



دانشگاه پیام نور

راهنمای حل مسائل الکترومغناطیس ۱

(رشته های فیزیک هسته ای، حالت جامد، و اتمی و مولکولی)

دکتر سعید محمدی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتابهای دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف به صورت درسنامه، آزمایشی، قطعی، متون آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می شود. کتاب **درسنامه (د)** نخستین ثمره کوششهای علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصلهای مصوب تهیه می شود و پس از داوری علمی در گروههای آموزشی چاپ می شود. با دریافت بازخوردها و تجدید نظر صاحب اثر و اصلاح کتاب، درسنامه به صورت **آزمایشی (آ)** چاپ می شود. با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدید نظر می کند و کتاب به صورت **قطعی (ق)** چاپ می شود. در صورت ضرورت، در کتابهای چاپ قطعی نیز می تواند تجدیدنظرهای اساسی به عمل آید.

متون آزمایشگاهی (م) متونی است که دانشجویان با استفاده از آن و راهنمایی مربیان کارهای عملی آزمایشگاهی را انجام می دهند. **کتابهای فرادرسی (ف)** و **کمک درسی (ک)** به منظور غنی تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه می شوند. کتابهای فرادرسی با تأیید معاونت پژوهشی و کتابهای کمک درسی با تأیید شورای انتشارات تهیه می شوند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

فهرست

هفت	پیشگفتار
۱	راهنمای حل مسائل فصل اول. آنالیز برداری
۱	۱-۱ خلاصه مطالب
۳	۲-۱ مثال‌های حل شده
۷	۳-۱ پاسخ سؤالات
۲۳	راهنمای حل مسائل فصل دوم. میدان‌های الکترواستاتیک در خلاء
۲۳	۱-۲ خلاصه مطالب
۲۷	۲-۲ مثال‌های حل شده
۳۵	۳-۲ پاسخ سؤالات
۴۳	راهنمای حل مسائل فصل سوم. میدان‌های الکتریکی در مواد
۴۳	۳-۱ خلاصه مطالب
۴۵	۳-۲ مثال‌های حل شده
۴۹	۳-۳ پاسخ سؤالات
۵۹	راهنمای حل مسائل فصل چهارم. حل مسائل الکترواستاتیک
۵۹	۱-۴ خلاصه مطالب
۶۰	۲-۴ مثال‌های حل شده

۶۳	۳-۴ پاسخ سؤالات
۷۵	راهنمای حل مسائل فصل پنجم. میدان‌های مغناطواستاتیک
۷۵	۱-۵ خلاصه مطالب
۷۷	۲-۵ مثال‌های حل شده
۸۵	۳-۵ پاسخ سؤالات
۹۷	راهنمای حل مسائل فصل ششم. نیروها، مواد و ابزار مغناطیسی
۹۷	۱-۶ خلاصه مطالب
۱۰۰	۲-۶ مثال‌های حل شده
۱۰۶	۳-۶ پاسخ سؤالات
۱۱۵	راهنمای حل مسائل به کمک ممتیکا
۱۱۵	مقدمه
۱۲۳	حل مسائل به کمک نرم افزار ممتیکا

پیشگفتار

درس الکترومغناطیس به نظر اغلب دانشجویان فیزیک، مشکل‌ترین درس دوره کارشناسی است. متأسفانه اغلب کتاب‌هایی که در این زمینه به زبان فارسی نوشته و یا ترجمه شده‌اند به مفاهیم کل پرداخته و دانشجو در پایان کاربردی برای آنها نمی‌بیند. مؤلف این کتاب طی سالیان درازی که به تدریس این درس در دوره کارشناسی مشغول بوده است به این نیاز دانشجویان پی برده و سعی کرده است کتابی را تدوین کند که خلاء بین مفاهیم نظری و کاربردی را تا حد امکان پر کند.

همانطور در فهرست دیده می‌شود این کتاب در شش فصل و تعدادی پیوست تنظیم شده است. مهمترین نکاتی که در این کتاب به عنوان یک منبع خودآموز در نظر گرفته شده است عبارتند از:

- ۱- هر فصل شامل تعداد زیادی مثال‌های حل شده هم به صورت تحلیلی و هم به صورت عددی است. برای اینکه دانشجو بتواند شبیه این مثال‌ها را خودش هم حل کند تعدادی خودآزمایی با جواب در هر فصل آورده شده‌اند.

