



# روش‌های محاسبات عددی

دکتر فهیمه سلطانیان

دکتر مریم شمس‌سولاری

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

#### مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

## فهرست مطالب کتاب

| نه | پیشگفتار                        |
|----|---------------------------------|
| ۱  | فصل اول: خطاهای محاسباتی        |
| ۱  | هدف کلی                         |
| ۱  | هدف‌های یادگیری                 |
| ۱  | مقدمه                           |
| ۲  | ۱-۱ منابع خطا                   |
| ۵  | ۲-۱ نمایش اعداد                 |
| ۶  | ۳-۱ بسط اعداد در مبنای ۲        |
| ۱۰ | ۴-۱ ارقام با معنا               |
| ۱۱ | ۵-۱ خطای نمایش اعداد            |
| ۱۳ | ۶-۱ انواع خطاها                 |
| ۱۷ | ۷-۱ انتشار خطا                  |
| ۲۱ | ۸-۱ خطای محاسبه فرمول‌ها        |
| ۲۳ | ۹-۱ خطای محاسبه توابع           |
| ۳۳ | خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول  |
| ۳۵ | خودآزمایی تشریحی فصل اول        |
| ۳۷ | فصل دوم: حل عددی معادلات غیرخطی |
| ۳۷ | هدف کلی                         |
| ۳۷ | هدف‌های یادگیری                 |
| ۳۷ | مقدمه                           |

|     |                                             |
|-----|---------------------------------------------|
| ۳۸  | ۱-۲ روش دوبخشی (تصیف)                       |
| ۴۴  | ۲-۲ روش نابه‌جایی                           |
| ۴۷  | ۳-۲ روش تکرار ساده (نقطه ثابت)              |
| ۵۳  | ۴-۲ روش نیوتن - رفسون                       |
| ۵۷  | ۵-۲ روش وتری (خط قاطع)                      |
| ۵۹  | ۶-۲ مرتبه همگرایی یک دنباله                 |
| ۶۱  | ۷-۲ تعیین ریشه‌های یک چندجمله‌ای            |
| ۶۵  | مسائل حل شده                                |
| ۷۱  | خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم              |
| ۷۵  | خودآزمایی تشریحی فصل دوم                    |
| ۷۹  | <b>فصل سوم: درونیابی</b>                    |
| ۷۹  | <b>هدف کلی</b>                              |
| ۷۹  | <b>هدف‌های یادگیری</b>                      |
| ۸۰  | <b>مقدمه</b>                                |
| ۸۰  | ۱-۳ مفهوم درونیابی                          |
| ۸۱  | ۲-۳ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ                  |
| ۸۶  | ۳-۳ درونیابی به روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن |
| ۹۳  | ۴-۳ خطای چندجمله‌ای درونیاب                 |
| ۹۶  | ۵-۳ درونیابی با نقاط متساوی‌الفاصله         |
| ۱۰۷ | ۶-۳ درونیابی معکوس                          |
| ۱۰۹ | مسائل حل شده                                |
| ۱۱۳ | خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم              |
| ۱۱۹ | خودآزمایی تشریحی فصل سوم                    |
| ۱۲۳ | <b>فصل چهارم: تقریب کمترین مربعات</b>       |
| ۱۲۳ | <b>هدف کلی</b>                              |
| ۱۲۳ | <b>هدف‌های یادگیری</b>                      |
| ۱۲۳ | <b>مقدمه</b>                                |
| ۱۲۴ | ۱-۴ خط کمترین مربعات                        |
| ۱۲۸ | ۲-۴ چندجمله‌ای کمترین مربعات                |
| ۱۳۰ | ۳-۴ انواع دیگری از تقریب‌های کمترین مربعات  |
| ۱۳۵ | مسائل حل شده                                |
| ۱۳۸ | خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم            |
| ۱۴۵ | خودآزمایی تشریحی فصل چهارم                  |

