



دانشگاه پیام نور

روش‌های آمار استنباطی در روان‌شناسی و علوم تربیتی

(رشته روان‌شناسی)

دکتر مهناز علی‌اکبری دکتر فرهاد شقاقی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

نه	پیشگفتار
سیزده	راهنمای مطالعه
۱	فصل اول: اصول و قواعد احتمالات
۱	هدف‌های رفتاری
۲	نظریه احتمالات
۳	اندیشه‌های اساسی در احتمالات
۳	فضای نمونه
۴	پیشامد
۴	حکم احتمال
۵	پیشامد ابتدایی
۶	احتمال نظری و احتمال تجربی
۷	مجموعه‌ها و احتمالات
۷	مجموعه
۸	اجتماع دو مجموعه
۸	اشتراک دو مجموعه
۹	ترکیب احتمالات
۹	اولین قاعده جمع احتمالات
۱۰	دومین قاعده جمع احتمالات
۱۱	قاعده ضرب احتمالات در حوادث مستقل
۱۳	قاعده ضرب احتمالات در حوادث وابسته
۱۳	احتمالات شرطی
۱۴	جایگشت‌ها و ترکیب‌ها
۱۵	جایگشت
۱۶	ترکیب
۱۷	متغیر تصادفی گسسته و تابع احتمال
۲۱	متغیر تصادفی پیوسته
۲۲	توزیع دو جمله‌ای
۲۲	احتمال m پیشامد مساعد در n آزمایش
۲۵	توزیع فراوانی دو جمله‌ای
۲۷	میانگین و واریانس توزیع احتمال

۲۷	خلاصه فصل اول
۳۰	خودآزمایی فصل اول
۳۳	فصل دوم: آمار استنباطی و اهداف آن
۳۳	هدف‌های رفتاری
۳۴	مقدمه
۳۶	انواع نمونه‌گیری
۳۷	نمونه‌گیری تصادفی ساده
۳۸	نمونه‌گیری تصادفی منظم
۳۸	نمونه‌گیری تصادفی طبقه‌ای
۴۰	نمونه‌گیری خوشه‌ای
۴۱	خطای نمونه‌گیری
۴۳	خطای استاندارد میانگین
۴۴	آزمون فرض
۴۵	فرض صفر
۴۵	فرض خلاف
۴۶	خطا در تصمیم‌گیری
۴۶	خطای نوع اول
۴۹	خطای نوع دوم
۵۰	عوامل مؤثر بر ارتکاب خطای نوع دوم
۵۲	توان آزمون
۵۳	سطح معنی‌داری
۵۴	آزمون‌های یک دامنه و دو دامنه
۵۶	تفسیر تأیید یا رد فرض صفر
۵۷	خلاصه فصل دوم
۵۹	خودآزمایی فصل دوم
۶۱	فصل سوم: منحنی توزیع نرمال و آزمون Z
۶۱	هدف‌های رفتاری
۶۲	مقدمه
۶۲	الف) یادآوری مباحث منحنی طبیعی در آمار توصیفی
۶۲	مفهوم منحنی طبیعی
۶۵	مقایسه توزیع‌های گسسته و پیوسته و منحنی طبیعی
۶۹	معادله منحنی طبیعی
۷۰	ویژگی‌های توزیع طبیعی
۷۱	سطوح منحنی Z
۷۱	ب) توزیع منحنی طبیعی و آزمون Z در آمار استنباطی
۷۱	نظریه نمونه‌برداری
۷۲	نمونه‌برداری و قانون اعداد بزرگ
۷۲	توزیع میانگین‌های نمونه
۷۶	آزمون Z تک نمونه‌ای برای میانگین جامعه
۷۸	برآورد فاصله‌ای با استفاده از توزیع Z

