



ریاضی عمومی (۱)

(رشته ریاضی)

دکتر شهریار فرهمندراد

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

پیشگفتار	یازده
فصل اول: مختصات قطبی و اعداد مختلط	۱
هدف کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
مقدمه	۱
۱-۱ برابری اعداد مختلط	۲
۱-۱-۱ مجموع و تفاضل و حاصل ضرب دو عدد مختلط	۳
۲-۱-۱ تقسیم دو عدد مختلط	۳
۳-۱-۱ مزدوج عدد مختلط	۳
۲-۱ نمودار آرگان	۴
۱-۲-۱ اندازه یا کالبد اعداد مختلط	۵
۲-۲-۱ شناسه یا آرگومان	۵
۳-۱ نمایش مثلثاتی عدد مختلط (مختصات قطبی)	۶
۱-۳-۱ حاصل ضرب دو عدد مختلط در فرم مثلثاتی	۷
۲-۳-۱ تقسیم دو عدد مختلط در فرم مثلثاتی	۸
۳-۳-۱ تعریف e یا پایه لگاریتم نپر یا نپرین	۹
۴-۱ ریشه دوم عدد مختلط	۱۴
۵-۱ ریشه‌های اعداد مختلط در حالت کلی	۱۵
۶-۱ کاربردهای دستور موآور	۱۸
۱-۶-۱ استفاده بسط‌های مثلثاتی	۱۸
۲-۶-۱ پیدا کردن $Z^n + \frac{1}{Z^n}$ و $Z^n - \frac{1}{Z^n}$ برای $n \in \mathbb{N}$	۱۸
۳-۶-۱ خواص اندازه	۲۰
۷-۱ قضیه اساسی جبر	۲۷

۳۵	فصل دوم: تابع
۳۵	هدف کلی
۳۵	هدف‌های یادگیری
۳۶	مقدمه
۴۰	۱-۲ دامنه
۴۴	۲-۲ بُرد
۴۴	۱-۲-۲ قواعد تعیین بُرد
۵۲	۳-۲ تساوی دو تابع
۵۲	۴-۲ اعمال بر روی توابع
۵۴	۵-۲ انواع توابع
۵۴	۱-۵-۲ تابع یک به یک
۵۷	۲-۵-۲ تابع پوشا (یا پوششی)
۵۹	۳-۵-۲ تعریف تابع دوسویی
۵۹	۴-۵-۲ ترکیب دو تابع
۶۲	۵-۵-۲ تابع صعودی، تابع نزولی
۶۶	۶-۲ بررسی جهت تغییرات تابع مرکب
۶۸	۷-۲ توابع زوج و فرد
۶۹	۱-۷-۲ تابع زوج
۶۹	۲-۷-۲ تابع فرد
۷۰	۸-۲ خواص اساسی
۷۴	۹-۲ تابع معکوس
۷۸	۱۰-۲ خواص تابع وارون
۸۱	۱-۱۰-۲ قضیه (مشتق تابع وارون)
۸۶	۲-۱۰-۲ رده‌بندی توابع
۸۷	۳-۱۰-۲ تبدیلات توابع
۹۷	فصل سوم: حد و پیوستگی و مجانب
۹۷	هدف کلی
۹۷	هدف‌های یادگیری
۹۸	مقدمه
۱۰۱	۱-۳ تعریف حد متغیر
۱۱۴	۲-۳ قضایایی در مورد حد
۱۲۴	۳-۳ حد راست و حد چپ
۱۳۱	۴-۳ محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$
۱۳۶	۵-۳ قضیه فشار (یا فشردگی یا ساندویچ)
۱۴۶	۶-۳ قضیه (حد تابع مرکب)