|     |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| ۱۴۷ | فصل پنجم: مشتق‌گیری عددی                             |
| ۱۴۷ | هدف کلی                                              |
| ۱۴۷ | هدف‌های یادگیری                                      |
| ۱۴۷ | مقدمه                                                |
| ۱۴۸ | ۱-۵ تقریب مشتق مرتبه اول با استفاده از تفاضلات پیشرو |
| ۱۵۱ | ۲-۵ تقریب مشتق مرتبه اول با استفاده از تفاضلات پسرو  |
| ۱۵۳ | ۳-۵ مشتق‌گیری عددی با استفاده از بسط تیلور           |
| ۱۵۵ | ۴-۵ مشتقات مراتب بالاتر                              |
| ۱۵۶ | ۵-۵ خطای مشتق‌گیری عددی                              |
| ۱۵۷ | مسائل حل شده                                         |
| ۱۵۹ | خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم                      |
| ۱۶۱ | خودآزمایی تشریحی فصل پنجم                            |
| ۱۶۳ | فصل ششم: انتگرال‌گیری عددی                           |
| ۱۶۳ | هدف کلی                                              |
| ۱۶۳ | هدف‌های یادگیری                                      |
| ۱۶۳ | مقدمه                                                |
| ۱۶۴ | ۱-۶ انتگرال‌گیری عددی به روش دوزنقه‌ای               |
| ۱۶۶ | ۲-۶ خطای روش دوزنقه‌ای                               |
| ۱۶۷ | ۳-۶ انتگرال‌گیری عددی به روش سیمپسون                 |
| ۱۶۹ | ۴-۶ خطای روش سیمپسون                                 |
| ۱۷۰ | ۵-۶ انتگرال‌گیری عددی به روش نقطه میانی              |
| ۱۷۲ | ۶-۶ خطای روش نقطه میانی                              |
| ۱۷۳ | ۷-۶ انتگرال‌گیری رامبرگ                              |
| ۱۷۶ | ۸-۶ روش ضرایب نامعین                                 |
| ۱۷۹ | ۹-۶ روش گاوس                                         |
| ۱۸۲ | ۱۰-۶ انتگرال‌های ناسره                               |
| ۱۸۵ | مسائل حل شده                                         |
| ۱۸۸ | خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل ششم                       |
| ۱۹۱ | خودآزمایی تشریحی فصل ششم                             |
| ۱۹۳ | فصل هفتم: حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی           |
| ۱۹۳ | هدف کلی                                              |
| ۱۹۳ | هدف‌های یادگیری                                      |
| ۱۹۳ | مقدمه                                                |
| ۱۹۴ | ۱-۷ روش بسط تیلور                                    |

|     |                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------|
| ۱۹۷ | ۲-۷ روش اویلر                                                     |
| ۱۹۹ | ۳-۷ روش های رانگ - کوتا                                           |
| ۲۰۴ | ۴-۷ دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول                            |
| ۲۰۸ | ۵-۷ معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر                                |
| ۲۱۱ | مسائل حل شده                                                      |
| ۲۱۶ | خودآزمایی چهارگزینه ای فصل هفتم                                   |
| ۲۲۳ | خودآزمایی تشریحی فصل هفتم                                         |
| ۲۲۷ | <b>فصل هشتم: حل دستگاه معادلات خطی</b>                            |
| ۲۲۷ | <b>هدف کلی</b>                                                    |
| ۲۲۷ | <b>هدف های یادگیری</b>                                            |
| ۲۲۷ | <b>مقدمه</b>                                                      |
| ۲۲۸ | ۱-۸ روش های مستقیم برای حل دستگاه معادلات خطی                     |
| ۲۳۷ | ۲-۸ روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی                     |
| ۲۴۱ | ۳-۸ دستگاه معادلات غیرخطی                                         |
| ۲۴۵ | مسائل حل شده                                                      |
| ۲۴۷ | خودآزمایی چهارگزینه ای فصل هشتم                                   |
| ۲۴۹ | خودآزمایی تشریحی فصل هشتم                                         |
| ۲۵۱ | <b>فصل نهم: یافتن مقادیر ویژه برای ماتریس A</b>                   |
| ۲۵۱ | <b>هدف کلی</b>                                                    |
| ۲۵۱ | <b>هدف های یادگیری</b>                                            |
| ۲۵۱ | <b>مقدمه</b>                                                      |
| ۲۵۱ | ۱-۹ مقدار ویژه و بردار ویژه                                       |
| ۲۵۲ | ۲-۹ خصوصیات مقادیر ویژه و بردارهای ویژه                           |
| ۲۵۳ | ۳-۹ روش ضرایب نامعین برای به دست آوردن چندجمله ای مشخصه یک ماتریس |
| ۲۵۵ | ۴-۹ روش کریلف برای به دست آوردن چندجمله ای مشخصه یک ماتریس        |
| ۲۵۷ | ۵-۹ معکوس یک ماتریس با استفاده از قضیه کیلی - همیلتون             |
| ۲۵۸ | ۶-۹ روش های تکراری برای یافتن مقادیر ویژه                         |
| ۲۶۰ | مسائل حل شده                                                      |
| ۲۶۲ | خودآزمایی چهارگزینه ای فصل نهم                                    |
| ۲۶۶ | خودآزمایی تشریحی فصل نهم                                          |
| ۲۶۷ | <b>منابع</b>                                                      |