۸۰	خلاصه فصل سوم
۸۲	خودآزمایی فصل سوم
۸۵	فصل چهارم: آزمون‌های t
۸۵	هدف‌های رفتاری
۸۶	مقدمه
۸۶	آزمون t تک نمونه‌ای
۸۷	تفاوت آزمون t با آزمون Z
۸۹	خانواده توزیع t و درجه آزادی
۹۰	شکل توزیع t
۹۲	چگونگی محاسبه آزمون تک نمونه‌ای t
۱۰۲	فاصله اطمینان t استودنت
۱۰۴	آزمون t برای تفاوت بین میانگین‌های دو نمونه
۱۰۶	آزمون t برای نمونه‌های مستقل
۱۱۰	مراحل شش‌گانه مربوط به استفاده از آزمون معنی‌داری t برای دو نمونه مستقل
۱۱۳	آزمون t برای دو نمونه وابسته به هم
۱۱۵	فرمول محاسبه آزمون t برای دو نمونه وابسته به هم
۱۱۷	مراحل شش‌گانه مربوط به استفاده از آزمون معنی‌داری t برای دو نمونه وابسته به هم
۱۲۱	مفروضه‌های آزمون t استودنت
۱۲۱	خلاصه فصل چهارم
۱۲۳	خودآزمایی فصل چهارم
۱۲۷	فصل پنجم: تجزیه و تحلیل واریانس
۱۲۷	هدف‌های رفتاری
۱۲۸	مقدمه
۱۳۰	مفهوم تجزیه و تحلیل واریانس
۱۳۵	چگونگی محاسبه نسبت F طی ده مرحله
۱۳۷	محاسبه ده مرحله نسبت F برای یک مثال پژوهشی
۱۴۱	محاسبه درجه آزادی کل
۱۴۲	توضیح جدول اطلاعات تحلیل واریانس (ANOVA)
۱۴۴	توضیح جدول توزیع‌های F
۱۴۵	گام‌های شش‌گانه مربوط به استفاده از آزمون معنی‌داری F برای مقایسه ...
۱۵۲	مفروضه‌های تحلیل واریانس
۱۵۴	روش‌های مقایسه میانگین‌ها در تحلیل واریانس
۱۵۵	مقایسه‌های طرح‌ریزی شده یا پیشین
۱۵۷	مقایسه‌های پس از تجربه یا پسین
۱۵۷	روش T یا توکی
۱۶۲	روش شفه یا S
۱۶۴	خلاصه فصل پنجم
۱۶۶	خودآزمایی فصل پنجم
۱۶۹	فصل ششم: آزمون‌های خی دو
۱۶۹	هدف‌های رفتاری

۱۷۰	مقدمه
۱۷۱	آزمون خی دو
۱۷۳	آزمون خی دو یک متغیری (نیکویی برازش)
۱۷۷	محاسبه شاخص آماری خی دو
۱۷۹	محاسبه درجه آزادی
۱۸۰	استخراج χ^2 بحرانی از جدول
۱۸۰	گام های شش گانه آزمون خی دو
۱۸۲	تصحیح نسبت خی دو مشاهده شده
۱۸۴	آزمون خی دو دو متغیری (آزمون استقلال)
۱۸۵	محاسبه شاخص آماری خی دو دو متغیری
۱۹۰	محاسبه درجه آزادی در آزمون خی دو دو متغیری
۱۹۱	گام های شش گانه آزمون خی دو دو متغیری
۱۹۳	تصحیح برای پیوستگی در خی دو یا جدول توافقی 2×2
۱۹۶	شش گام برای آزمون فرض صفر در یک جدول توافقی 2×2
۱۹۸	پیش فرض های ضروری برای استفاده آزمون خی دو
۱۹۹	ادغام یا ترکیب سطوح های یک متغیر در آزمون خی دو
۲۰۱	خلاصه فصل ششم
۲۰۳	خود آزمایی فصل ششم
۲۰۷	منابع
۲۰۸	منابع برخی از مثال های پژوهشی
۲۰۹	پیوست شماره ۱
۲۰۹	جدول A. توزیع نرمال مقادیر استاندارد Z
۲۱۰	جدول B. توزیع t: مقادیر بحرانی t
۲۱۱	جدول C _۱ . توزیع F: مقادیر بحرانی F (سطح معنی داری ۰/۰۵)
۲۱۳	جدول C _۲ . توزیع F: مقادیر بحرانی F (سطح معنی داری ۰/۰۱)
۲۱۷	جدول D. توزیع خی دو (χ^2): مقادیر بحرانی خی دو
۲۱۸	جدول E. توزیع q: مقادیر بحرانی q
۲۱۹	جدول F. اعداد تصادفی
۲۲۰	پیوست شماره ۲
۲۲۰	راهنمای کار عملی درس آمار استنباطی
۲۴۱	پیوست شماره ۳
۲۴۱	واژه نامه (فارسی به انگلیسی)
۲۴۳	واژه نامه (انگلیسی به فارسی)

پیشگفتار

آگاهی از دانش آمار امروزه برای دانشجویان رشته‌های روان‌شناسی و علوم تربیتی و بسیاری از رشته‌های دیگر ضروری است چرا که در ده‌های اخیر توسعه و گسترش چشمگیری در دانش صورت گرفته است و درک و فهم ادبیات علمی در بسیاری از زمینه‌های پژوهشی رشته‌های مختلف دانش نو نیازمند آشنایی با دانش روش‌ها و شیوه‌های آماری است. همچنین بسیاری از کتاب‌ها و مقالات علمی مندرج در مجله‌های علمی- پژوهشی و یا علمی- ترویجی، یافته‌های علمی پژوهشی را در چارچوب مفاهیم آماری گزارش می‌دهند. علاوه بر آن امروزه پژوهش‌های مختلف برای تجزیه و تحلیل، طبقه‌بندی گزارش اطلاعات کمی و کیفی و همچنین بررسی و آزمون فرضیه‌های مربوط به این پژوهش‌ها به روش‌های مختلف آمار توصیفی و استنباطی نیازمند است. بنابراین دانشجویان رشته‌های مختلف تحصیلی بدون آگاهی و دستیابی به این روش‌ها قادر به پژوهش نخواهند بود. به عبارت دیگر ما بدون فراگیری آمار در رشته‌های مختلف تحصیلی نمی‌توانیم برای شناخت و پیش‌بینی پدیده‌های مورد مطالعه در هر حوزه علمی اقدام نماییم