۱۴۷	۷-۳ حد در بی‌نهایت و حدود بی‌نهایت‌شونده
۱۶۱	۸-۳ صورت‌های مبهم
۱۶۱	۹-۳ دو تابع هم‌ارز
۱۶۴	۱۰-۳ هم‌ارزی‌های مبهم
۱۶۵	۱۱-۳ رفع ابهام صورت‌های مبهم
۱۶۶	۱-۱۱-۳ $\frac{0}{0}$ رفع ابهام
۱۷۰	$\frac{\infty}{\infty}$ ۲-۱۱-۳ رفع ابهام
۱۷۵	$\infty - \infty$ ۳-۱۱-۳ رفع ابهام
۱۷۸	$0 \times \infty$ ۴-۱۱-۳ رفع ابهام
۱۸۰	۱۲-۳ بررسی حد توابع دوضابطه‌ای
۱۸۲	۱۳-۳ پیوستگی
۱۸۴	۱۴-۳ انواع ناپیوستگی
۱۸۵	۱۵-۳ قضایای پیوستگی
۱۸۷	۱۶-۳ پیوستگی تابع مرکب
۱۹۱	۱۷-۳ پیوستگی در بازه $[a, b]$
۱۹۳	۱۸-۳ بررسی پیوستگی توابع دوضابطه‌ای
۱۹۴	۱۹-۳ کاربردهای پیوستگی
۱۹۴	۱-۱۹-۳ قضیه مقدار میانی
۱۹۶	۲-۱۹-۳ قضیه بولتزانو
۱۹۹	۲۰-۳ مجانب
۱۹۹	۱-۲۰-۳ تعریف شاخه بی‌نهایت
۱۹۹	۲-۲۰-۳ تعریف مجانب
۲۰۲	۳-۲۰-۳ مجانب قائم
۲۰۴	۲۱-۳ طرز به‌دست‌آوردن معادله مجانب قائم
۲۰۸	۱-۲۱-۳ مجانب افقی
۲۱۰	۲-۲۱-۳ مجانب مایل
۲۱۲	۳-۲۱-۳ لم
۲۱۳	۲۲-۳ روش به‌دست‌آوردن معادله مجانب مایل به روش تقاطع
۲۱۵	۲۳-۳ روش به‌دست‌آوردن معادله مجانب مایل به روش تقسیم
۲۱۷	۲۴-۳ طرز به‌دست‌آوردن معادله مجانب مایل در توابع رادیکالی
۲۲۰	۲۵-۳ روش تعیین مجانب‌های افقی و قائم و مایل در توابع پارامتری: $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$
۲۲۱	۲۶-۳ روش تعیین مجانب‌های افقی و قائم و مایل در توابع ضمنی چندجمله‌ای
۲۲۷	۲۷-۳ مجانب در مقاطع مخروطی
۲۲۹	۲۸-۳ روش‌های کلی تعیین بُرد توابع

۲۲۹	۳-۲۸-۱ برد توابع صعودی یا نزولی پیوسته در بازه بی کران از یک طرف
۲۳۰	۳-۲۸-۲ بُرد توابع پیوسته در بازه باز کراندار
۲۳۱	۳-۲۸-۳ برد توابع پیوسته صعودی یا نزولی در بازه بسته
۲۳۲	۳-۲۸-۴ بُرد توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$
۲۳۴	۳-۲۸-۵ برد توابع پیوسته روی بازه بسته که هم صعود و هم نزول را دارند.