۲- در پایان هر فصل تعدادی سؤالات چند گزینه‌ای با جواب برای درک بهتر مفاهیم متن آورده شده‌اند.

۳- پاسخ تمام مسائل پایانی هر فصل همراه با مثال‌های حل شده دیگر و نیز مروری بر مطالب هر فصل به صورت یک CD جداگانه به دانشجو داده خواهد شد تا خودآموز بودن کتاب را تکمیل کند. بهتر است دانشجو ابتدا پاسخ سؤالات مروری و مسائل را به دست آورده و سپس آنها را با جواب‌های داده شده مقایسه کند.

۴- در این کتاب برای اولین بار تعدادی از مسائل مهم الکترومغناطیس با استفاده از نرم افزار ممتیکا حل شده‌اند. نحوه حل این مسائل و فایل مربوط به آنها نیز در CD فوق داده خواهد شد. چنانچه دانشجو با نرم افزار ممتیکا آشنا باشد می‌تواند با اندکی تغییر در فایل هر مسأله، جواب‌های دیگری از آن را پیدا کرده و یا به بیند. یادآوری می‌گردد که استفاده از نرم افزار ممتیکا فقط برای درک بهتر مفاهیم است و یاد گرفتن آن جزء الزامات امتحانی درس الکترومغناطیس نمی‌باشد.

در خاتمه از شورای محترم تخصصی گروه فیزیک دانشگاه پیام نور به خاطر تصویب این متن به عنوان یک کتاب درسی، از جناب آقای دکتر جمیل آریایی به خاطر راهنمایی در حل مسائل به کمک نرم افزار ممتیکا، از جناب آقای دکتر پرویز الهی به خاطر ویرایش علمی کتاب، از سرکار خانم پروا مرادی صالح به خاطر تایپ و آماده سازی متن و از کلیه همکاران گروه تدوین و انتشارات دانشگاه پیام نور تشکر و قدردانی می‌نمایم.

این کتاب را تقدیم می‌کنم به همسر و فرزندم؛ به خاطر صبر و حمایتشان.

دکتر سعید محمدی

دانشیار فیزیک هسته‌ای دانشگاه پیام نور

بهمن ۱۳۸۶

راهنمای حل مسائل فصل اول

آنالیز برداری

۱-۱ خلاصه مطالب

۱- نقطه P به ترتیب به صورت $P(x, y, z)$, $P(\rho, \varphi, z)$ و $P(r, \theta, \varphi)$ در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی بیان می‌شود. یک میدان برداری $\vec{A}$ به صورت (A_x, A_y, A_z) یا $A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$ در دستگاه دکارتی، به صورت (A_ρ, A_φ, A_z) یا $A_\rho\hat{a}_\rho + A_\varphi\hat{a}_\varphi + A_z\hat{a}_z$ در دستگاه استوانه‌ای و به صورت (A_r, A_θ, A_z) یا $A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_z\hat{a}_z$ در دستگاه کروی نمایش داده می‌شود. تبدیلات نقطه‌ای یا برداری را می‌توان از یک دستگاه به دستگاه دیگری انجام داد.

۲- جابه‌جایی‌های دیفرانسیل در دستگاه‌های دکارتی، استوانه‌ای و کروی به ترتیب عبارتند از

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

$$d\vec{l} = d\rho\hat{a}_\rho + \rho d\varphi\hat{a}_\varphi + dz\hat{a}_z$$

$$d\vec{l} = dr\hat{a}_r + r d\theta\hat{a}_\theta + r \sin\theta d\varphi\hat{a}_\varphi$$

$d\vec{l}$ همیشه در جهت مثبت در نظر گرفته می‌شود.

۳- سطوح عمود دیفرانسیل در سه دستگاه به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= dydz \hat{a}_x & ds &= \rho d\phi dz \hat{a}_\rho & ds &= r^\gamma \sin \theta d\theta d\phi \hat{a}_r \\ &= dx dz \hat{a}_y & &= \rho d\rho dz \hat{a}_\phi & &= r \sin \theta d\theta d\phi \hat{a}_\theta \\ &= dx dy \hat{a}_z & &= \rho d\rho d\phi \hat{a}_z & &= r dr d\theta \hat{a}_\phi \end{aligned}$$

$d\vec{s}$ بسته به سطح مورد نظر می تواند مثبت یا منفی باشد.