از آنجایی که به دلایل مختلف، پژوهش روی همه افراد یک جامعه بزرگ به طور مستقیم امکان‌پذیر نیست، از آن جامعه زیرمجموعه کوچک‌تری به عنوان نمونه انتخاب می‌شود و روی آن مجموعه مطالعه و آزمایشات مختلف انجام می‌شود، پژوهشگر به اطلاعات جمع‌آوری شده از مجموعه‌های کوچک و تجزیه و تحلیل آنها بسنده نمی‌کند

بلکه او می‌خواهد با استفاده از یافته‌های گروه‌های کوچک اطلاعات لازم را درباره جامعه‌ای که این گروه‌ها از آن انتخاب شده‌اند به دست آورد. هدف پژوهشگر نوعاً عبارت است از تعمیم اصول و یافته‌های مجموعه کوچکتر به جامعه به نحوی که قادر باشد حوادث مورد نظر جامعه را تبیین و پیش‌بینی کند. در اینجا است که ضرورت آشنایی و استفاده از علم آمار استنباطی علاوه بر آمار توصیفی مشخص می‌شود.

همچنین پژوهش‌های تجربی دارای فرضیه‌هایی هستند. فرضیه‌ها پاسخ‌هایی مقدماتی و هوشمندانه به سوالات پژوهش است. هدف هیچ پژوهش تجربی اثبات فرضیه‌های پژوهش نیست بلکه او با استفاده از روش‌هایی که همان روش‌های آمار استنباطی است و با یک احتمال فرضیه‌ها را تأیید و یا رد می‌کند.

به عنوان مثال پژوهشگر ممکن است کارایی دو روش مختلف درمان را در کاهش افسردگی مقایسه کند. او ممکن است این فرضیه را مطرح سازد که "روش الف در کاهش افسردگی کارایی بیشتری از روش ب دارد" هدف پژوهشگر پس از طرح فرضیه، آزمون آن است. یعنی او باید با استفاده از روش‌های منطقی، درستی و یا نادرستی این فرضیه را بررسی کرده و تصمیم بگیرد. به عبارتی درباره درستی و یا نادرستی فرضیه قضاوت کند. بدین منظور او از جامعه افراد افسرده نمونه‌ای به صورت تصادفی انتخاب می‌کند و آن را به دو گروه تقسیم می‌کند در یکی از گروه‌ها روش الف را به کار می‌برد و در گروه دیگر روش ب را مورد استفاده قرار می‌دهد. در نهایت هدف اصلی او فقط تعیین این نکته نیست که کدام روش در این گروه‌ها کارا تر است بلکه او علاقمند است تا کارایی این دو روش را در کل جامعه افسرده‌ها مقایسه کند. پژوهشگر نمی‌تواند به همه افراد افسرده جامعه دسترسی پیدا کند او از جامعه نمونه کوچک‌تری را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند، آزمایش‌های لازم را روی نمونه انجام می‌دهد، اطلاعات را از نمونه به دست می‌آورد و سپس با استفاده از روش‌های آمار استنباطی، نتایج را به جامعه تعمیم می‌دهد. بنابراین هدف آمار استنباطی تعمیم نتایج به دست آمده از نمونه به جامعه است و یا به بیان دیگر از طریق استنباط پارامترهای جامعه از روی شاخص‌های نمونه، فرضیه‌های پژوهش مورد آزمون قرار می‌گیرد و آنها تأیید و یا رد می‌شوند. به جرأت می‌توان گفت که در رد یا تأیید فرضیه‌ها اندکی عدم اطمینان و خطا وجود خواهد داشت. آمار استنباطی پژوهشگر را

قادر می‌سازد تا میزان این عدم اطمینان و خطا را آشکار کند. بنابراین آمار استنباطی علم تصمیم‌گیری عاقلانه و منطقی براساس اطلاعاتی است که کامل و همه‌گیر نیستند و از گروه کوچکی به دست آمده‌اند.

همان‌طور که اشاره شد هدف پژوهش‌های تجربی اثبات فرضیه‌ها نیست، تنها چیزی که در یک مطالعه تجربی می‌توان به دست آورد این است که نشان داده شود مدل بخصوصی با نتایج مشاهده شده برازش و همخوانی دارد یا به دیگر سخن تطبیق شواهد تجربی با فرضیه‌های پژوهش هرگز مانند یک استنتاج ریاضی قطعیت ندارد زیرا یک برهان ریاضی به نتیجه قطعی می‌انجامد در حالی که هیچ قانون تجربی دارای چنین پایه قطعی و شمول کافی نیست و درستی آن به یک احتمال محدود است و هر پژوهش علمی تلاشی است برای حصول نتایجی که نسبت به آن اعتماد بیشتری وجود داشته باشد.