## پیشگفتار

یکی از مهم‌ترین و ضروری‌ترین دروس مورد نیاز در رشته‌های مهندسی و علوم پایه، محاسبات عددی است. روش‌های محاسبات عددی به تنظیم، بررسی، مطالعه و انجام شیوه‌های تقریبی محاسباتی برای حل آن دسته از مسائل ریاضیات پیوسته می‌پردازد که در مقابل ریاضیات گسسته، حل تحلیلی برای آن‌ها نیست و یا حل تحلیلی آن‌ها مشکل و دردسرساز است. به کمک الگوریتم‌ها و روش‌های عددی ارائه‌شده در محاسبات عددی و روی میدان اعداد حقیقی و مختلط، می‌توان بسیاری از مسائل پیچیده در آنالیز، جبر خطی و معادلات را حل کرد و جواب تقریبی نزدیک به جواب واقعی برای آن‌ها پیدا کرد. امروزه بسیاری از نرم‌افزارهای کاربردی در مهندسی و علوم از روش‌های محاسبات عددی به‌عنوان یک ابزار مهم و کلیدی برای حل و رفع مشکلات ریاضی و محاسباتی استفاده می‌کنند.

در این کتاب که نتیجه تجربه چندین سال تدریس دروس محاسبات عددی و آنالیز عددی نویسندگان است، سعی شده تمام مطالب به‌صورت کاملاً خودآموز و با زبان ساده، شیوا و قابل فهم برای دانشجویان دوره کارشناسی بیان شود. از ویژگی‌های کتاب حاضر، بیان تمام مطالب سرفصل مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای این درس است که در قالب ۹ فصل ارائه شده‌است.

بدون شک یکی از مباحث اساسی و پایه‌ای در محاسبات عددی، مبحث خطاها است که در فصل اول بیان شده‌است. در فصل‌های بعدی با ترتیبی منطقی و مستقل، روش‌های مورد نیاز برای حل عددی مسائل مختلف مورد مطالعه قرار گرفته‌است.

همچنین انواع مختلف خطاها و تقریب‌های ارائه شده در فصل اول، در فصل‌های بعدی به کار برده می‌شوند.

در انتهای هر روش، مثال‌های عددی که کاربرد آن روش را نشان می‌دهد، با جزئیات کامل ارائه شده است. در پایان هر فصل برای درک بهتر مطالب و کاربرد آن در حل مسائل مختلف، تعدادی تمرین‌های چهارگزینه‌ای و تشریحی که از آزمون‌های مختلف انتخاب شده به همراه حل آن‌ها آورده شده است. همچنین در پایان هر فصل تمرین‌هایی به صورت خودآزمایی برای دانشجویان علاقه‌مند به مطالعه و برای سنجش آموخته‌های آن‌ها بیان شده است.

# فصل اول

## خطاهای محاسباتی

### هدف کلی

در این فصل منابع خطا، انواع خطاها و رابطه آنها با دقت یک تقریب، جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی همچنین محاسبه مقدار تقریبی فرمول‌ها و توابع با حداقل خطا مطالعه می‌شود.

### هدف‌های یادگیری

- دانشجو در پایان فصل باید بتواند:
۱. منابع خطاها را در یک مسئله تشخیص دهد.
  ۲. بسط اعداد در مبناهای مختلف را بنویسد و از بسط اعشاری یک عدد، تقریبی مناسب انتخاب کند.
  ۳. انواع خطاها را شناخته و رابطه آنها را با دقت یک تقریب بیان کند.
  ۴. دقت یک تقریب را تا حد امکان بالا برده و خطا را کاهش دهد.
  ۵. فرمول‌ها و توابع را با حداقل خطا و عملیات محاسبه کند.