۴- حجم های دیفرانسیلی در سه دستگاه عبارتند از

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz \\ dV &= \rho d\rho d\phi dz \\ dV &= r^\gamma \sin \theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

۵- انتگرال خطی بردار $\vec{A}$ در امتداد مسیر L برابر است با $\int_L \vec{A} \cdot d\vec{s}$ ، اگر مسیر بسته باشد، انتگرال خطی تبدیل به گردش $\vec{A}$ پیرامون L می شود، یعنی $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$.

۶- شار یا انتگرال سطحی بردار $\vec{A}$ از میان سطح S به صورت $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ تعریف می شود، وقتی که سطح S بسته باشد، انتگرال سطحی تبدیل به شار خروجی خالص A از میان S می شود، یعنی $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{l}$.

۷- انتگرال حجمی کمیت نرده ای ρ_v روی حجم V به صورت $\int_V \rho_v dv$ تعریف می شود.

۸- مشتق گیری برداری با استفاده از عملگر دیفرانسیلی برداری $\vec{\nabla}$ انجام می شود، شیب میدان نرده ای V توسط $\vec{\nabla} V$ ، و اگرایی میدان برداری $\vec{A}$ توسط $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ، تاو $\vec{A}$ توسط $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ و لاپلاسین V توسط $\nabla^2 V$ بیان می شوند.

۳ آنالیز برداری

۹- قضیه واگرایی، $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$ ، انتگرال سطحی روی یک سطح بسته را به انتگرال حجمی مربوط می‌سازد.

۱۰- قضیه استوکس، $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$ ، انتگرال خطی روی یک مسیر بسته را به انتگرال سطحی مرتبط می‌کند.

۱۱- اگر معادله لاپلاس، $\nabla^2 V = 0$ ، توسط میدان نرده‌ای V در یک ناحیه معین صدق کند، گفته می‌شود V در آن ناحیه هماهنگ است.

۱۲- یک میدان برداری سیمپوله‌ای است اگر $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ باشد، و غیرچرخشی یا پایستار است اگر $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$.

۱۳- روابط برداری $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ و $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$ در الکترومغناطیس خیلی مفید هستند. سایر روابط برداری در پیوست الف داده شده‌اند.

۲-۱ مثال‌های حل شده

مثال (۱-۱): بردار $\vec{B} = \frac{1}{r} \hat{a}_r + r \cos \theta \hat{a}_\theta + \hat{a}_\phi$ را برحسب مختصات دکارتی و استوانه‌ای بیان کنید. مقادیر $(0, 4, -3)$ و $(-2, \frac{\pi}{4}, 5)$ را به‌دست آورید.
جواب: با استفاده از معادله (۱-۱۹)

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ r \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$B_x = \frac{\mu_0}{r} \sin \theta \cos \varphi + r \cos^2 \theta \cos \varphi - \sin \varphi$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{r} \sin \theta \sin \varphi + r \cos^2 \theta \sin \varphi + \cos \varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{r} \cos \theta - r \cos \theta \sin \theta$$

اما $r = \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2}$ ، $\theta = \tan^{-1} \frac{\left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}}{z}$ و $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

در نتیجه

$$\sin \theta = \frac{\rho}{r} \frac{\left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2}}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} \frac{y}{\left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در روابط مربوط به B_z, B_y, B_x داریم

$$B_x = \frac{\mu_0 x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x z^2}{\left[\left(x^2 + y^2 \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \right]^{1/2}} - \frac{y}{\left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y z^2}{\left[\left(x^2 + y^2 \right) \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \right]^{1/2}} + \frac{x}{\left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 z}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z \left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2}}$$