بنابراین اطلاعاتی را که از یک گروه نمونه به دست می‌آید فقط با احتمال معینی می‌توان پذیرفت. هدف آمار استنباطی تعیین احتمال درست بودن یا نادرست بودن نتایج تجربی به دست آمده از یک نمونه است و به همین سبب پایه آن براساس احتمالات نهاده شده است. قاعده کلی استنباط آماری این است که هم احتمال درست بودن فرضیه پژوهش و هم احتمال درست بودن فرضیه مخالف آن را به دست آورد. با توجه به این نکته آشنایی مقدماتی با قوانین احتمالات، اصول و مفاهیم آن به ویژه برای درک بهتر مدل‌های آماری ضرورت دارد لذا فصل اول این کتاب به موضوع احتمالات اختصاص داده شده است و در فصل دوم ویژگی‌های آمار استنباطی، تفاوت و رابطه آن با آمار توصیفی و برخی از اصطلاحات مهم آمار استنباطی همراه با کاربرد آن در برآورد و آزمون فرض توضیح داده می‌شود.

از آنجایی که این کتاب برای دانشجویان کارشناسی نوشته شده است، در فصول بعدی آن دسته از مدل‌ها و آزمون‌های آماری که آشنایی با آنها برای پژوهش و تحلیل آماری برای هر دانشجوی کارشناسی علوم رفتاری ضرورت دارد، به طور ساده و قابل فهم ارائه شده است.

در پایان لازم می‌دانیم از کسانی که در کنار ما در نوشتن و تدوین این کتاب نقش داشته‌اند تشکر کنیم، از جمله از همکار بزرگوار، جناب آقای دکتر سلامتی که ویراستاری علمی این کتاب را انجام دادند، از جناب آقای اکبری مسئول محترم تدوین دانشگاه پیام نور که در امر ویراستاری ادبی این کتاب خالصانه ما را یاری داده‌اند، از سرکار خانم منیژه هاشمی‌مهر که تایپ و تدوین کتاب را انجام دادند و سرکار خانم حیدری که در امر تایپ و تدوین این کتاب همکاری نمودند، صمیمانه تشکر می‌نماییم. همچنین، از سرکار خانم معصومه پورخلیل که در هماهنگی ارتباط بین افراد گروه فعالیت داشته‌اند تشکر می‌کنیم و سلامتی و موفقیت همه این عزیزان را از خداوند منان خواستاریم.

راهنمای مطالعه

خدا را سپاس می‌گوییم که توانستیم گامی هر چند کوچک در راه آموزش و یادگیری برداریم. کتاب حاضر تحت عنوان روش‌های آمار استنباطی در روان‌شناسی و علوم تربیتی برای سه واحد درسی آمار استنباطی در رشته‌های روان‌شناسی، علوم تربیتی و مشاوره تدوین شده است. این کتاب به پیشنهاد دانشگاه پیام‌نور و به شیوه خودآموز تهیه شده است و از آنجایی که درج متون منابع به شکل نقل قول مستقیم در متن کتاب خودآموز، سادگی آن را مختل می‌کند، همچنین یادگیری مفاهیم آمار را که اغلب برای دانشجویان رشته‌های علوم انسانی دشوار است، مشکل می‌نماید، بنابراین در این کتاب سعی شده است تا حدالمقدور از درج مستقیم متون خودداری شود. از طرفی درج آدرس منابع در متن کتاب موجب انفصال مطالب و مفاهیم شده و فرایند یادگیری دانشجویان را از طریق خواندن کتاب مختل کرده و از میزان درک مفاهیم می‌کاهد. لذا منابع مورد استفاده در همه فصول در پایان کتاب مطابق نظم معینی آورده شده است. این کتاب شامل ۶ فصل بوده و هر فصل دارای فهرست، هدف‌های رفتاری، خودآزمایی‌های داخل فصل و خودآزمایی‌های آخر فصل است. در پایان کتاب نیز بعد از منابع، جداول آماری مورد نیاز کتاب ارائه شدند.

در آغاز برای بهره‌مندی بهینه از خواندن این کتاب، رعایت نکاتی را که تأکیدهای کلیدی در فهم مطالب است، توصیه می‌کنیم:

اول آن که قبل از شروع هر فصل هدفهای رفتاری آن را با دقت مطالعه کرده و در مورد آنها کمی فکر نمایید زیرا محتوای هر فصل بیانگر همان هدفهای رفتاری است.

دوم آن که در طول مطالعه و یادگیری هر فصل وقتی به یک خودآزمایی رسیدید آن را پاسخ دهید و قبل از اطمینان از درستی پاسخ خود، خواندن بقیه فصل را ادامه ندهید زیرا هدف خودآزمایی‌های داخل فصل علاوه بر تمرین، تفهیم و تحکیم مطالب نیز هست.

سوم آنکه در حین مطالعه متن کتاب، علاوه بر پاسخدهی به خودآزمایی‌ها، سعی کنید به مثال‌ها توجه بیشتری کنید. همچنین مثال‌هایی را از خود ارائه دهید.

