ۴۲ | پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای فصل اول         |
| ۴۳ | پاسخنامه تشریحی سؤالات چهارگزینه‌ای فصل اول  |

|    |                                           |
|----|-------------------------------------------|
| ۵۱ | <b>فصل دوم: آمار استنباطی و اهداف آن</b>  |
| ۵۱ | ۲-۱. مقدمه                                |
| ۵۱ | ۲-۲. اهداف آمار                           |
| ۵۱ | ۲-۲-۱. هدف آمار توصیفی                    |
| ۵۲ | ۲-۲-۲. هدف آمار استنباطی                  |
| ۵۲ | ۲-۳. روش‌های صحیح نمونه‌گیری              |
| ۵۲ | ۲-۳-۱. نمونه‌گیری تصادفی ساده             |
| ۵۳ | ۲-۳-۲. نمونه‌گیری تصادفی منظم (سیستماتیک) |
| ۵۴ | ۲-۳-۳. نمونه‌گیری تصادفی طبقه‌ای          |
| ۵۵ | ۲-۳-۴. نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای          |
| ۵۵ | ۲-۴. خطای نمونه‌گیری                      |
| ۵۶ | ۲-۵. خطای استاندارد میانگین               |
| ۵۷ | ۲-۶. آزمون فرض                            |
| ۵۷ | ۲-۶-۱. فرضیه آماری                        |
| ۵۸ | ۲-۷. خطا در تصمیم‌گیری                    |
| ۵۸ | ۲-۷-۱. خطای نوع اول                       |
| ۵۸ | ۲-۷-۲. خطای نوع دوم                       |
| ۵۹ | ۲-۸. توان آزمون                           |
| ۶۰ | ۲-۹. سطح معنادار                          |
| ۶۰ | ۲-۱۰. آزمون‌های یک‌دامنه و دودامنه        |

|    |                                             |
|----|---------------------------------------------|
| ۶۰ | ۱-۱۰-۲. آزمون یک دامنه                      |
| ۶۱ | ۲-۱۰-۲. آزمون دو دامنه                      |
| ۶۱ | ۱۱-۲. تفسیر تأیید یا رد فرض صفر             |
| ۶۱ | ۲-۱۱-۱. تأیید فرض صفر                       |
| ۶۱ | ۲-۱۱-۲. رد فرض صفر                          |
| ۶۱ | خودآزمایی‌های فصل دوم                       |
| ۶۶ | خودآزمایی‌های پایان فصل دوم                 |
| ۷۳ | سؤالات چهارگزینه‌ای فصل دوم                 |
| ۷۹ | پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای فصل دوم        |
| ۸۰ | پاسخنامه تشریحی سؤالات چهارگزینه‌ای فصل دوم |

|     |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| ۸۷  | <b>فصل سوم: توزیع نرمال و آزمون Z</b>                |
| ۸۷  | مقدمه                                                |
| ۸۷  | ۳-۱. کاربرد آزمون Z                                  |
| ۸۷  | ۳-۲. یادآوری مباحث منحنی طبیعی در آمار توصیفی        |
| ۸۷  | ۳-۲-۱. منحنی طبیعی                                   |
| ۸۸  | ۳-۲-۲. مقایسه توزیع‌های گسسته و پیوسته و منحنی طبیعی |
| ۸۸  | ۳-۲-۳. معادله‌ی منحنی طبیعی                          |
| ۸۹  | ۳-۲-۴. ویژگی‌های توزیع طبیعی                         |
| ۸۹  | ۳-۲-۵. سطح منحنی Z                                   |
| ۹۰  | ۳-۳. توزیع منحنی طبیعی و آزمون Z در آمار استنباطی    |
| ۹۰  | ۳-۳-۱. نظریه‌ی نمونه‌برداری                          |
| ۹۰  | ۳-۳-۲. قانون اعداد بزرگ                              |
| ۹۱  | ۳-۳-۳. توزیع میانگین‌های نمونه                       |
| ۹۱  | ۳-۳-۴. آزمون Z تک‌نمونه‌ای برای میانگین جامعه        |
| ۹۲  | ۳-۴. برآورد                                          |
| ۹۲  | ۳-۴-۱. برآورد فاصله‌ای با استفاده از توزیع Z         |
| ۹۳  | خودآزمایی‌های فصل سوم                                |
| ۹۶  | خودآزمایی‌های پایان فصل سوم                          |
| ۱۰۰ | سؤالات چهارگزینه‌ای فصل سوم                          |
| ۱۰۳ | پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای فصل سوم                 |
| ۱۰۴ | پاسخنامه تشریحی سؤالات چهارگزینه‌ای فصل سوم          |

|     |                               |
|-----|-------------------------------|
| ۱۰۹ | <b>فصل چهارم: آزمون‌های t</b> |
| ۱۰۹ | مقدمه                         |
| ۱۰۹ | ۴-۱. کاربرد آزمون t           |
| ۱۰۹ | ۴-۲. انواع توزیع t            |
| ۱۱۰ | ۴-۲-۱. آزمون t تک‌نمونه‌ای    |