فصل چهارم: مشتق و مشتق پذیری

۲۴۳	هدف کلی
۲۴۳	هدف های یادگیری
۲۴۴	مقدمه
۲۶۱	۴-۱ انواع مشتق ناپذیری
۲۶۷	۴-۱-۱ یادآوری دستورهای مشتق
۲۶۸	۴-۱-۲ مشتق تابع تابع یا تابع مرکب (قاعده زنجیری)
۲۷۱	۴-۱-۳ مشتق روابط ضمنی
۲۷۲	۴-۱-۴ مشتق توابع پارامتری
۲۷۳	۴-۱-۵ مشتق توابع مثلثاتی
۲۷۳	۴-۱-۶ دستور مشتق توابع مثلثاتی
۲۸۱	۴-۱-۷ مشتق های متوالی
۲۸۵	۴-۱-۸ مشتق توابع معکوس
۲۸۶	۴-۱-۹ مشتق توابع معکوس مثلثاتی
۲۸۷	۴-۲ خط مماس و خط قائم بر یک منحنی
۲۸۸	۴-۳ خط مماس از نقطه خارج منحنی
۲۹۰	۴-۴ زاویه بین یک خط و یک منحنی
۲۹۱	۴-۵ زاویه بین دو منحنی
۲۹۲	۴-۶ حالات خاص
۲۹۹	۴-۷ کاربرد مشتق
۳۰۴	۴-۸ نقطه بحرانی
۳۰۶	۴-۹ روش به دست آوردن ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع پیوسته روی یک بازه بسته
۳۰۹	۴-۱۰ قضیه رول
۳۱۰	۴-۱۱ قضیه مقدار میانگین
۳۱۵	۴-۱۲ قضیه کُشی
۳۱۷	۴-۱۳ توابع صعودی و نزولی
۳۱۸	۴-۱۴ بررسی یکنوایی توابع
۳۱۸	۴-۱۵ بررسی یکنوایی توابع ناپیوسته
۳۲۰	۴-۱۵-۱ آزمون اول مشتق
۳۲۱	۴-۱۵-۲ آزمون دوم مشتق
۳۲۳	۴-۱۶ تقعر

۳۲۴	۱۷-۴ نقطه عطف
۳۲۹	۱۸-۴ رسم نمودار f' از روی f و بالعکس
۳۳۴	۱۹-۴ طرز به دست آوردن عرض های نقاط Max و Min بدون استفاده از مشتق
۳۳۶	۲۰-۴ رسم منحنی
۳۴۱	۲۱-۴ بهینه سازی
۳۴۶	۲۲-۴ قاعده های هوپیتال
۳۴۶	۱-۲۲-۴ قاعده اول هوپیتال
۳۴۶	۲-۲۲-۴ قاعده دوم هوپیتال
۳۵۷	فصل پنجم: توابع خوش رفتار
۳۵۷	هدف کلی
۳۵۷	هدف های یادگیری
۳۵۸	مقدمه
۳۵۸	۱-۵ توابع معکوس مثلثاتی
۳۶۲	۲-۵ تابع نمایی و لگاریتمی
۳۶۵	۳-۵ لگاریتم طبیعی و تابع نمایی
۳۶۶	۱-۳-۵ تعریف
۳۶۸	۴-۵ ویژگی های لگاریتم طبیعی
۳۶۹	۵-۵ تابع نمایی e^x
۳۷۰	۱-۵-۵ تعریف
۳۷۲	۶-۵ تعریف کلی توابع نمایی و لگاریتمی
۳۷۳	۷-۵ مشتق گیری لگاریتمی
۳۸۱	۸-۵ صورت های مبهم 0^0 ، ∞^0 و 1^∞
۳۸۴	۹-۵ توابع هذلولوی
۳۸۷	۱۰-۵ سایر توابع هذلولوی
۳۸۷	۱۱-۵ اتحاد های هیپربولیک
۳۸۸	۱۲-۵ خواص توابع هیپربولیک
۳۸۹	۱۳-۵ چند هم ارزی هذلولوی
۳۹۰	۱۴-۵ برخی تفاوت های اساسی توابع مثلثاتی و هیپربولیک
۳۹۱	۱۵-۵ بسط توابع هیپربولیک
۳۹۳	۱۶-۵ مشتق توابع هذلولوی
۳۹۴	۱۷-۵ مفهوم t در توابع هذلولوی $cht, sht, \dots$
۳۹۶	۱۸-۵ وارون تابع هذلولوی
۳۹۶	۱۹-۵ ضابطه وارون توابع هذلولوی و مشتق آنها