چهارم آنکه سوال‌هایی را که در ارتباط با موضوع مورد مطالعه برایتان ایجاد می‌شود یادداشت کنید و سعی کنید با استفاده از متن کتاب آنها را پاسخ دهید، ضمناً این سوال‌ها را در حاشیه کتاب یادداشت کنید و همزمان با پاسخ به خودآزمایی‌های آخر فصل به آنها نیز پاسخ دهید بدین طریق در حین خواندن کتاب ذهن خود را فعال نگه می‌دارید.

در پایان از دانشجویان عزیز، مدرسین محترم و همچنین کلیه کسانی که خواننده این کتاب می‌باشند خواهشمندیم ما را از رهنمودهای خود جهت رفع نواقص کتاب و مفیدتر شدن آن آگاه نمایند.

تابستان ۱۳۸۹

فرهاد شقاقی

مهناز علی‌اکبری دهکردی

M-akbari@pnu.ac.ir

فصل اول

اصول و قواعد احتمالات

همان‌طور که می‌دانید آمار توصیفی داده‌های مربوط به یک گروه را به صورت شاخص‌های مرکزی یا پراکندگی خلاصه می‌کند و به عبارت دیگر داده‌ها بدین وسیله توصیف می‌شوند. ولی در آمار استنباطی بر اساس اطلاعاتی که از نمونه‌ها جمع‌آوری شده است خصوصیات جامعه اصلی استنباط می‌گردد اما بدون مشاهده رفتار کلیه افراد جامعه، پژوهشگر هرگز نمی‌تواند بر صحت استنباط خود در مورد جامعه از روی گروه نمونه کاملاً مطمئن گردد.

بنابراین هر جا که در رابطه با مسائل و پدیده‌ها استنباط‌هایی را به عمل بیاوریم درست‌نمایی این استنباط‌ها قطعی نیست به عبارت دیگر قسمت مهمی از کار آماردانان روش‌هایی است برای تعیین احتمال درستی یا خطای استنباط‌های مختلف. لذا فصل اول این کتاب به توصیف و تفسیر احتمال و اصول مربوط به آن اختصاص داده شده است.

هدف‌های رفتاری

در پایان این فصل از دانشجو انتظار می‌رود که بتواند:

۱. پیشامد تصادفی را تعریف کند.
۲. احتمالات را تعریف کند.
۳. فضای نمونه را همراه با ذکر مثال توضیح دهد.
۴. پیشامد را همراه با ذکر مثال توضیح دهد.
۵. حکم احتمال را همراه با ذکر مثال توضیح دهد.

۶. احتمال پیشامدهای مختلف در یک فضای نمونه را محاسبه کند.
۷. پیشامد ابتدائی را با ذکر یک مثال توضیح دهد.
۸. احتمال نظری و تجربی را تعریف کند و رابطه این دو را توضیح دهد.
۹. مجموعه، اجتماع و اشتراک مجموعه را همراه با ذکر مثال توضیح دهد.
۱۰. پیشامدهای ترکیبی را از پیشامدهای غیرترکیبی تشخیص داده و با ذکر مثال توضیح دهد.
۱۱. دو قاعده جمع احتمالات را با ذکر تفاوت آنها توضیح داده و مسائل مربوط به آنها را حل کند.
۱۲. قاعده ضرب حوادث مستقل را با ذکر مثال توضیح دهد و مسئله مربوط به آن را حل کند.
- ۱۳- قاعده ضرب حوادث وابسته را با ذکر مثال توضیح دهد و مسئله مربوط به آن را حل کند.
۱۴. احتمال شرطی را با ذکر مثال توضیح دهد.
۱۵. جایگشت (ترتیب) را با ذکر مثال توضیح دهد.
۱۶. ترکیب را با ذکر مثال توضیح دهد و مسئله داده شده در این زمینه را حل کند.
۱۷. رابطه بین جایگشت و ترکیب را توضیح دهد و نماد $\binom{n}{m}$ را تفسیر کند.
۱۸. متغیر تصادفی گسسته و تابع احتمال را با ذکر مثال توضیح دهد.
۱۹. توزیع دوجمله‌ای را همراه با ذکر مثال توضیح دهد.
۲۰. شرایط استفاده از توزیع دوجمله‌ای را بنویسد.
۲۱. فرمول توزیع دوجمله‌ای را توضیح دهد و مسئله مربوط به آن را حل کند.
۲۲. توزیع فراوانی دوجمله‌ای را با ذکر مثال توضیح دهد و رسم کند.
۲۳. میانگین و واریانس توزیع احتمال را با ذکر مثال توضیح دهد.