بردار $\vec{B}$ برابر است با

$$\vec{B} = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$$

با توجه به این که در نقطه $(-3, 4, 0)$ ، $\vec{B}$ ، $x = -3$ ، $y = 4$ و $z = 0$ است. داریم

$$B_x = -\frac{30}{25} + 0 - \frac{4}{5} = -2$$

$$B_y = \frac{40}{25} + 0 - \frac{3}{5} = 1$$

$$B_z = 0 - 0 = 0$$

$$\vec{B} = -2\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

برای تبدیل از مختصات کروی به مختصات استوانه‌ای، طبق رابطه (۱-۲۵) داریم

$$\begin{bmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{r} \\ r \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$B_\rho = \frac{10}{r} \sin \theta + r \cos^2 \theta$$

$$B_\phi = 1$$

$$B_z = \frac{10}{r} \cos \theta - r \sin \theta \cos \phi$$

اما $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ ، $\theta = \tan^{-1} \frac{\rho}{z}$ ، در نتیجه

$$\sin \theta = \frac{\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$B_{\rho} = \frac{10\rho}{\rho^2 + z^2} + \left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2} \cdot \frac{z^2}{\rho^2 + z^2}$$

$$B_z = \frac{10z}{\rho^2 + z^2} - \left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2} \cdot \frac{\rho z}{\rho^2 + z^2}$$

بنابراین

$$\vec{B} = \left(\frac{10\rho}{\rho^2 + z^2} + \frac{z^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}} \right) \hat{a}_{\rho} + \hat{a}_{\phi} + \left(\frac{10z}{\rho^2 + z^2} - \frac{\rho z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2}} \right) \hat{a}_z$$

در نقطه $\vec{B}\left(5, \frac{\pi}{4}, -2\right)$ ، $\rho = 5$ ، $\phi = \frac{\pi}{4}$ و $z = -2$ می‌باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \left(\frac{50}{29} + \frac{4}{\sqrt{29}} \right) \hat{a}_{\rho} + \hat{a}_{\phi} + \left(\frac{-20}{29} + \frac{10}{\sqrt{29}} \right) \hat{a}_z \\ &= 2.467 \hat{a}_{\rho} + \hat{a}_{\phi} + 1.167 \hat{a}_z \end{aligned}$$

توجه کنید در هر نقطه

$$|\vec{B}(x, y, z)| = |\vec{B}(\rho, \phi, z)| = |\vec{B}(r, \theta, \phi)|$$

مثال (۱-۲): شیب میدان‌های نرده‌ای زیر را در دستگاه‌های مختصات مربوط به دست آورید.

الف) $V = e^{-z} \sin 2x \cosh y$

ب) $U = \rho^2 z \cos \phi$

$$W = 10r \sin^2 \theta \cos \phi \quad (\text{ج})$$

جواب: الف)

$$\bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z$$

$$= 2e^{-z} \cos 2x \cosh y \hat{a}_x + e^{-z} \sin 2x \sinh y \hat{a}_y - e^{-z} \sin 2x \cosh y \hat{a}_z$$

(ب)

$$\bar{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{a}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{a}_z$$

$$= 2\rho z \cos 2\phi \hat{a}_\rho - 2\rho z \sin 2\phi \hat{a}_\phi + \rho^2 \cos 2\phi \hat{a}_z$$

(ج)

$$\bar{\nabla} W = \frac{\partial W}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \hat{a}_\phi$$

$$= 10 \sin^2 \theta \cos \phi \hat{a}_r + 10 \sin 2\theta \cos \phi \hat{a}_\theta - 10 \sin \theta \sin \phi \hat{a}_\phi$$

۳-۱ پاسخ سؤالات

۱- الف) رابطه بین مختصات استوانه‌ای و مختصات دکارتی برابر است با

$$\begin{bmatrix} H_\rho \\ H_\phi \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & \cdot \\ -\sin \phi & \cos \phi & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy^2z \\ x^2yz \\ xyz^2 \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های H در مختصات استوانه‌ای عبارتند از

$$H_\rho = xy^2z \cos \phi + x^2yz \sin \phi$$

$$H_\phi = -xy^2z \sin \phi + x^2yz \cos \phi$$

$$H_z = xyz^2$$

با قرار دادن مقادیر $y = \rho \sin \varphi$, $x = \rho \cos \varphi$ در روابط فوق داریم

$$H_\rho = \rho^2 z \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \rho^2 z \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{1}{\gamma} \rho^2 z \sin^2 \varphi$$

$$H_\varphi = -\rho^2 z \cos \varphi \sin^3 \varphi + \rho^2 z \cos \varphi \sin \varphi = \rho^2 z \cos \varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

$$H_z = \rho^2 z^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

همین‌طور رابطه بین مختصات کروی و دکارتی برابر است با

$$\begin{bmatrix} H_r \\ H_\theta \\ H_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy^2 z \\ x^2 yz \\ xyz^2 \end{bmatrix}$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