۴۰۵	فصل ششم: انتگرال
۴۰۵	هدف کلی
۴۰۵	هدف‌های یادگیری
۴۰۶	مقدمه
۴۰۶	۱-۶ یادآوری نماد سیگما
۴۱۰	۲-۶ مجموع بالایی و پایینی ریمان
۴۱۳	۳-۶ تعریف انتگرال معین
۴۱۸	۴-۶ خواص انتگرال معین
۴۲۲	۵-۶ تعمیم قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها
۴۳۱	۶-۶ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۴۳۲	۷-۶ روش تعویض متغیر
۴۳۲	۸-۶ جدول مقدماتی انتگرال‌های نامعین
۴۳۵	۹-۶ خواص مقدماتی انتگرال نامعین
۴۳۸	۱۰-۶ انتگرال‌های شامل سه جمله‌ای‌های درجه دو
۴۴۲	۱۱-۶ انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء
۴۴۷	۱۲-۶ انتگرال‌گیری از توابع کسری گویا
۴۴۸	۱۳-۶ پیدا کردن ضرایب
۴۵۲	۱۴-۶ انتگرال‌های مثلثاتی
۴۵۷	۱۵-۶ تبدیل انتگرال‌های جبری به انتگرال‌های مثلثاتی
۴۶۳	۱۶-۶ انتگرال‌های ناسره
۴۶۷	۱۷-۶ کاربرد انتگرال‌های معین
۴۶۸	۱۸-۶ تشخیص یکپارچگی
۴۷۰	۱۹-۶ محاسبه حجم با استفاده از برش
۴۷۲	۲۰-۶ محاسبه حجم‌های دوار
۴۷۵	۲۱-۶ روش پوسته‌های استوانه‌ای
۴۷۷	۲۲-۶ تعریف منحنی مسطح
۴۷۷	۲۳-۶ محاسبه طول منحنی‌های مسطح
۴۸۲	۲۴-۶ محاسبه سطح دوار
۴۹۳	مراجع

پیشگفتار

حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن حاضر از نظر تاریخی نتیجه کوشش و تلاش افراد بسیاری است که بعضی در فقر مطلق می زیسته اند. از میان این عده می توان دکارت، فرما، نیوتن و لایب نیتس را نام برد. باید بدانیم که تکمیل ساختار منطقی روش های حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن نوزدهم اتفاق افتاد و حالا دیگر می توان با جرأت تمام در سردر ورودی های همه دانشکده ها اعلام کرد «هرکس ریاضیات عمومی نمی داند وارد نشود».

کتاب حاضر نتیجه سال ها تجربه و تدریس مؤلف بوده و سرشار از تمرین ها و مثال های جالب است. پس از ارائه مفهوم تابع فصل حد و پیوستگی و پس از آن مشتق و کاربردهایش و در نهایت انتگرال ها را بیان نموده ایم. مطالب به صورتی نوشته شده اند که خواننده به راحتی بتواند آن ها را مطالعه کند.

نگارنده مدعی بدون اشکال بودن متن نیست و از عموم خوانندگان محترم تقاضا دارد کلیه اشکالات تایپی و علمی مشاهده شده را به آدرس دانشگاهی مؤلف ارسال نمایند.

فصل اول

مختصات قطبی و اعداد مختلط

هدف کلی

هدف کلی از این فصل آموزش زیربنای لازم برای استفاده از اعداد مختلط در درس‌های جدی‌تر ریاضی است.

هدف‌های یادگیری

- خواننده پس از یادگیری این فصل باید بتواند:
- چهار عمل اصلی را روی اعداد مختلط اجرا کند.
 - در نمودار آرگان قدر مطلق و شناسه را نمایش داده عدد مختلط را به فرم مثلثاتی تبدیل کند.
 - در فرم مثلثاتی اعمال را روی اعداد مختلط اجرا کند.
 - دستور موآور و ریشه اعداد مختلط را توضیح داده محاسبه کند.
 - مزدوج عدد مختلط، قدر مطلق عدد مختلط را توضیح و خواص آن‌ها را بیان کند.