|     |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| ۱۱۰ | ۲-۲-۴. تفاوت آزمون $t$ با $Z$                        |
| ۱۱۰ | ۳-۲-۴. خانواده توزیع $t$ و درجه آزادی                |
| ۱۱۱ | ۴-۲-۴. شکل توزیع $t$                                 |
| ۱۱۲ | ۵-۲-۴. مراحل محاسبه‌ی آزمون $t$ تک‌نمونه‌ای          |
| ۱۱۲ | ۶-۲-۴. فاصله اطمینان $t$ استودنت                     |
| ۱۱۴ | ۳-۴. آزمون $t$ برای دو نمونه‌ی مستقل                 |
| ۱۱۴ | ۱-۳-۴. روش انحراف نمرات از میانگین                   |
| ۱۱۵ | ۲-۳-۴. روش نمره‌های خام                              |
| ۱۱۵ | ۳-۳-۴. مراحل محاسبه‌ی $t$ برای دو نمونه مستقل        |
| ۱۱۹ | ۴-۴. آزمون $t$ برای دو نمونه‌ی وابسته                |
| ۱۱۹ | ۱-۴-۴. انواع نمونه‌های وابسته:                       |
| ۱۲۰ | ۲-۴-۴. مراحل محاسبه‌ی $t$ دو نمونه‌ی وابسته          |
| ۱۲۲ | ۵-۴. مفروضات آزمون $t$ در مقایسه میانگین‌های دو گروه |
| ۱۲۲ | خودآزمایی‌های فصل چهارم                              |
| ۱۳۵ | خودآزمایی‌های پایان فصل چهارم                        |
| ۱۴۱ | سؤالات چهارگزینه‌ای فصل چهارم                        |
| ۱۴۷ | پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای فصل چهارم               |
| ۱۴۸ | پاسخنامه تشریحی سؤالات چهارگزینه‌ای فصل چهارم        |

|     |                                                               |
|-----|---------------------------------------------------------------|
| ۱۵۷ | <b>فصل پنجم: تجزیه و تحلیل واریانس</b>                        |
| ۱۵۷ | مقدمه                                                         |
| ۱۵۷ | ۱-۵. کاربرد آزمون $F$                                         |
| ۱۵۸ | ۲-۵. تجزیه و تحلیل واریانس                                    |
| ۱۵۸ | ۱-۲-۵. انواع روش‌های تجزیه و تحلیل واریانس                    |
| ۱۵۸ | ۲-۲-۵. مفهوم تجزیه و تحلیل واریانس                            |
| ۱۵۹ | ۳-۵. مجموع مجذورات ( $SS$ )                                   |
| ۱۵۹ | ۱-۳-۵. محاسبه مجموع مجذورات (پراکندگی یا تغییرات یا واریانس)  |
| ۱۶۰ | ۲-۳-۵. محاسبه میانگین مجذورات ( $MS$ ) و درجه آزادی ( $d.f$ ) |
| ۱۶۰ | ۴-۵. مراحل محاسبه آزمون $F$                                   |
| ۱۶۵ | ۱-۴-۵. تفسیر نتایج آزمون $F$                                  |
| ۱۶۵ | ۵-۵. مفروضات تجزیه و تحلیل واریانس                            |
| ۱۶۵ | ۶-۵. روش‌های مختلف مقایسه میانگین‌ها در تحلیل واریانس         |
| ۱۶۵ | ۱-۶-۵. مقایسه میانگین‌های طرح‌ریزی شده (پیشین)                |
| ۱۶۶ | ۲-۶-۵. مقایسه میانگین‌ها بعد از تجربه (پسین)                  |
| ۱۶۷ | خودآزمایی‌های فصل پنجم                                        |
| ۱۸۲ | خودآزمایی‌های پایان فصل پنجم                                  |
| ۱۹۰ | سؤالات چهارگزینه‌ای فصل پنجم                                  |
| ۱۹۴ | پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای فصل پنجم                         |

|     |                                                                 |
|-----|-----------------------------------------------------------------|
| ۲۰۱ | فصل ششم: آزمون‌های خی دو                                        |
| ۲۰۱ | ۱-۶. مقدمه                                                      |
| ۲۰۱ | ۲-۶. آزمون‌های معنادار پارامتریک                                |
| ۲۰۲ | ۳-۶. آزمون‌های غیرپارامتریک                                     |
| ۲۰۲ | ۴-۶. آزمون $\chi^2$                                             |
| ۲۰۲ | ۴-۶. ۱. آزمون خی دو، یک‌متغیری                                  |
| ۲۰۶ | ۴-۶. ۲. تصحیح یتس در $\chi^2$ یک‌متغیری                         |
| ۲۰۷ | ۵-۶. آزمون $\chi^2$ دو‌متغیری (آزمون استقلال)                   |
| ۲۰۷ | ۵-۶. ۱. مراحل محاسبه آزمون $\chi^2$ دو‌متغیری                   |
| ۲۰۹ | ۵-۶. ۲. تصحیح $\chi^2$ دو‌متغیری (در جدول توافقی $2 \times 2$ ) |
| ۲۱۲ | ۶-۶. مفروضه‌های آزمون $\chi^2$                                  |
| ۲۱۲ | ۷-۶. ادغام سطح‌های یک متغیر در آزمون $\chi^2$                   |
| ۲۱۳ | خودآزمایی‌های فصل ششم                                           |
| ۲۲۶ | خودآزمایی‌های پایان فصل ششم                                     |
| ۲۳۳ | سؤالات چهارگزینه‌ای فصل ششم                                     |
| ۲۳۸ | پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای فصل ششم                            |
| ۲۳۹ | پاسخنامه تشریحی سؤالات چهارگزینه‌ای فصل ششم                     |