مؤلفه‌های H در مختصات کروی عبارتند از

$$H_r = r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \right)$$

$$H_\theta = r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\sin \theta \cos \theta r^4 \sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin \theta \right)$$

$$H_\varphi = r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\sin \theta \cos^2 \varphi \right)$$

ب) در نقطه $(5, -4, 3)$ ، مختصات استوانه‌ای عبارتند از

$$\rho = 5, z = 5,$$

$$\varphi = 36.0^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 30.6/87^\circ$$

$$\vec{H} = 288 \hat{a}_\rho + 84 \hat{a}_\varphi - 300 \hat{a}_z$$

همینطور مختصات کروی در این نقطه برابرند با:

$$r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \varphi = -\frac{4}{5}, \cos \varphi = \frac{3}{5}$$

$$\vec{H} = -\frac{8}{\sqrt{2}} \hat{a}_r + \frac{4}{\sqrt{2}} \hat{a}_\theta + \frac{8}{\sqrt{2}} \hat{a}_\varphi$$

$$\vec{G} = \frac{x \cos \varphi}{\rho} \hat{a}_x + \frac{yz}{\rho^2} \hat{a}_y + \left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right) \hat{a}_z \quad -2$$

کافی است در رابطه فوق، به جای x, y, z, ρ بر حسب مختصات کروی (r, θ, φ) قرار دهیم.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)^{1/2} = r \sin \theta$$

بردار $\vec{G}$ برابر می شود با

$$\vec{G} = \frac{r \sin \theta \cos^2 \varphi}{r \sin \theta} \hat{a}_x + \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \hat{a}_y + \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \hat{a}_z$$

$$= \cos^2 \varphi \hat{a}_x + \cot \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \sin^2 \varphi \hat{a}_z$$

اما رابطه بین مختصات کروی و دکارتی برابر است با

$$\begin{bmatrix} G_r \\ G_\theta \\ G_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \\ \cot \theta \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

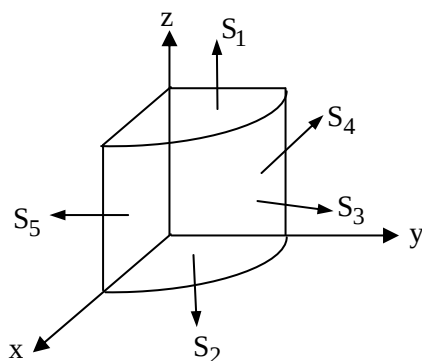
از رابطه فوق می توان مؤلفه های بردار G را در مختصات کروی به دست آورد.

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int (x^y dx + y^x dy) \quad -3$$

اما روی مسیر L ، $y = x^y$ ، $dy = yx dx$ ، با قرار دادن در رابطه فوق

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1^1 (x^y + yx^y) dx = \left. \frac{1}{y} x^y \right|_1^1 + \left. \frac{yx^y}{y} \right|_1^1 = \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

۴- طبق شکل ۱-۱، سطح S را می توان به پنج قسمت S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 تقسیم کرد. با نوشتن V در مختصات استوانه ای



شکل ۱-۱. مربوط به مسائل ۴.

$$V = (x + y)z = \rho z (\cos \phi + \sin \phi)$$

$$\vec{A} = \oint V d\vec{s} = \left(\int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} + \int_{S_4} + \int_{S_5} \right)$$

$$V d\vec{s} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 + \vec{A}_5$$

برای $\overline{A_1}$, $z = 2$, $d\vec{s} = \rho d\phi d\rho \hat{a}_z$, در نتیجه

$$\begin{aligned}\overline{A_1} &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \rho^2 z (\cos \phi + \sin \phi) d\phi d\rho \hat{a}_z = \\ &= \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 (\sin \phi + \cos \phi) \Big|_0^{\pi/2} \hat{a}_z = \frac{2}{3} (1 - 0 - 0 + 1) \hat{a}_z = \frac{4}{3} \hat{a}_z\end{aligned}$$

برای $\overline{A_2}$, $z = 0$, $d\vec{s} = \rho d\phi (-\hat{a}_z)$, در نتیجه

$$\overline{A_2} = - \int_{\rho=0}^1 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \rho^2 z (\cos \phi + \sin \phi) d\phi d\rho \hat{a}_z = 0$$