### مقدمه

پیش از بیان مفهوم محاسبات عددی لازم است به‌طور خلاصه با مفهوم آنالیز عددی آشنا شویم. آنالیز عددی مطالعه و گسترش روش‌هایی برای حل مسائل به‌وسیله یک ابزار

محاسباتی است و مهم‌ترین ویژگی این علم به‌دست‌آوردن جواب‌های عددی مسائلی است که پاسخ تحلیلی ندارند یا به‌کاربردن پاسخ تحلیلی با مشکلاتی مواجه است. به‌عنوان مثال برای محاسبه طول قوس منحنی  $y = \sin x$  ناگزیر از حل انتگرال  $\int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$  هستیم که جوابی به فرم بسته ندارد. ولی محاسبات عددی می‌تواند طول قوس این منحنی را با روش‌های استاندارد محاسبه کند که این روش‌ها برای هر تابع انتگرالدهای کاربرد دارند. علاوه بر این تنها عملگرهای ریاضی مورد نیاز در این روش‌ها، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم هستند که به‌راحتی توسط ابزارهای محاسباتی قابل اجرا هستند.

از آن‌جا که بررسی دقت نتایج حاصل از محاسبات مهم‌ترین هدف در محاسبات عددی است، در این فصل به‌دنبال آشنایی با منشأ این خطاها و نحوه برخورد و کنترل آن‌ها هستیم.

### ۱-۱ منابع خطا

برای حل یک مسئله ابتدا با در نظر گرفتن عوامل اساسی و صرف‌نظر از عوامل کم‌اهمیت، یک مدل ریاضی برای مسئله تعیین می‌شود. سپس روش یا الگوریتمی به‌کار برده می‌شود که مناسب‌ترین جواب مسئله مورد نظر را محاسبه کند. در طی انجام این فرایند خطاهایی به‌وجود می‌آیند که برخی قابل پیش‌بینی و برخی غیرقابل پیش‌بینی هستند و انواع گوناگونی دارند. منابع خطاهایی که برای حل یک مسئله ایجاد می‌شوند را می‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد:

- **خطای مدل:** این خطا مربوط به نحوه بیان مسئله است. در بیشتر مواقع حل مسئله‌ای که به‌طور دقیق فرمول‌بندی شده باشد، بسیار مشکل یا غیرممکن است. بنابراین برای مدل‌بندی یک مسئله، ناگزیر به صرف‌نظر کردن از تعدادی پارامترهای موجود در مسئله برای ساده کردن مدل مورد بحث هستیم.

- **خطای داده‌ها یا خطای اندازه‌گیری:** این خطا هنگام اندازه‌گیری و برآورد مفروضات یک مسئله به‌وجود می‌آید.

- **خطای نمایش اعداد:** از آن‌جا که وسایل محاسباتی قادر به ذخیره و نمایش تعداد متناهی رقم از ارقام نمایش اعشاری یا دودویی اعداد هستند، انتخاب تعداد متناهی رقم، این خطا را ایجاد می‌کند. خطای حاصل از نمایش ثابت‌های فیزیکی از این دسته است.

### خطاهای محاسباتی ۳

• **خطای عملیات حسابی:** در انجام اعمالی نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، جواب به دست آمده دارای تعداد نامتناهی رقم است. بنابراین انتخاب تعداد متناهی از این ارقام، خطای عملیات حسابی را ایجاد می کند. مانند در نظر گرفتن  $0.333$  به جای خارج قسمت  $\frac{1}{3}$  که با منظور کردن تنها سه رقم اعشار، خطایی مرتکب شده ایم.