مقدمه

هر عدد مختلط عددی است به صورت $z = a + ib$ که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ و $i = \sqrt{-1}$ است. a را قسمت حقیقی (Real Part) و b را قسمت مختلط یا موهومی (Imaginary part) می‌نامیم.

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \\ b = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم پس:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

اگر فرض کنیم $b = 0$ آنگاه $a + i(0) = a$ بنابراین $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ است.
در واقع هر عدد حقیقی یک عدد موهومی یا مختلط است که در آن قسمت موهومی صفر است. مثلاً:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \in \mathbb{R} \\ \sqrt{2} = \sqrt{2} + i(0) \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{C} \end{cases}$$

تذکر

توان‌های مختلط i را به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i$$

$$\Rightarrow i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

چون باقیمانده تقسیم هر عدد مثبت بر ۴ یکی از اعداد ۰, ۱, ۲, ۳ است می‌توان حاصل توان‌های صحیح مثبت i را به دست آورد.

مثال

$$i^{2009} = ? \quad , \quad 2009 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow i^{2009} = i$$

۱-۱ برابری اعداد مختلط

اعداد $z_1 = a + ib$ و $z_2 = c + id$ را برابر می‌نامیم هرگاه قسمت‌های حقیقی با هم و قسمت‌های موهومی با هم برابر باشند، یعنی:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad \text{یا} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

۱-۱-۱ مجموع و تفاضل و حاصل ضرب دو عدد مختلط

$$\text{فرض کنیم } \begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases} \text{ تعریف می کنیم:}$$

$$z_1 \pm z_2 = a + ib \pm c + id \Rightarrow z_1 \pm z_2 = a \pm c + i(b \pm d)$$

۱-۱-۲ تقسیم دو عدد مختلط

$$\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{a + id} \times \frac{c - id}{c - id} \quad \begin{array}{l} \text{صورت و مخرج را در مزدوج} \\ \text{مخرج ضرب می کنیم} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + ibc - iad - i^2 bd}{c^2 - (id)^2} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}}_{\text{Re } \frac{z_1}{z_2}} + i \underbrace{\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)}_{\text{Im } \frac{z_1}{z_2}}$$

مثال: فرض کنید $z_1 = -1 + 5i$ و $z_2 = -3i$ در این صورت:

$$۱. ۲z_1 = -2 + 10i$$

$$۲. z_1 - 5z_2 = -1 + 25i$$

$$۳. z_1 z_2 = 15 + 3i$$

$$۴. \frac{z_2}{z_1} = \frac{-3i}{-1 + 5i} \times \frac{-1 - 5i}{-1 - 5i} = \frac{3i - 15}{1 + 25} = \frac{-15}{26} + i\left(\frac{3}{26}\right)$$

۱-۱-۳ مزدوج عدد مختلط

اگر $z = a + ib$ عددی مختلط باشد، مزدوج آن را با $\bar{z}$ مثال می دهیم و تعریف می کنیم $\bar{z} = a - ib$.

خواص: از روی تعریف و به سادگی می توان نشان داد:

$$۱. z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$۲. \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$۳. \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$۴. \overline{kz} = k\overline{z} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$۵. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$۶. \overline{z^n} = \overline{z}^n ; n \in \mathbb{N}$$

خواص اصلی اعمال حسابی جمع و ضرب در $\mathbb{C}$

• برای عمل جمع

۱. جابه‌جایی

۲. وجود عضو خنثی (۰)

۳. شرکت پذیری

۴. وجود عضو متقابل یا قرینه $z = a + ib \Rightarrow -z = -a - ib$

• برای عمل ضرب

۱. جابه‌جایی

۲. وجود عضو خنثی (۱)