نظریه احتمالات

ما وقوع برخی پیشامدها را نمی‌توانیم با دقت پیش‌بینی کنیم زیرا همه شرایطی که این پیشامدها به آن بستگی دارند برای ما مشخص و روشن نیست و نمی‌توانیم آنها را مشخص، توصیف و یا تبیین کنیم. به عبارت دیگر چون علت وقوع یا عدم وقوع این

پیشامدها کاملاً برای ما معلوم نیست نمی‌توانیم وقوع آنها را به دقت پیش‌بینی کنیم. به پیشامدهایی که علت آنها بر ما معلوم نیست و همچنین پیامد آنها را نمی‌توان پیش‌بینی کرد، "پیشامد تصادفی" گفته می‌شود. مثلاً وقتی ده مهره هم‌اندازه و هم‌رنگ را در داخل کیسه‌ای قرار می‌دهیم و کیسه را به هم می‌زنیم پس از آن یک مهره را برمی‌داریم، این یک پیشامد تصادفی است. شانس و تصادف در اینجا به معنی آن نیست که این پیشامدها تابع قانون نیستند، آنها با وجود غیرقابل پیش‌بینی بودن از قوانین معینی پیروی می‌کنند ولی به دلیل ناشناخته بودن عوامل نمی‌توانیم با قاطعیت پیشامدها را پیش‌بینی کنیم. قوانین این پیشامدهای غیرقابل پیش‌بینی در ریاضیات در بخش نظریه احتمالات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

احتمالات مبحثی از ریاضیات است که اصول پیش‌بینی و روش‌های برآورد پیشامدهای تکرار شدنی را بیان می‌کند. مفهوم احتمال به صورت کلی به "درست‌نمایی"^۱ اتفاق افتادن حادثه تعریف شده است. این درست‌نمایی غالباً با p نشان داده می‌شود و عبارت است از نسبت اتفاق افتادن حادثه‌ای که انتظار وقوع آن می‌رود. ارزش p بین صفر و یک قرار دارد ($0 \leq p \leq 1$) ارزش $p=1$ برای پیشامدی است که وقوع آن قطعی و حتمی است و ارزش $p=0$ بیانگر این است که پیش‌آمد اصلاً اتفاق نمی‌افتد.

اندیشه‌های اساسی در احتمالات

فضای نمونه^۲

یک اندیشه اساسی در احتمالات فضای نمونه است ما هیچ حکم احتمالی نمی‌توانیم بدهیم مگر اینکه با این فضای نمونه سروکار داشته باشیم. فضای نمونه عبارت است از مجموعه‌ای نقاط یا عناصر^۳ که این نقاط می‌توانند نماینده هر چیزی از قبیل افراد، اعداد، توپ‌ها و غیره باشند. در واقع فضای نمونه، مجموعه‌ای از نقاط است که معرف رویدادها، اشیاء یا چیزها هستند. برای مثال فضای نمونه ممکن است مجموعه‌ای از ۶

1. likelihood
2. sample Space
3. elements

توپ سفید و ۳ توپ سیاه در یک جعبه باشد، این فضای نمونه دارای ۹ نقطه است. فضای نمونه را معمولاً با حرف S نمایش می‌دهند.

پیشامد^۱

اندیشه اساسی دیگر در احتمالات، پیشامد است. پیشامد عبارت است از یک رویداد قابل تشخیص که در خصوص یک فضای نمونه مطرح می‌شود. در یک فضای نمونه ممکن است چندین نقطه موجود باشد که هر یک از آنها مثالی از یک پیشامد است در جعبه‌ای که ۹ توپ فضای نمونه را تشکیل داده است و در واقع ۹ نقطه است که ۶ نقطه آن توپ سفید و ۳ نقطه آن توپ سیاه است. پیشامد ممکن است این باشد که "توپ سفید است" این پیشامد دارای ۶ نقطه در فضای نمونه است. پیشامد "سیاه بودن توپ" دارای ۳ نقطه در فضای نمونه است. در رابطه با یک فضای نمونه می‌توانیم پیشامدهای مختلفی را بیان کنیم. برای مثال در مورد فضای نمونه بالا علاوه بر پیشامدهای "سفیدبودن توپ" و "سیاه بودن توپ" پیشامد "سفید یا سیاه بودن توپ" و حتی پیشامد "قرمز بودن توپ" که هیچ نقطه‌ای را در این فضای نمونه ندارد، می‌توان مطرح کرد. به بیان دیگر به هریک از زیر مجموعه‌های فضای نمونه، یک پیشامد گفته می‌شود. پیشامد را با حروف بزرگ A, B, C و احتمال وقوع آنها را با P نشان می‌دهند. مثلاً احتمال وقوع پیشامد A را به صورت $P(A)$ نمایش می‌دهند.

خودآزمایی ۱-۱

احتمال پیشامد B را چگونه نشان می‌دهند.

حکم احتمال

درباره وقوع پیشامدی که با یک فضای نمونه مربوط است یک "حکم احتمال" بیان می‌شود: "در صورتی که احتمال کلیه نقاط نمونه یکسان باشد، احتمال پیشامد A

یا $P(A)$ عبارت است از نسبت تعداد نقاطی (عناصری) از فضای نمونه که مثال‌هایی از پیشامد A هستند تقسیم بر تعداد کل نقطه‌های فضای نمونه".