برای $\overline{A_3}$, $\rho = 1$, $d\vec{s} = \rho d\phi dz \hat{a}_\rho$, در نتیجه

$$\overline{A_3} = \int_{z=0}^2 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \rho^2 z (\cos \phi + \sin \phi) d\phi dz \hat{a}_\rho = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^2 (1 + 1) \hat{a}_\rho = \frac{4}{9} \hat{a}_\rho$$

برای $\overline{A_4}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, $d\vec{s} = d\rho dz \hat{a}_\phi$, در نتیجه

$$\overline{A_4} = \int_{\rho=0}^1 \int_{z=0}^2 \rho z (\cos \phi + \sin \phi) d\rho dz \hat{a}_\phi = \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^1 \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 (0 + 1) \hat{a}_\phi = \frac{1}{2} \hat{a}_\phi$$

برای $\overline{A_5}$, $\phi = 0$, $d\vec{s} = d\rho dz (-\hat{a}_\phi)$, در نتیجه

$$\overline{A_5} = -\hat{a}_\phi$$

بنابراین، به طور کلی خواهیم داشت

$$\overline{A} = \frac{4}{3} \hat{a}_z + 0 + \frac{4}{9} \hat{a}_\rho + \hat{a}_\phi - \hat{a}_\phi = \frac{4}{3} \hat{a}_z + \frac{4}{9} \hat{a}_\rho$$

۵- با حل در دستگاه‌های مختصات مناسب، خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -y^z \hat{a}_x + rz \hat{a}_y - y^r \hat{a}_z \quad (\text{الف})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\rho^r - rz^r) \hat{a}_\phi + r\rho^r \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{r} \cotan \theta \cos \phi \hat{a}_r + \frac{1}{r^r} \left(\frac{\cos \phi}{\sin \theta} + \cos \theta \right) \hat{a}_\theta \quad (\text{ج})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{H} = K \vec{\nabla} T \quad -\epsilon$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = K \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = K \nabla^2 T$$

چون $\nabla^2 T = 0$ می‌شود، در نتیجه $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$

۷- الف) با حل در مختصات دکارتی

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x} (V A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (V A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (V A_z)$$

$$= V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + A_x \frac{\partial V}{\partial x} + A_y \frac{\partial V}{\partial y} + A_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} V$$

ب) با قراردادن به جای $V, \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{A}) = r_{xyz}$$

۸- الف) این مسأله را می‌توان به راحتی در دستگاه مختصات دکارتی اثبات کرد.

$$\vec{\nabla} \times (\nabla \vec{A}) = \frac{r \cos \theta \cos \varphi}{r^3} \hat{a}_r + \frac{\sin \theta \cos \varphi}{r^3} \hat{a}_\theta + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{a}_\varphi \quad (\text{ب})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) = r(z^r - y^r - y) \quad -9$$

$$\vec{\nabla} \ln \rho = \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \rho \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \rho \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial}{\partial z} \ln \rho \right) \hat{a}_z = \frac{x}{\rho^r} \hat{a}_x + \frac{y}{\rho^r} \hat{a}_y \quad -10$$

از طرف دیگر

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \hat{a}_z) = \vec{\nabla} \times \left(\tan^{-1} \frac{y}{x} \hat{a}_z \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x}{x^r + y^r} \hat{a}_x + \frac{y}{x^r + y^r} \hat{a}_y = \frac{x}{\rho^r} \hat{a}_x + \frac{y}{\rho^r} \hat{a}_y$$

که دو طرف با دیگر برابر هستند.

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{r \sin \varphi} \hat{a}_\varphi, \quad \vec{\nabla} \theta = \frac{1}{r} \hat{a}_\theta \quad -11$$

$$\frac{r \vec{\nabla} \theta}{\sin \theta} = \frac{\hat{a}_\theta}{\sin \theta}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{r \vec{\nabla} \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{1}{r} \sin \theta \hat{a}_\theta = \vec{\nabla} \varphi$$

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{\nabla} \times \left(\frac{r \vec{\nabla} \theta}{\sin \theta} \right) \quad \text{بنابراین}$$

۱۲- با حل در دستگاه‌های مختصات مربوطه، خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} V = (\epsilon_{xy} + z) \hat{a}_x + r x^{\gamma} \hat{a}_y + x \hat{a}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \epsilon y \quad (\text{الف})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = .$$

$$\vec{\nabla} V = z \cos \varphi \hat{a}_\rho - z \sin \varphi \hat{a}_\varphi + \rho \cos \varphi \hat{a}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = . \quad (\text{ب})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = .$$

ج) شبیه حالت‌های (الف) و (ب) حل می‌شود.