۳. شرکت پذیری

۴. وجود عضو متقابل $\left(\frac{1}{z}\right)$

۵. توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع

تذکر

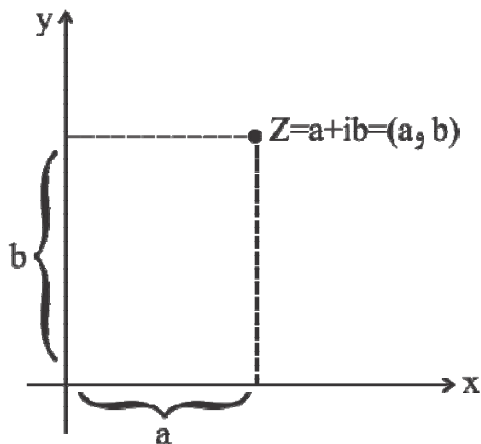
یک فرق مهم دیگر اعداد مختلط و حقیقی آن است که مجموعه اعداد مختلط،

مجموعه‌ای مرتب نیست، یعنی رابطه‌ای ترتیبی روی $\mathbb{C}$ تعریف نشده است.

۱-۲ نمودار آرگان

هر عدد مختلط $z = a + ib$ را می‌توان به صورت یک زوج مرتب $z = (a, b)$

در نظر گرفت و به این ترتیب تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}^2$ به دست می‌آید.



صفحه شامل دو محور عمود برهم که در آن z را با یک زوج مرتب (نقطه) نشان می‌دهیم، صفحه یا نمودار آرگان می‌نامند.

تذکر

اعداد مختلط $(x, 0)$ را با x نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم $i = (0, 1)$ بنابراین:

$$\begin{cases} i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \\ (x, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + iy \end{cases}$$

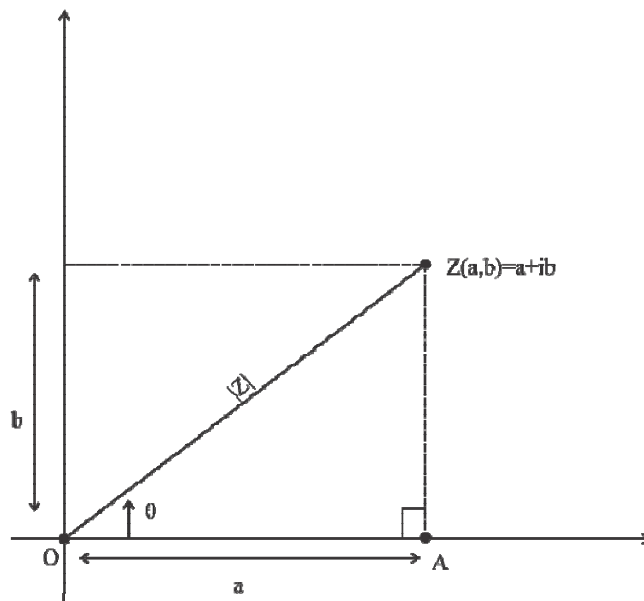
۱-۲-۱ اندازه یا کالبد اعداد مختلط

اگر $z = a + ib$ عددی مختلط باشد، فاصله z تا مبدأ یعنی $|z - 0| = |z|$ اندازه یا کالبد z و به صورت $\sqrt{a^2 + b^2}$ تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases} \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

۱-۲-۲ شناسه یا آرگومان

شناسه یا آرگومان هر عدد مختلط زاویه‌ای است که امتداد وصل شده از عدد مختلط به مبدأ با جهت مثبت محور x می‌سازد.



$$\triangle OZA: \begin{cases} \sin \theta = \frac{b}{|z|} & b = |z| \sin \theta \\ \cos \theta = \frac{a}{|z|} & a = |z| \cos \theta \end{cases}$$

۳-۱ نمایش مثلثاتی عدد مختلط (مختصات قطبی)

$$z = a + ib = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta \Rightarrow$$

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a}$$

θ را آرگومان می‌نامیم و $0 \leq \theta < 2\pi$ را آرگومان اصلی می‌گوییم.

همه اعداد به جز صفر (که آرگومان اصلی ندارد) یک آرگومان اصلی و بی‌نهایت

آرگومان فرعی دارند.