فرض کنید که پیشامد A "یک توپ سفید است" و فضای نمونه مجموعه ۹ توپ (۶ سفید و ۳ سیاه) در یک جعبه باشد. چند نقطه از فضای نمونه مثال‌هایی از پیشامد A هستند؟ جواب ۶ است. تعداد کل فضای نمونه ۹ است. بنابراین، احتمال پیشامد "یک توپ سفید" عبارت است از:

$$p(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

تعداد کل نقاط فضای نمونه

تعداد مثال‌های A

احتمال پیشامد A

خودآزمایی ۱-۲

دانشجوی عزیز با توجه به مطالب ذکر شده اگر در مثال ما پیشامد B "یک توپ سیاه است" باشد $P(B)$ یا احتمال پیشامد B را تعیین کنید

پیشامد ابتدایی

یک پیشامد ابتدایی عبارت است از یک نقطه نمونه. برای مثال جعبه‌ای که در آن ۹ توپ وجود دارد دارای ۹ پیشامد ابتدایی است و هر پیشامدی که درباره فضای نمونه تعریف می‌شود از یک مجموعه پیشامد ابتدایی تشکیل شده است. هر نقطه نمونه را با اندیسی از حرف "a" مانند $a_1, \dots, a_n$ نشان می‌دهیم.

خودآزمایی ۱-۳

فرض کنید جعبه‌ای با ۴ توپ قرمز و تعداد نامعلومی توپ سیاه داشته باشیم احتمال پیشامد "یک توپ قرمز است" چقدر است؟

فکر می‌کنید احتمال پیشامد "یک توپ قرمز است" یعنی $P(A)$ در مثال بالا چقدر است؟ درست فکر کرده‌اید نمی‌توانیم این احتمال را پاسخ دهیم. چرا؟ چون که بیان حکم احتمال در صورتی امکانپذیر است که ویژگی‌های فضای نمونه را کاملاً بشناسیم.

احتمال نظری و احتمال تجربی

برای هر پیشامد می‌توان دو گونه احتمال ذکر کرد. یک "احتمال نظری"^۱ که درست‌نمایی یا احتمال وقوع یک پیشامد است براساس تقسیم تعداد نقاط یا عناصر یک پیشامد بر تعداد کل نقاط یا اعضای نمونه. مثلاً احتمال آمدن شیر در پرتاب یک سکه $\frac{1}{2}$ است و احتمال نظری اینکه در پرتاب دو سکه هر دو شیر بیایند $\frac{1}{4}$ خواهد بود. احتمال نظری بر اساس مفروضه‌های نظری مربوط به پیشامد و فضای نمونه محاسبه می‌شود.

احتمال دیگر "احتمال تجربی"^۲ است. در این نوع احتمال احتیاج به مفروضات نظری نیست بلکه عبارت است از مشاهده و آزمایش پیشامد در وضعیت عملی و تجربی. مثلاً اگر بخواهیم از ۱۰۰۰ نفر متقاضی به صورت تصادفی ۵۰ نفر برای یک سازمان انتخاب کنیم، شانس انتخاب شدن هر فرد $\frac{1}{20} = \frac{5}{1000}$ خواهد بود. یعنی برای محاسبه احتمال انتخاب شدن، حجم نمونه آزمایشی بر فضای نمونه تقسیم می‌گردد که در مثال فوق حجم نمونه آزمایشی برابر ۵۰ و حجم فضای نمونه برابر ۱۰۰۰ است یعنی احتمال انتخاب شدن هر کدام از افراد جامعه مورد نظر در نمونه ۵۰ نفری برابر $\frac{1}{20}$ است یا اگر یک تیم ورزشی از π بار، r مرتبه برنده شود، احتمال برنده شدن او در بازی‌های دیگر نسبت خواهد بود. به عبارت دیگر در محاسبه احتمال تجربی فراوانی مشاهده پیشامد بر فراوانی عناصر فضای نمونه تجربی یا آزمایش تقسیم می‌شود.

رابطه احتمال نظری با احتمال تجربی چنان است که هرگاه تعداد آزمایش‌ها به سمت بی‌نهایت میل کند تفاضل آن دو به صفر نزدیک می‌شود. برای مثال وقتی گفته

می‌شود احتمال شیر یا خط آمدن در پرتاب سکه $\frac{1}{2}$ است، بدین معنا نیست که در آزمایش واقعی به تناوب منظم یکبار شیر و یکبار خط خواهد آمد. بلکه منظور این است که اگر آزمایش را به تعداد زیاد تکرار کنیم تقریباً در ۵۰٪ موارد شیر و در ۵۰٪ موارد خط خواهد آمد. هر قدر تعداد آزمایش‌ها، فراوان‌تر باشد این تقریب دقیق‌تر است و نسبت واقعی دو پیشامد به نسبت نظری آن $\frac{1}{2}$ یا ۵۰٪ موارد نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر احتمال نظری از یک مدل نظری تبعیت می‌کند در حالی که احتمال تجربی چنین نیست اگر آزمایشات تجربی تکرار شوند و این تکرار به سمت بی‌نهایت برود در این صورت مدل احتمال تجربی به احتمال نظری نزدیک می‌شود.