۱۳- جواب‌ها عبارتند از

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \vec{T} = \epsilon y z \hat{a}_x + r x y^{\gamma} \hat{a}_y + r x^{\gamma} y z \hat{a}_z \quad (\text{الف})$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} = r y z \hat{a}_x + r x y^{\gamma} \hat{a}_y + r x^{\gamma} y z \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{T}) = \epsilon x y z + r x y^{\gamma} + r x^{\gamma} y z^{\gamma} \quad (\text{ج})$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) r^{\gamma} = r^{\gamma} \quad (\text{د})$$

$$\vec{\nabla} \cdot r^n \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} (x r^n) + \frac{\partial}{\partial y} (y r^n) + \frac{\partial}{\partial z} (z r^n) \quad (\text{الف} - ۱۴)$$

r^n برابر است با

$$r^n = (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma}$$

$$\vec{\nabla} \cdot r^n \vec{r} = r x^{\gamma} \left(\frac{n}{\gamma} \right) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1} + r y^{\gamma} \left(\frac{n}{\gamma} \right) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1}$$

$$+ r z^{\gamma} \left(\frac{n}{\gamma} \right) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1} + r^n + r^n + r^n$$

$$= n (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma}) (x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma})^{n/\gamma - 1} + r^n$$

$$= n r^n + r^n = (n + \gamma) r^n$$

$$\vec{\nabla} \times (\mathbf{r}^n \vec{r}) = 0 \quad (\text{ب})$$

۱۵- فرض کنید

$$V = \ln r = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{1}{r} (rx) (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{x}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{r^3} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} V = \vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r} \hat{a}_x \quad (\text{ب})$$

$$\nabla^2 (\ln r) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (\ln r) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 A_r) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r) = \frac{1}{r^3}$$

۱۶- با نوشتن $\nabla^2 V$ در دستگاه مختصات مربوطه

$$\nabla^2 V_1 = \frac{1}{r} (x + y + z) \quad (\text{الف})$$

$$-\nabla^2 V_2 = \left(-\frac{r^2 z^2}{\rho} + r\rho \right) \sin^2 \varphi \quad (\text{ب})$$

$$-\frac{1}{r} + r \cos \theta \sin \varphi - \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\sin^2 \theta} \quad (\text{ج})$$

$$\nabla^2 V = r^2 (y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2) \quad (۱۷- الف)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{a}_x + \nabla^2 A_y \hat{a}_y + \nabla^2 A_z \hat{a}_z \quad (\text{ب})$$

$$= r^2 y \hat{a}_x + r^2 x z \hat{a}_y - r^2 (y^2 + z^2) \hat{a}_z$$

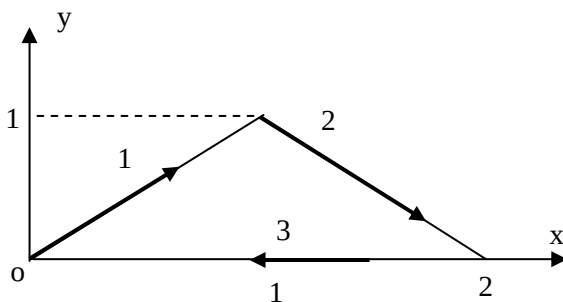
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 2y\hat{a}_x + 2(x - 2yz)\hat{a}_y - 2y^2\hat{a}_z \quad (\text{ج})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{د})$$

با استفاده از نتایج قسمت‌های (ب) و (ج) خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = 2(x - 2yz - 3xz)\hat{a}_y + 2z^2\hat{a}_z$$

۱۸- با توجه به شکل ۲-۱



شکل ۲-۱. مربوط به مسائل ۱۸.