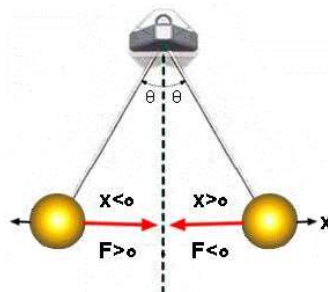
• **خطای روش عددی:** بیشتر روش های عددی تکراری هستند و با استفاده از آن ها می توان تقریبی از جواب دقیق مسئله را به دست آورد. دقت جواب تقریبی به نوع روش و مرحله توقف آن بستگی دارد. معمولاً بعد از بیان هر روش عددی، خطای آن مورد بررسی قرار می گیرد و کران بالایی برای خطای جواب های تقریبی به دست می آید. مانند روش هایی که برای حل معادله  $f(x)=0$  و پیدا کردن ریشه های آن به کار می روند.

از این پنج منبع خطا، خطای مدل و خطای داده ها مربوط به نوع مسئله بوده و از کنترل و محاسبه خارج هستند. به عنوان مثال ممکن است مربوط به عیوب ذاتی دستگاه های اندازه گیری باشند. اما سه خطای دیگر در آنالیز عددی مورد تحلیل قرار می گیرند. در این فصل به بررسی خطای نمایش اعداد و خطای عملیات حسابی می پردازیم.

در ادامه با ارائه یک مثال، چگونگی بروز خطاهای بیان شده را در حل یک مسئله واقعی شرح می دهیم.

#### ۱-۱-۱ مثال

مسئله تعیین حرکت آونگی به جرم  $m$  و به طول  $l$  که به اندازه زاویه  $\theta$  از حالت قائم منحرف شده است را در نظر بگیرید.



شکل ۱-۱

برای تعیین یک مدل ساده ریاضی برای مسئله، فرض می‌کنیم نخ، غیرقابل کشش و همگن است. همچنین از اصطکاک نقطه آویز، جرم نخ، مقاومت هوا و همه نیروها جز نیروی جاذبه صرف‌نظر می‌کنیم. دو نیروی وزن  $mg$  و کشش نخ  $T$  بر آونگ وارد می‌شود.  $T$  در امتداد نخ است و در هر لحظه بر مسیر حرکت وزنه عمود است. بنابراین در راستای مماس بر مسیر مؤلفه ندارد. نیروی وزن به دو مؤلفه تجزیه می‌شود. یک مؤلفه در امتداد عمود بر مسیر و برابر با  $mg \cos \theta$  است که با نیروی در امتداد کشش نخ خنثی می‌شود. مؤلفه دیگر در امتداد مماس بر مسیر و برابر با  $F = -mg \sin \theta$  است.  $F$  نیروی بازگرداننده است و می‌خواهد آونگ را به وضعیت تعادل برگرداند. به دلیل کوچک‌بودن زاویه انحراف آونگ می‌توان نوشت:

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{x}{l}$$

بنابراین

$$|F| = mg \sin \theta \approx mg \theta = mg \frac{x}{l}$$

$F$  همواره در خلاف جهت بردار مکان است، بنابراین

$$F = -mg \frac{x}{l} = -\frac{mg}{l} x = -kx$$

این رابطه نشان می‌دهد نیروی بازگرداننده در آونگ از قانون هوک  $F = -kx$  پیروی می‌کند و بنابراین حرکت آونگ ساده کم‌دامنه، یک حرکت هماهنگ ساده است. از طرفی بنا به قانون دوم نیوتن  $F = ma$  و در نتیجه

$$-mg \frac{x}{l} = ma$$

بنابراین

$$a = -g \frac{x}{l}$$

از مقایسه این رابطه با رابطه متداولی که برای شتاب داریم یعنی  $a = -\omega^2 x$ ، نتیجه می‌شود:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

## خطاهای محاسباتی ۵

بنابراین دوره تناوب آونگ ساده  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  یا  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  به دست می آید.

در این مسئله تا اینجا خطای مدل را مرتکب شده ایم. خطای داده ها به هنگام اندازه گیری طول نخ  $l$  و ثابت ثقل  $g$  پیش می آید. چون  $\pi$  باید با تعداد متناهی رقم نوشته شود، خطای نمایش اعداد را خواهیم داشت. خطای اعمال حسابی، خطای محاسبه یک ضرب و خارج قسمت  $l$  بر  $g$  است که با تعداد متناهی رقم انجام می شود. در نهایت خطای روش به هنگام انتخاب روشی برای محاسبه جذر  $\frac{l}{g}$  پیش می آید.