خودآزمایی ۴-۱

اگر احتمال برد تیم بسکتبال دانشگاه را با توجه به بردهایی که در مسابقات قبلی داشته است پیش‌بینی کنیم، با کدام احتمال روبرو هستیم؟

مجموعه‌ها و احتمالات

مجموعه

یکی از مفاهیم بنیانی ریاضی که در احتمالات و آمار کاربرد دارد و قبل از بیان احتمالات ترکیبی لازم است در مورد آن توضیح داده شود، مجموعه است. گروهی از اشیاء، عناصر، رویدادها و به طور کلی اعضاء تشکیل یک مجموعه را می‌دهند. مثلاً مجموعه دانشجویان رشته روان‌شناسی دانشگاه پیام نور. مجموعه توسط حروف بزرگ مانند A, B, C و $\{ \}$ نمایش داده می‌شود. برای نشان دادن اعضای مجموعه، از حروف کوچک استفاده می‌شود و اعضای یک مجموعه داخل آکولاد نمایش داده می‌شوند. مثلاً $A = \{a, b, c, d\}$ (مجموعه‌ای است با اعضای a, b, c, d). بعضی مواقع در نمایش یک مجموعه، ویژگی مشترک اعضاء بیان می‌شود. هر کدام از حروف a, b, c, d را اعضای مجموعه A می‌نامند. $\in$ علامت عضویت است و $a \in A$ به معنی این است که a عضو

مجموعه A است. مثال؛ مجموعه شهرهای با جمعیت بیش از یک میلیون نفر:

$$D = \{X \mid X \text{ شهری با جمعیت بیش از یک میلیون نفر}\}$$

گزاره بالا را چنین می‌خوانیم: D مجموعه‌ای است با عضوهای X ، به طوری که X شهری است با جمعیت بیش از یک میلیون نفر.

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cup B$ (اجتماع B) نمایش می‌دهند، $A \cup B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن در مجموعه A یا در مجموعه B باشد. برای مثال اگر دو مجموعه A, B داشته باشیم و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ و $A = \{1, 2, 3\}$ باشد $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ خواهد بود.

اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A, B را بصورت $A \cap B$ (اشتراک B) نمایش می‌دهند، $A \cap B$ مجموعه‌ای که اعضای آن هم در مجموعه A و هم در مجموعه B باشد. مثلاً اگر $A = \{2, 3, 6\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ باشند آنگاه، $A \cap B = \{6\}$ خواهد بود. بنابراین اگر دو مجموعه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، اشتراک آنها تهی خواهد بود. $(A \cap B = \emptyset)$ و اگر هر عضو مجموعه A در مجموعه B باشد، مجموعه را زیرمجموعه B می‌نامند و آن را به صورت $B \subset A$ نمایش می‌دهند، با توجه به مفاهیم بالا می‌توان گفت که هر فضای نمونه (S) یک مجموعه است و همه پیشامدهای آن زیر مجموعه‌ای از آن به شمار می‌روند.

خودآزمایی ۱-۵

دو مجموعه A و B شامل دو سری اعداد هستند A شامل اعداد زوج کمتر از ۱۲ و B اعداد کوچک‌تر از ۶ است با توجه به این دو مجموعه $A \cap B$ و $A \cup B$ را بنویسید؟

ترکیب احتمالات

در احتمالات ما می‌توانیم پیشامدهای ترکیبی هم داشته باشیم. برای مثال در جعبه‌ای که ۶ مهره سیاه، ۳ مهره سفید و ۲ مهره قرمز است این پیشامد که "مهره، قرمز یا سیاه است" یک احتمال ترکیبی نامیده می‌شود. حال احتمال این پیشامد چقدر است؟ برای حل احتمالات ترکیبی لازم است با قوانین جمع احتمالات و همچنین با قوانین ضرب احتمالات آشنا شویم.

اولین قاعده جمع احتمالات

هرگاه پیشامد A, B دوه‌دو ناسازگار باشند به معنی این خواهد بود که آنها هیچ عضو مشترک ندارند یعنی $A \cap B = \emptyset$ مثلاً پیشامد مهره سفید باشد و پیشامد، مهره قرمز باشد دو پیشامد ناسازگار هستند در چنین حالتی احتمال وقوع اجماع دو پیشامد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

بنابر اولین قاعده جمع احتمالات، در جعبه‌ای که ۶ مهره سیاه، ۳ مهره سفید و ۲ مهره قرمز وجود دارد. احتمال این پیشامد که مهره سیاه یا قرمز است که یک احتمال ترکیبی می‌باشد عبارت است از:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}$$

در رابطه بالا A پیشامد مهره قرمز است و B پیشامد مهره سیاه است

و $P(B) = \frac{6}{11}$ و $P(B) = \frac{2}{11}$ به ترتیب احتمال‌های وقوع پیشامدهای A و B هستند.

خودآزمایی ۱-۶

دانشجوی عزیز مشخص کنید که احتمال این پیشامد که "مهره سفید یا سیاه است" چقدر است؟