### پیشگفتار

در دنیای مدرن امروزی مفهوم «آمار» به یک ضرورت تبدیل شده است؛ و برای محققان و دانشجویان روزبه‌روز این ضرورت بیشتر می‌شود. در همین راستا کتاب حاضر می‌تواند دانشجویان رشته علوم تربیتی و روانشناسی را با آمار استنباطی آشنا نماید و راهنمای جامعی باشد برای کسانی که قصد ادامه تحصیل در مقاطع بالاتر را دارند. علت اصلی تألیف این کتاب انتقال تجربه چندساله مؤلفین در دانشگاه‌های پیام‌نور و آشنایی با مسائل و مشکلات دانشجویان در یادگیری این درس بوده است. این کتاب راهنمای جامع «روش‌های آمار استنباطی در روانشناسی و علوم تربیتی» تألیف دکتر مهناز علی‌اکبری و دکتر فرهاد شقاقی است و دارای ۶ فصل است که هر فصل شامل خلاصه جامع و کامل، حل خودآزمایی‌های داخل و پایان هر فصل، مجموعه‌ای از تست‌ها، همراه با پاسخ تشریحی آن است. در پایان از مرکز تألیف و گروه علوم تربیتی و روانشناسی سازمان مرکزی پیام‌نور و تمام کسانی که ما را در تهیه و تنظیم این کتاب کمک کرده‌اند کمال تشکر و قدردانی را داریم.



### راهنمای مطالعه

این کتاب راهنمای جامع کتاب روش‌های آمار استنباطی در روانشناسی و علوم تربیتی، نوشته دکتر مهناز علی‌اکبری و دکتر فرهاد شقاقی است.

کتاب حاضر ۶ فصل دارد که در ابتدای هر فصل خلاصه‌ای کامل و مفید از مطالب کتاب اصلی، سایر کتاب‌ها، معلومات و تجربه شخصی نوشته شده است. در این خلاصه برای هر موضوع مثال‌هایی همراه با پاسخ تشریحی آمده است. در قسمت بعدی، کلیه خودآزمایی‌های داخل و پایان هر فصل با پاسخ تشریحی آن آورده است. با توجه به این که امتحانات پایان ترم دانشگاه پیام‌نور به صورت تستی است، بنابراین در پایان هر فصل، سؤالات چهارگزینه‌ای همراه با پاسخ تشریحی آنها آمده است که معمولاً از سؤالات سال‌های قبل هم استفاده شده است. بنابراین جهت درک و فهم و کاربردی کردن درس آمار استنباطی بسیار مفید است. همچنین برای کسانی که قصد ادامه تحصیل در مقاطع بالا را دارند، می‌تواند بسیار مؤثر واقع شود. در پایان از اساتید مکرم و دانشجویان محترم خواهشمندیم ما را از راهنمایی‌های خود برخوردار سازند.

تابستان ۱۳۹۲

معصومه مسلمی مهنی

فرهنگ کرمی‌پور

[Farhang.karamipoor@yahoo.com](mailto:Farhang.karamipoor@yahoo.com)



# فصل اول

## اصول و قواعد احتمالات

### مقدمه

در این فصل ابتدا به دلیل مطالعه احتمالات در آمار استنباطی به مبحث اصول و قواعد احتمالات پرداخته می‌شود. باید توجه داشت که عمده فعالیت‌ها در آمار استنباطی مشخص کردن احتمال درستی یا نادرستی استنباط است. پس از آن نظریه‌ی احتمالات، حکم احتمال، انواع احتمال، مجموعه و احتمالات معرفی می‌شوند.

چون ما در احتمالات می‌توانیم پیشامدهای ترکیبی داشته باشیم بنابراین مباحث بعدی بیانگر «احتمالات ترکیبی» است. سپس قوانین شمارش، جایگشت و ترکیب که به آرایش اشیاء مربوط است مطرح می‌شود. در پایان فصل متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته مطرح شده است و توزیع دوجمله‌ای یکی از مهم‌ترین متغیرهای تصادفی گسسته است و بیانگر این است اگر یک رویداد با دو پیشامد به دفعات تکرار شود، توزیعی درست می‌شود که به آن توزیع دوجمله‌ای می‌گویند.