### ۲-۱ نمایش اعداد

از آن جا که روش های عددی شامل مراحل تکرار زیاد و انجام عملیات فراوان است، لازم است برای تعیین جواب عددی مسائل، از یک ابزار محاسباتی مناسب نظیر ماشین حساب یا رایانه استفاده کرد. از طرفی کار با کسرهای متعارفی و اعداد گنگ (اصم) توسط ماشین حساب و رایانه عملی نیست ولی به راحتی می توان با اعداد اعشاری کار کرد.

### ۱-۲-۱ بسط اعشاری اعداد

بسط اعشاری یک عدد مثبت، نمایش آن به صورت زیر است:

$$a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

که در آن

$$a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq 9$$

### ۲-۲-۱ مثال

بسط اعشاری اعداد  $2346$  و  $2/006$  را بنویسید.

حل:

$$2346 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

$$2/006 = 2 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-3}$$

بسط اعشاری یک عدد می تواند مختوم، نامختوم و متناوب یا نامختوم و نامتناوب باشد. به قضیه زیر و نتیجه آن توجه کنید:

### ۱-۲-۳ قضیه

اگر بسط اعشاری عدد  $A$  مختوم یا نامختوم و متناوب باشد،  $A$  یک عدد گویا است. از عکس نقیض این قضیه، نتیجه زیر را داریم:

### ۱-۲-۴ نتیجه

اگر  $A$  یک عدد گنگ باشد، بسط اعشاری آن نامختوم است ولی متناوب نیست. اگر  $A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n$  (بسط اعشاری  $A$  مختوم باشد) آن‌گاه به راحتی می‌توان کسر مربوط به آن را از رابطه زیر به دست آورد:

$$A = a_1 a_2 \dots a_m + \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{10^n} \quad (1-1)$$

برای نوشتن کسر مربوط به یک عدد اعشاری نامختوم و متناوب، از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

### ۱-۲-۵ قضیه

اگر  $A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_k$ ، آن‌گاه

$$A = a_1 a_2 \dots a_m + \frac{b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_k - b_1 b_2 \dots b_n}{10^n (10^k - 1)} \quad (2-1)$$

### ۱-۲-۶ مثال

کسر مربوط به اعداد اعشاری  $25/\overline{32}$  و  $0.0\overline{6}$  را به دست آورید.

حل: از رابطه (۲-۱) داریم:

$$\begin{aligned} 25/\overline{32} &= 25 + \frac{32-0}{99} = \frac{2507}{99} \\ 0.0\overline{6} &= \frac{6-0}{900} = \frac{3}{450} = \frac{1}{150} \end{aligned}$$

### ۱-۳ بسط اعداد در مبنای ۲

از قضیه ۱-۲-۳ و نتیجه ۱-۲-۴ مشخص می‌شود که بسیاری از اعداد گویا و تمامی

## خطاهای محاسباتی ۷

اعداد گنگ دارای بسط اعشاری نامختوم هستند. همچنین بسیاری از اعداد که دارای بسط اعشاری مختوم هستند، وقتی به مبنای ۲ برده می‌شوند، دارای بسط اعشاری نامختوم هستند. بنابراین، تعداد محدودی از ارقام بسط یک عدد در مبنای ۲ قابل ذخیره در وسایل محاسباتی بوده و تقریباً تمامی اعداد غیر صحیح به صورت تقریبی در حافظه این وسایل ذخیره می‌شوند که این یکی از ضعف‌های این وسایل است و در عمل مشکلات زیادی را به وجود می‌آورد. در این قسمت نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان بسط اعداد در مبنای ۲ را به دست آورد.

### ۱-۳-۱ بسط اعداد صحیح در مبنای ۲

یادآوری می‌کنیم که برای بسط عدد صحیح  $A$  در مبنای ۲، می‌توان از روش تقسیمات متوالی استفاده کرد. این روش را می‌توان به صورت الگوریتم زیر بیان کرد:

گام ۱:  $A$  را می‌گیریم.

گام ۲: قرار می‌دهیم  $n = 1$ .

گام ۳: قرار می‌دهیم  $b_n = A - 2 \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor$ .

گام ۴: اگر  $\left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor = 0$  باشد، به گام ۷ می‌رویم.

گام ۵: قرار می‌دهیم  $A = \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor$ .