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3 \right) \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (\text{الف})$$

برای مسیر ۱

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y, \quad dy = dx, \quad y = x$$

$$\int_1 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 (x^2 dx - x dx) = -\frac{1}{4}$$

برای مسیر ۲

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y, \quad dy = -dx, \quad y = -x + 2$$

$$\int_2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 (-x^2 + 2x^2 - x + 2) dx = \frac{17}{12}$$

برای مسیر ۳

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_C x^2 y dx \Big|_{y=0} = 0$$

در نتیجه

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4} + \frac{17}{12} + 0 = \frac{5}{6}$$

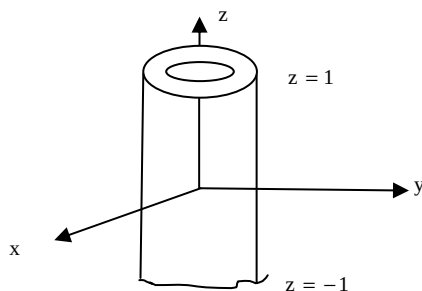
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -x^2 \hat{a}_x, \quad d\vec{s} = dx dy (-\hat{a}_x) \quad (ب)$$

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = - \iint (-x^2) dx dy = \frac{5}{6}$$

(ج) با توجه به مساوی شدن قسمت‌های الف و ب، قضیه استوکس برقرار است

۱۹- با توجه به شکل ۳-۱

$$\begin{aligned} \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} &= \left[\iint_{z=-1} + \iint_{z=1} + \iint_{\rho=2} + \iint_{\rho=5} \right] \vec{D} \cdot d\vec{s} \\ &= - \iint \rho^2 \cos^2 \phi d\phi d\rho + \iint \rho^2 \cos^2 \phi d\phi d\rho - \iint \rho^2 z^2 d\phi dz \Big|_{\rho=2} \\ &\quad + \iint \rho^2 z^2 d\phi dz \Big|_{\rho=5} = 56\pi = 176 \end{aligned}$$



شکل ۳-۱. مربوط به مسائل ۱۹.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\epsilon \rho^2 z^2) = \epsilon z^2$$

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dv = \iiint \epsilon z^2 \rho d\rho d\phi dz = 56\pi = 176$$

۲۰- چون $\vec{U} = \vec{W} \times \vec{r}$, $\vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{\nabla} \times (\vec{W} \times \vec{r})$, با استفاده از رابطه

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} \times (\vec{W} \times \vec{r}) = \vec{W} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{W} - (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r}$$

$$= r \vec{W} \Rightarrow \vec{W} = \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{U}$$

۲۱- با فرض $\vec{A} = U \vec{\nabla} V$ و اعمال قضیه استوکس

$$\int_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{\nabla} \times (U \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_s (\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s} + \int_s U (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s}$$

اما $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$ ، در نتیجه

$$\int_L U \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s}$$

همین طور می توان نوشت

$$\int_L V \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l} = - \int_s (\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s} + \int_s V (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U) \cdot d\vec{s}$$

اما $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$ ، در نتیجه

$$\int_L \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \cdot d\vec{l} = - \int_L \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} \cdot d\vec{l}$$

۲۲- فرض کنید

$$\vec{A} = r^n \vec{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} (x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z)$$

طبق قضیه واگرایی

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} (x r^n) + \frac{\partial}{\partial y} (y r^n) + \frac{\partial}{\partial z} (z r^n) = (r + n) r^n$$

در نتیجه

$$\oint_S r^n \vec{r} \cdot d\vec{s} = \int_V (r + n) r^n \, dV \Rightarrow \int_V r^n \, dV = \frac{1}{n+3} \oint_S r^n \vec{r} \cdot d\vec{s}$$

۲۳- اگر بردار $\vec{T}$ غیرچرخشی باشد، باید $\vec{\nabla} \times \vec{T} = 0$. نتیجه می‌شود.

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{T}$ در نقطه $(2, -1, 0)$ برابر (-1) است.

۲۴- به منظور محاسبه واگرایی و تاو با ممتیقا، ابتدا باید از فرمان زیر استفاده کنیم.

Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

واگرایی و تاو هر دو دارای دو شناسه هستند. اولی میدان برداری و دومی دستگاه مختصاتی است که محاسبات باید در آن انجام شود. مثلاً برای محاسبه واگرایی و تاو بردار $\vec{A}$ در دستگاه مختصات دکارتی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.