### ۱-۱. مفهوم آمار

کلمه آمار<sup>۱</sup> از ریشه‌ی کلمه سیاستمدار<sup>۲</sup> گرفته شده است و در لغت به معنای شمارش است و نیز در اصطلاح عام به معنای اعداد و ارقام است، مانند ارقام دانشجویان پیام‌نور

---

1- Statistics

2- Satista

کشور.

صاحب‌نظران علم آمار، اصطلاح آمار را در دو مفهوم و معنا به کار می‌برند: در مفهوم اول، آمار عبارت است از حقیقت‌هایی که به‌صورت ارقام و اعداد در جداول مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مفهوم دوم، آمار استفاده از تکنیک‌ها و روش‌های جمع‌آوری، طبقه‌بندی، خلاصه‌کردن، تجزیه و تحلیل، استنتاج و تفسیر اطلاعات به منظور عینیت بخشیدن به داده‌ها و تصمیم‌گیری درست از اطلاعات به‌دست آمده است.

روش‌های آماری از نظر حیطه‌ی عمل و کاربرد، به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- ۱- آمار توصیفی<sup>۱</sup>
- ۲- آمار استنباطی<sup>۲</sup>

#### ۱-۱-۱. آمار توصیفی

در روش آمار توصیفی، داده‌ها به‌وسیله‌ی شاخص‌های مرکزی (نمنا، میانه و میانگین)، شاخص‌های پراکندگی (دامنه‌ی تغییرات، انحراف چارکی و انحراف معیار و...) در قالب جدول‌ها، نمودارها و تحلیل‌های ریاضی طبقه‌بندی، خلاصه و توصیف می‌شوند.

#### ۱-۱-۲. آمار استنباطی

در این روش براساس اطلاعات نمونه، خصوصیات جامعه آماری استنباط می‌شود و نتایج بدست آمده از نمونه به جامعه‌ی مربوطه تعمیم داده می‌شود. به عبارت دیگر اندازه‌های جامعه از روی اندازه‌های نمونه‌ای که افرادش به‌صورت تصادفی از آن جامعه انتخاب می‌شوند، برآورد می‌شود.

#### ۱-۲. دلیل مبحث احتمالات در آمار استنباطی

انسان برای پیش‌بینی و استنباط رویدادهایی که در حال تغییر و تحول است نیاز به مفاهیمی از جمله احتمال و شانس دارد. علم پیشامدهای تصادفی یا احتمالات، حلقه‌ی اتصال آمار توصیفی به آمار استنباطی است. به‌گونه‌ای که احتمال جزء لاینفک علم آمار محسوب می‌شود چنانچه آمار استنباطی بدون بهره‌گیری از احتمالات قابل اعتماد

1- Descriptive Statistics

2- Inferential Statistics

### ۳ اصول و قواعد احتمالات

نمی‌باشد و علم احتمالات بدون کاربرد در آمار فایده عملی ندارد. به همین دلیل کار عمده‌ی کارشناسان آماری تعیین احتمال حوادث و رویدادهای مختلفی که در زندگی روزمره اتفاق می‌افتد در این راستا در فصل حاضر به توصیف و تفسیر احتمال و اصول مربوط به آن، انواع احتمال و قوانین ضرب و جمع احتمال و در آخرتوزیع دو جمله‌ای مورد بحث قرار می‌گیرد.

#### ۱-۲-۱. پیشامد تصادفی<sup>۱</sup>

پیشامدهایی که علت آنها بر ما معلوم نیست و پیامد آن هم قابل پیش‌بینی نباشد، را پیشامد تصادفی می‌گویند. قوانین پیشامدهای تصادفی غیرقابل پیش‌بینی است. و در ریاضیات در بخش نظریه‌ی احتمالات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۱-۲-۲. نظریه احتمالات<sup>۲</sup>

درست‌نمایی اتفاق افتادن حادثه را احتمال گویند. به عبارت دیگر احتمال: نسبت اتفاق افتادن حادثه‌ای است که انتظار وقوع آن می‌رود.

احتمالات مبحثی از ریاضیات است که اصول پیش‌بینی و روش‌های برآورد پیشامدهای تکرارشده را مطرح می‌کند.

احتمال را با  $p$  نشان می‌دهند که دامنه‌ی احتمال از ۰ تا ۱ است  $(0 \leq p \leq 1)$ .  $p = 1 = 100\%$  احتمال پیشامدی که وقوع آن قطعی و حتمی است، و  $p = 0$  احتمال پیشامدی است که اصلاً اتفاق نمی‌افتد.

### ۱-۳. تعاریف واژه‌ها در احتمالات

#### ۱-۳-۱. فضای نمونه<sup>۳</sup>

مجموعه‌ای از نقاط که معرف رویدادها، اشیاء یا چیزها هستند، و یا مجموعه‌ای از نقاط یا عناصر که نماینده‌ی هر چیزی (افراد، اعداد، توپ‌ها و...) باشند را فضای نمونه گویند؛ و آن را با  $S$  نمایش می‌دهند.