گام ۶: قرار می‌دهیم  $n = n + 1$  و به گام ۳ می‌رویم.

گام ۷:  $b_1 b_2 \dots b_n$  را به عنوان بسط عدد صحیح  $A$  در مبنای ۲ می‌نویسیم.

گام ۸: پایان الگوریتم.

### ۱-۳-۲ مثال

عدد ۲۵ را به مبنای ۲ ببرید.

حل: با استفاده از الگوریتم بیان شده، می‌توان جدول زیر را تشکیل داد:

جدول ۱-۱

| $n$ | $A$ | $\left\lceil \frac{A}{2} \right\rceil$ | $b_n = A - 2 \left\lceil \frac{A}{2} \right\rceil$ |
|-----|-----|----------------------------------------|----------------------------------------------------|
| ۱   | ۲۵  | ۱۲                                     | ۱                                                  |
| ۲   | ۱۲  | ۶                                      | ۰                                                  |
| ۳   | ۶   | ۳                                      | ۰                                                  |
| ۴   | ۳   | ۱                                      | ۱                                                  |
| ۵   | ۱   | ۰                                      | ۱                                                  |

بنابراین

$$(25)_{10} = (11001)_2$$

## ۱-۳-۳ بسط اعداد بین صفر و یک در مبنای ۲

اگر  $A$  عددی بین صفر و یک باشد، با استفاده از الگوریتم زیر به راحتی می‌توان  $n$  رقم از بسط آن را در مبنای ۲ به دست آورد:

گام ۱:  $A$  و  $n$  را بگیرید.

گام ۲: برای  $i$  از ۱ تا  $n$  مراحل زیر را تکرار کنید:

الف) قرار دهید  $b = \lceil 2A \rceil$ .

ب)  $b$  را بنویسید.

ج) قرار دهید  $A = 2A - b$ .

د) اگر  $A = 0$  یا  $A$  تکراری شد، اجرای الگوریتم را متوقف کنید.

گام ۳: پایان الگوریتم.

لازم به ذکر است که اگر در اجرای این الگوریتم به  $A = 0$  برسیم، بسط  $A$  در مبنای ۲ مختوم است و اگر به  $A$  تکراری برسیم، بسط  $A$  در مبنای ۲ نامختوم و متناوب است.

این الگوریتم را می‌توان به راحتی برای تعیین بسط عدد صحیح  $A$  در مبنای دلخواه  $r$  که  $r \in \mathbb{N}$ ،  $r > 1$ ، تعمیم داد.

### ۱-۳-۴ مثال

بسط  $۰/۳$  در مبنای ۲ را بنویسید.

حل: با جایگذاری  $A=۰/۳$  در الگوریتم بیان شده، می‌توان جدول زیر را تشکیل داد:

جدول ۱-۲

| $i$ | $A$   | $۲A$  | $b=[۲A]$ | $۲A-b$ |
|-----|-------|-------|----------|--------|
| ۱   | $۰/۳$ | $۰/۶$ | ۰        | $۰/۶$  |
| ۲   | $۰/۶$ | $۱/۲$ | ۱        | $۰/۲$  |
| ۳   | $۰/۲$ | $۰/۴$ | ۰        | $۰/۴$  |
| ۴   | $۰/۴$ | $۰/۸$ | ۰        | $۰/۸$  |
| ۵   | $۰/۸$ | $۱/۶$ | ۱        | $۰/۶$  |
| ۶   | $۰/۶$ |       |          |        |

تکرار  $A$  در این جدول نشان می‌دهد که بسط  $۰/۳$  در مبنای ۲ نامختوم و متناوب است و  
 $(۰/۳)_۲ = ۰/۰۱۰۰۱$

### ۱-۳-۵ مثال

بسط عدد  $\frac{1}{۹۲}$  را در مبنای ۱۰ به دست آورید.