نمادگذاری: $\cos \theta + i \sin \theta$ را با $CiS\theta$ نشان می‌دهیم.

مثال: فرم مثلثاتی $z = -1 - i\sqrt{3}$ را بنویسید.

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

۷ مختصات قطبی و اعداد مختلط

(غ ق و)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

(ق ق چون a و b منفی هستند پس در ربع سوم است.)

۱-۳-۱ حاصل ضرب دو عدد مختلط در فرم مثلثاتی

$$\begin{cases} z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases} \Rightarrow z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2))$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

با استقرا می توان نشان داد:

$$\begin{cases} z_1 = |z_1| \operatorname{cis} \theta_1 \\ \vdots \\ z_n = |z_n| \operatorname{cis} \theta_n \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdots z_n = |z_1 \cdots z_n| \operatorname{cis}(\theta_1 + \cdots + \theta_n)$$

نتیجه: اگر فرض کنیم $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ در این صورت:

$$z^n = (|z| (\cos \theta + i \sin \theta))^n \Rightarrow z^n = |z|^n \operatorname{cis} n\theta \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال: حاصل $A = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{20}$ را به دست آورید.

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{20} = \left(\frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)} \right)^{20} = \frac{\cos 5\pi + i \sin 5\pi}{\cos 35\pi + i \sin 35\pi} = \frac{-1}{-1} = 1$$

روش دوم

$$A = \frac{(1+i)^{20}}{(1-i)^{20}} \times \frac{(1+i)^{20}}{(1+i)^{20}} = \frac{(1+i)^{40}}{2^{20}} = \dots$$

تذکر

اگر $z = |z|Cis\theta$ باشد، داریم $z^n = |z|^n Cisn\theta$; $n \in \mathbb{N}$ این دستور را دستور موآور می‌نامیم.

۱-۳-۲ تقسیم دو عدد مختلط در فرم مثلثاتی

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(Cos\theta_1 + iSin\theta_1)}{|z_2|(Cos\theta_2 + iSin\theta_2)} \times \frac{Cos\theta_2 - iSin\theta_2}{Cos\theta_2 - iSin\theta_2} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \times \frac{Cos\theta_1 Cos\theta_2 - iCos\theta_1 Sin\theta_2 + iSin\theta_1 Cos\theta_2 + Sin\theta_1 Sin\theta_2}{Cos^2\theta_2 + Sin^2\theta_2} \\ \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| (Cos(\theta_1 - \theta_2) + iSin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

تذکر: اگر تعریف کنیم:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \quad x = 0 \Rightarrow f'(0)a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ پس بر طبق استقرا: پس داریم:}$$

بسط مک لورن تابع $f(x)$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

مثال: بسط مک لورن تابع $f(x) = \cos x, f(x) = \sin x$ را بنویسید.

چون $\sin x$ تابع فرد است ضرایب زوج صفر است. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

چون $\cos x$ تابع زوج است ضرایب فرد صفر است. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

قضیه: شرط لازم (و نه کافی) برای آنکه تابع دلخواه $f(x)$ را بتوان به صورت یک چندجمله‌ای، که با $f(x)$ مساوی باشد، نوشت آن است که همه مشتقات مراتب مختلف $f(x)$ در نقطه صفر موجود باشند.

مثالی از یک تابع که شرط لازم در مورد آن برقرار است، اما چندجمله‌ای مساوی $f(x)$ نمی‌شود تابع زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

(ثابت می‌شود شرط کافی آنست که حد باقی‌مانده لاگرانژ صفر شود.)

تذکر

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots + \\ i \sin \theta &= i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

۱-۳-۳ تعریف e یا پایه لگاریتم نپر یا نپرین

بعداً خواهیم دید که مقدار حاصل از $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ را که ثابت می‌شود عددی بین دو و سه است e نامیده شده و داریم:

$$e \approx 2.718$$

تذکر: به کمک تعریف مشتق می‌توان نشان داد:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$