---

1- Random events

2- Phobability

3- Sample space

مثال: فضای نمونه‌ی یک تاس را بنویسید.

حل: چون تاس ۶ حالت دارد، پس فضای نمونه عبارت است از:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

### ۱-۳-۲. پیشامد

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه یک پیشامد گویند. یا یک رویداد قابل تشخیص که در خصوص یک فضای نمونه مطرح است.

پیشامد را با حروف بزرگ A، B، C و... نمایش می‌دهند. همچنین احتمال وقوع پیشامد را با p نشان می‌دهند. مثلاً  $p(C)$  یعنی: احتمال وقوع پیشامد C و احتمال عدم وقوع پیشامد معین را با q نشان می‌دهند ( $q = 1 - p$ ).  
تذکر: مجموع p و q برابر با یک است.

$$p + q = 1 = 100\%$$

در کلاس آمار استنباطی ۵۰ دانشجو حضور دارند، ۴۰ نفر آن دختر است، اگر یک نفر را به عنوان نماینده انتخاب کنیم، احتمال این که دختر باشد، چند درصد است؟ احتمال این که دختر نباشد چند درصد است؟  
حل:

$$\text{الف) } p(\text{نماینده دختر باشد}) = \frac{40}{50} = 80\%$$

$$\text{ب) } q = 1 - p = 1 - 80\% = 20\%$$

### ۱-۳-۳. حکم احتمال

درباره‌ی وقوع پیشامدی که به یک فضای نمونه مربوط است حکم احتمال می‌گویند.

$$p(C) = \frac{\text{تعداد نقاط } C}{\text{تعداد کل نقاط فضای نمونه } (S)}$$

### ۱-۳-۴. پیشامد ابتدایی

پیشامد ابتدایی، یک نقطه‌ی فضای نمونه است. یعنی به تعداد نقاط فضای نمونه، پیشامد ابتدایی وجود دارد. به عنوان مثال در یک تاس ۶ پیشامد ابتدایی وجود دارد.

## ۵ اصول و قواعد احتمالات

مثال: در یک کیسه ۱۰ مهره قرمز و ۸ مهره سبز است؛ فضای نمونه، پیشامد، حکم احتمال، پیشامد ابتدایی و مجموع احتمالات را نشان دهید.

فضای نمونه:  $S = \{۸ \text{ مهره سبز} + ۱۰ \text{ مهره قرمز}\}$   
پیشامد:

$p(A) =$  پیشامد قرمز بودن مهره

$p(B) =$  پیشامد سبز بودن مهره

حکم احتمال:

$$p(A) = \frac{\text{تعداد نقاط } A}{S} = \frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵۶}{۱۰۰} = ۵۶\%$$

$$p(B) = \frac{\text{تعداد نقاط } B}{S} = \frac{۸}{۱۸} = \frac{۴۴}{۱۰۰} = ۴۴\%$$

پیشامد ابتدایی:

به تعداد نقاط فضای نمونه ۱۸ پیشامد ابتدایی وجود دارد.

مجموع احتمالات:

احتمال پیشامد مهره سبز + احتمال پیشامد مهره قرمز

$$p(A) + p(B) = ۵۶\% + ۴۴\% = ۱۰۰\% = ۱$$

## ۴-۱. انواع احتمال

### ۴-۱-۱. احتمال نظری

احتمال وقوع یک پیشامد براساس تقسیم تعداد نقاط یا عناصر یک پیشامد بر تعداد کل نقاط یا اعضای نمونه است.

$$\text{احتمال نظری} = \frac{\text{عناصر یک پیشامد}}{\text{اعضای نمونه}} \text{ یا } \frac{\text{تعداد نقاط یک پیشامد}}{\text{تعداد کل نقاط}}$$

مثال: احتمال آمدن عدد فرد در پرتاب یک تاس را بنویسید.

$$S = \{۱, ۳, ۵\} \quad \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} = ۵۰\%$$

### ۱-۴-۲. احتمال تجربی

مشاهده و آزمایش پیشامد در وضعیت عملی و تجربی است.

$$\text{فرآوانی مشاهده شده پیشامد} = \frac{\text{حجم نمونه آزمایشی}}{\text{حجم فضای نمونه}} = \text{احتمال تجربی}$$

تذکر: احتمال تجربی براساس مفروضات تجربی است.

مثال: از بین تعداد ۲۰ مسابقه‌ای که تاکنون بین تیم‌های شاهد و فجر صورت گرفته ۱۵ بار تیم شاهد برده است، اگر هم اکنون بین این دو تیم مسابقه باشد، احتمال این که تیم شاهد برنده شود چه مقدار است؟

$$p(\text{برد تیم شاهد}) = \frac{15}{20} = 75\%$$

رابطه‌ی احتمال نظری با احتمال تجربی:

- هرگاه تعداد آزمایش‌ها به سمت بی‌نهایت میل کند، تفاضل آن دو به صفر نزدیک می‌شود.