حل: اگر در الگوریتم بیان شده قرار دهیم  $A=\frac{1}{۹۲}$  و به جای مبنای ۲ از مبنای ۱۰ استفاده کنیم، جدول زیر به دست می‌آید:

جدول ۳-۱

| $i$ | $A$             | $۱۰.A$           | $b = [۱۰.A]$ | $۱۰.A - b$      |
|-----|-----------------|------------------|--------------|-----------------|
| ۱   | $\frac{1}{81}$  | $\frac{10}{81}$  | ۰            | $\frac{10}{81}$ |
| ۲   | $\frac{10}{81}$ | $\frac{100}{81}$ | ۱            | $\frac{19}{81}$ |
| ۳   | $\frac{19}{81}$ | $\frac{190}{81}$ | ۲            | $\frac{28}{81}$ |
| ۴   | $\frac{28}{81}$ | $\frac{280}{81}$ | ۳            | $\frac{37}{81}$ |
| ۵   | $\frac{37}{81}$ | $\frac{370}{81}$ | ۴            | $\frac{46}{81}$ |
| ۶   | $\frac{46}{81}$ | $\frac{460}{81}$ | ۵            | $\frac{55}{81}$ |
| ۷   | $\frac{55}{81}$ | $\frac{550}{81}$ | ۶            | $\frac{64}{81}$ |
| ۸   | $\frac{64}{81}$ | $\frac{640}{81}$ | ۷            | $\frac{73}{81}$ |
| ۹   | $\frac{73}{81}$ | $\frac{730}{81}$ | ۹            | $\frac{1}{81}$  |
| ۱۰  | $\frac{1}{81}$  |                  |              |                 |

بنابراین

$$\frac{1}{9^2} = 0.012345679$$

## ۴-۱ ارقام بامعنا

اگرچه اعداد ۲، ۲/۰، ۲/۰۰، ۲/۰۰۰ در ریاضیات با هم مساوی بوده و صفرهای بعد از ممیز تفاوتی بین آن‌ها ایجاد نمی‌کند، ولی در علومی مانند شیمی، فیزیک و غیره این صفرها می‌تواند نشانه دقت اندازه‌گیری باشد. صفرهای جلوی یک عدد که نشانه دقت اندازه‌گیری هستند، صفرهای بامعنا نامیده می‌شوند. پیش از آن‌که تعریف دقیقی از تعداد ارقام بامعنا یک عدد داشته باشیم، نمایش علمی اعداد را بیان می‌کنیم.

#### ۱-۴-۱ نمایش علمی اعداد

عدد مفروض و مخالف صفر  $A$  را در نظر بگیرید. نمایش عدد  $A$  به صورت

$$A = a \times 10^b \quad (۳-۱)$$

را نمایش علمی  $A$  می‌نامیم که در آن  $b$  عددی صحیح است و  $1 \leq |a| < 10$ . در این نمایش  $a$  را ماننثیس و  $b$  را نمای عدد  $A$  می‌نامیم.

#### ۱-۴-۲ مثال

نمایش علمی اعداد  $۰/۰۰۷۲۶$  و  $۳۰۰$  را بنویسید.  
حل:

$$۰/۰۰۷۲۶ = ۷/۲۶ \times 10^{-۳}$$

$$۳۰۰ = ۳/۰۰ \times 10^۲$$

#### ۱-۴-۳ ارقام بامعنای اعداد

عدد اعشاری  $a$  که  $1 \leq |a| < 10$  را در نظر بگیرید. ارقام بامعنای  $a$  عبارت‌اند از ارقام مخالف صفر  $a$ ، صفرهای بین این ارقام و صفرهایی که به‌منظور نمایش دقت در جلوی عدد قرار دارند.  
نکته: ارقام بامعنای هر عدد مخالف صفر  $A$  همان ارقام بامعنای ماننثیس  $A$  هستند.

#### ۱-۴-۴ مثال

اگر  $A = ۲۳۰۰$  آن‌گاه  $A = ۲/۳۰۰ \times 10^۳$  نمایش علمی  $A$  بوده و تعداد ارقام بامعنای آن ۴ است.  
اگر  $A = ۰/۰۰۲۰۰۹۰$  آن‌گاه  $A = ۲/۰۰۹۰ \times 10^{-۳}$  نمایش علمی  $A$  بوده و تعداد ارقام بامعنای آن ۵ است.

#### ۱-۵ خطای نمایش اعداد

با توجه به محدود بودن حافظه وسایل محاسباتی برای ذخیره و نمایش اعدادی که دارای بسط اعشاری نامختوم هستند یا تعداد ارقام آنها زیاد است، باید تعداد متناهی