- احتمال نظری از یک مدل نظری تبعیت می‌کند، در حالی که احتمال تجربی از مدل تجربه تبعیت می‌کند.

### ۱-۵-۵. مجموعه‌ها و احتمالات

نظریه‌ی مجموعه‌ها یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضیات است که در آمار و احتمالات کاربرد زیادی دارد. بنابراین قبل از بحث احتمالات ترکیبی، در مورد مجموعه، اجتماع دو مجموعه و اشتراک دو مجموعه توضیحاتی داده می‌شود.

#### ۱-۵-۱. مجموعه

- گروهی از اشیاء، عناصر، رویدادها و به‌طور کلی «اعضا» تشکیل یک مجموعه را می‌دهند.

مجموعه را با حروف بزرگ مانند A, B, C و ... و  $\{ \}$  یعنی آکولاد نشان می‌دهند و  $\in$  علامت عضویت است.

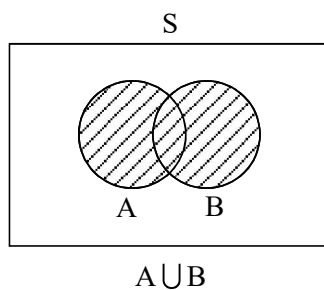
مثال:  $A = \{2, 4, 6\}$  یعنی: A مجموعه‌ای با اعضای ۲، ۴ و ۶ است.



$2 \in A$  یعنی: ۲ عضو مجموعه‌ی  $A$  است.

### ۱-۵-۲. اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه  $(A \cup B)$  یعنی  $p(A \text{ یا } B)$



تعریف اجتماع: مجموعه‌ای که اعضای آن در مجموعه‌ی  $A$  یا در مجموعه‌ی  $B$  باشد.

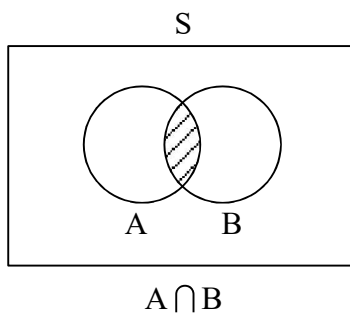
مثال: اجتماع دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  را بنویسید:

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \quad \text{و} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

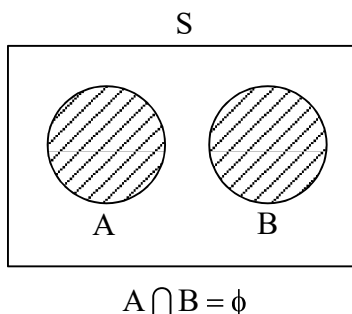
### ۱-۵-۳. اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه:  $(A \cap B)$  یعنی:  $p(A \text{ و } B)$



تعریف اشتراک: مجموعه‌ای که اعضای آن هم در مجموعه‌ی  $A$  و هم در مجموعه‌ی  $B$  باشد، یا پیشامدهایی که به هر دو مجموعه تعلق دارد.

تذکر: به دو پیشامد که هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند، مجزا می‌گویند یعنی اشتراک آنها تهی ( $\phi$ ) است.



مثال: اگر A اعداد فرد کمتر از ۹ و B اعداد کمتر از ۶ باشد، اشتراک A و B را بنویسید:

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \quad \text{و} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

مثال: اگر A اعداد فرد در تاس باشند و B اعداد زوج در تاس باشند، اجتماع و اشتراک آن دو را بنویسید.

$$A = \{1, 3, 5\} \quad \text{و} \quad B = \{2, 4, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \phi$$

### ۱-۶. احتمالات ترکیبی

احتمالات ترکیبی، بیان‌کننده‌ی آن است که در احتمالات ما می‌توانیم پیشامدهای ترکیبی داشته باشیم.

تعریف احتمالات ترکیبی: به حوادثی گویند که از دو یا چند حادثه ساده تشکیل شده باشد.

مثال: اگر در یک کیسه ۵ مهره‌ی زرد و ۴ مهره‌ی آبی باشد، «احتمال این که مهره، زرد یا آبی باشد» یک احتمال ترکیبی است.

تذکر: برای حل احتمالات ترکیبی، ابتدا باید قوانین جمع و ضرب احتمالات را بشناسیم.

### ۱-۶-۱. قوانین جمع احتمالات

کاربرد: زمانی به کار می‌رود که یکی از دو حادثه اتفاق بیفتد.

انواع قانون جمع احتمالات:

- ۱- دو پیشامد ناسازگار
- ۲- دو پیشامد سازگار

#### - جمع پیشامدهای ناسازگار<sup>۱</sup>

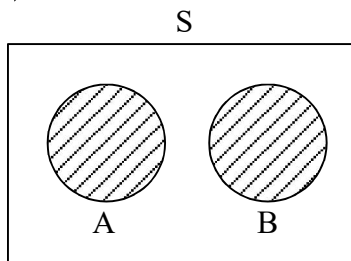
تعریف: به پیشامدهایی که وقوع یکی از آنها مانع وقوع دیگری باشد؛ یعنی دو پیشامدی که هیچ عضو مشترکی ندارند (اشتراک آنها تهی است) و مستقل از هم باشند، دو پیشامد ناسازگار می‌گویند.

مثال: خط آمدن در سکه مانع شیر آمدن می‌شود.

قضیه:

$$A \cap B = \phi$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$



مثال: اگر تاسی را پرتاب کنیم احتمال این که شماره‌ی ۵ یا ۲ بیاید چقدر است؟

حل:

$$p(5) = \frac{1}{6} \text{ و } p(2) = \frac{1}{6} \text{ و } A \cap B = \phi$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$p(2 \text{ یا } 5) = p(2) + p(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- جمع پیشامدهای سازگار

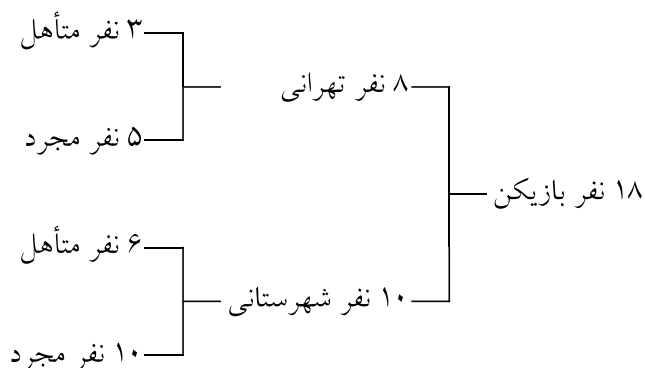
تعریف: به پیشامدهایی که امکان اتفاق آنها به صورت همزمان وجود دارد. یا دو پیشامدی که باهم سازگاری و نقطه مشترک دارند، جمع پیشامدهای سازگار گفته می‌شود.

قضیه:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

مثال: تیم ملی فوتبال شامل ۱۸ بازیکن است. اگر ۸ نفر از آنها تهرانی و ۱۰ نفر شهرستانی باشند چنانچه ۸ نفر تهرانی، ۳ نفر متأهل و ۵ نفر مجرد باشند و نیز از ۱۰ نفر شهرستانی ۶ نفر متأهل و ۴ نفر مجرد باشند، احتمال پیشامد ترکیبی که بازیکنی «تهرانی یا متأهل» باشد چقدر است؟

حل:



A: پیشامد تهرانی بودن

B: پیشامد متأهل بودن

## اصول و قواعد احتمالات ۱۱

$$p(A) = \frac{8}{18} = \frac{44}{100} = 44\%$$

احتمال پیشامد بازیکن تهرانی

$$p(B) = \frac{3}{18} + \frac{6}{18} = \frac{9}{18} = 50\%$$

احتمال پیشامد بازیکن متأهل

$$p(A \cap B) = \frac{3}{18} = 16.7\%$$

احتمال پیشامد بازیکن تهرانی و متأهل

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

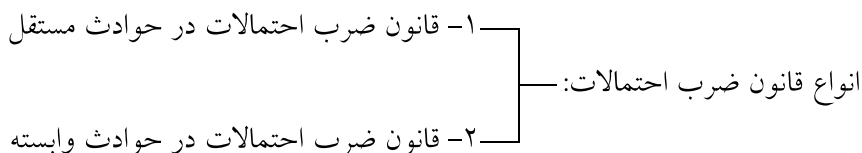
احتمال پیشامد بازیکن تهرانی یا متأهل

$$= \frac{8}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{14}{18} = 77.8\%$$

تذکر: در هر دو قضیه‌ی جمع، از اجتماع «یا» استفاده شده است.

## ۱-۶-۲. قوانین ضرب احتمالات

کاربرد: زمانی که هر دو حادثه باهم اتفاق بیفتند.



## - قاعده ضرب احتمالات در حوادث مستقل

تعریف: حوادثی که اتفاق یا عدم اتفاق هر یک در احتمال اتفاق یا عدم اتفاق حادثه دیگری تأثیر نداشته باشد.

قضیه:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

احتمال این که هر دو اتفاق بیفتند

$$p(A_1) \times p(A_2) \times \dots \times p(A_n) = p(A)^n$$

مثال: اگر ۵ تاس داشته باشیم و آنها را همزمان پرتاب کنیم احتمال این که

همه‌ی آنها شماره‌ی ۴ بیاید چقدر است؟

حل: چون تاس ۶ حالت دارد، بنابراین احتمال هر حالت  $\frac{1}{6}$  است.

$$p(A)^n = \text{احتمال تاس سوم} \times \text{احتمال تاس دوم} \times \text{احتمال تاس اول} \\ \text{احتمال تاس پنجم} \times \text{احتمال تاس چهارم} \\ = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{7776} = 0.0129$$

- قاعده ضرب احتمالات در حوادث وابسته

تعریف: حوادثی که احتمال اتفاق یا عدم اتفاق یکی از آنها به احتمال اتفاق یا عدم اتفاق دیگری بستگی داشته باشد.  
قضیه:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A) \\ = \text{احتمال پیشامد B و A}$$

احتمال اتفاق پیشامد B به شرط اتفاق پیشامد A  $\times$  احتمال پیشامد A

مثال: در یک ظرف ۱۵ مهره سبز و ۱۰ مهره زرد وجود دارد. اگر سه مهره را به ترتیب برداریم (بدون این که مهره برداشته شده را به جای خود بگذاریم) الف) احتمال این که هر سه مهره برداشته شده سبز باشد چقدر است؟ ب) احتمال این که هر سه مهره برداشته شده زرد باشد چقدر است؟  
حل:

$$25 = 15 + 10 = \text{تعداد مهره زرد} + \text{تعداد مهره سبز} = \text{کل مهره‌ها} \\ \text{الف)}$$

$$p(\text{سه مهره سبز}) = \frac{15}{25} \times \frac{14}{24} \times \frac{13}{23} = \frac{2730}{13800} = 19.8\% \\ \text{ب)}$$

$$p(\text{سه مهره زرد}) = \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{8}{23} = \frac{720}{13800} = 5.22\%$$

تذکر: برای درک قانون ضرب احتمالات در حوادث وابسته آشنایی با احتمالات شرطی ضروری است.

### ۱-۶-۳. احتمالات شرطی

تعریف: احتمال یک پیشامد است به شرط این که قبل از آن احتمالی دیگر واقع شده باشد.

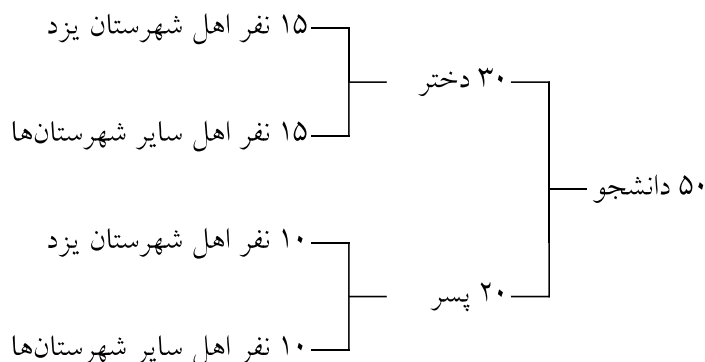
قضیه:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{و} \quad p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

تذکر: این فرمول از فرمول ضرب حوادث وابسته گرفته شده است.

مثال: در کلاس درس آمار استنباطی دانشگاه پیام نور یزد ۵۰ نفر حضور دارند که ۳۰ نفر دختر و ۲۰ نفر پسر هستند. ۱۵ دختر و ۱۰ پسر اهل شهرستان یزد هستند. اگر یک دانشجو را بخواهیم برای حج عمره برگزینیم احتمال آن که این دانشجو اهل شهرستان یزد باشد چقدر است به شرط آن که این دانشجو دختر باشد؟

حل:



A: پیشامد اهل شهرستان یزد بودن دانشجو

B: پیشامد دختر بودن دانشجو

احتمال آن که دانشجو اهل شهرستان یزد باشد:

$$p(A) = \frac{10}{50} + \frac{15}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 50\%$$

احتمال آن که دانشجو دختر باشد:

$$p(B) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 60\%$$

احتمال آن که این دانشجو اهل شهرستان یزد و دختر باشد:

$$p(A \cap B) = \frac{۱۵}{۵۰} = \frac{۳}{۱۰} = ۳۰\%$$

احتمال آن که این دانشجو اهل شهرستان یزد باشد به شرط آن که دختر باشد:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{۳}{۱۰}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۳۰\%}{۶۰\%} = ۵۰\%$$

## ۷-۱. فنون شمارش

### ۱-۷-۱. جایگشت<sup>۱</sup>

تعریف: جایگشت یا ترتیب یک مجموعه‌ی مشخص از اشیاء است. و به‌طوری که ترتیبشان مهم باشد.

توجه: فاکتوریل  $n$  یعنی حاصلضرب ۱ تا  $n$  که به‌صورت  $p_n = n!$  نمایش می‌دهیم.

مثال: تعداد جایگشت ممکن برای گروه‌های خونی  $AB$ ،  $A$ ،  $B$  و  $O$  را بنویسید:

$$p_n = n! \Rightarrow p_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = ۲۴$$

### ۲-۷-۱. ترکیب<sup>۲</sup>

تعریف: ترکیب، یک مجموعه‌ی مشخص از اشیاء است به‌طوری که ترتیبشان مهم نباشد یا مجموعه‌ی اشیاء بدون ترتیب را ترکیب می‌گویند.

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

نماد ترکیب‌های  $m$  شی از  $n$  شی:  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$

$n!$ : تعداد جایگشت‌های  $n$  شی

$m!$ : تعداد ترکیب‌های  $m$  شی