

دانشگاه سامان نور

ریاضی عمومی (۲)

(رشته ریاضی)

دکتر شهریار فرهمندراد

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

سیزده

پیشگفتار

فصل اول: دنباله‌ها

۱

هدف کلی

۱

هدف‌های یادگیری

۱

مقدمه

۲

۱-۱ روش‌های نمایش نموداری دنباله‌ها

۸

۲-۱ دنباله‌های همگرا

۹

۳-۱ اعمال روی دنباله‌ها

۲۰

۴-۱ میزان‌های رشد نسبی

۲۸

۵-۱ دنباله‌های کراندار

۳۵

۶-۱ دنباله‌های یکنوا

۳۷

۷-۱ روش‌های تشخیص یکنوایی

۳۸

۸-۱ زیردنباله‌ها

۴۸

خلاصه مطالب مهم

۵۱

فصل دوم: سری‌ها

۵۵

هدف کلی

۵۵

هدف‌های یادگیری

۵۵

۱-۲ سری‌ها

۵۶

۲-۲ بررسی سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} nqn$

۷۰

۳-۲ یادآوری برخی از خواص سیگما

۷۱

۴-۲ آزمون‌های همگرایی برای سری‌های مثبت

۸۱

۵-۲ آزمون انتگرال

۸۲

۶-۲ آزمون‌های مقایسه

۸۹

۹۵	۷-۲ سری‌های متناوب
۹۵	۸-۲ آزمون سری متناوب
۱۰۲	۹-۲ همگرایی مطلق و همگرایی مشروط
۱۰۳	۱۰-۲ تعریف همگرایی مطلق
۱۰۳	۱۱-۲ تعریف همگرایی مشروط
۱۱۰	۱۲-۲ آزمون نسبت
۱۱۴	۱۳-۲ آزمون ریشه
۱۱۶	۱۴-۲ تجدید آرایش‌های یک سری
۱۱۸	۱۵-۲ استراتژی آزمون سری‌ها
۱۲۱	خلاصه مطالب مهم
۱۲۵	فصل سوم: سری‌های تابعی و توانی
۱۲۵	هدف کلی
۱۲۵	هدف‌های یادگیری
۱۲۶	۱-۳ سری‌های تابعی و توانی
۱۲۶	۲-۳ تعریف سری توانی
۱۳۲	۳-۳ اعمال بر سری‌های توانی
۱۳۴	۴-۳ تقسیم سری‌های توانی
۱۳۸	۵-۳ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌های توانی
۱۴۶	۶-۳ چندجمله‌ای تیلور
۱۴۹	۷-۳ سری مک‌لورن
۱۵۰	۸-۳ سری تیلور f در $x = a$
۱۵۱	۹-۳ سری‌های دوجمله‌ای
۱۷۳	۱۰-۳ صورت‌های مبهم
۱۷۶	خلاصه مطالب مهم
۱۷۷	فصل چهارم: خم‌های پارامتری واقع در صفحه
۱۷۷	هدف کلی
۱۷۷	هدف‌های یادگیری
۱۷۸	۱-۴ خم‌های پارامتری واقع در صفحه
۱۷۸	۲-۴ تعریف خم‌های پارامتری
۱۸۱	۳-۴ رسم خم‌های پارامتری $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$
۱۸۱	۴-۴ بررسی تقارن‌های خم‌های پارامتری
۱۸۶	۵-۴ معادله خط مماس بر خم‌های پارامتری
۱۸۷	۶-۴ تحدب و تقعر و نقطه عطف
۱۸۹	۷-۴ نقاط مکرر خم‌های پارامتری
۱۹۷	خلاصه مطالب مهم

۱۹۹	فصل پنجم: مختصات قطبی، مختصات استوانه‌ای و کروی
۱۹۹	هدف کلی
۱۹۹	هدف‌های یادگیری
۲۰۰	۱-۵ مختصات قطبی
۲۰۲	۲-۵ رابطه بین مختصات دکارتی و قطبی
۲۰۵	۳-۵ فاصله دو نقطه در مختصات قطبی
۲۰۶	۴-۵ زاویه بین شعاع قطبی OP و مماس PT بر یکی منحنی
۲۰۹	۵-۵ بررسی نقاط تقاطع دو منحنی قطبی
۲۱۰	۶-۵ زاویه بین دو منحنی
۲۱۵	۷-۵ نمایش یک منحنی در مختصات قطبی
۲۱۵	۸-۵ نقاط مکرر در منحنی‌های قطبی $\rho = f(\theta)$
۲۱۷	۹-۵ تقارن‌ها و فاصله تغییرات مفید برای رسم منحنی‌های قطبی
۲۱۸	۱۰-۵ رسم منحنی‌های قطبی
۲۲۴	۱۱-۵ مختصات استوانه‌ای
۲۲۸	۱۲-۵ مختصات کروی
۲۳۱	خلاصه مطالب مهم
۲۳۳	فصل ششم: رویه‌ها
۲۳۳	هدف کلی
۲۳۳	هدف‌های یادگیری
۲۴۰	۱-۶ روش پیدا کردن معادله رویه استوانه‌ای
۲۴۲	۲-۶ بررسی نمودار سطوح درجه دوم
۲۴۳	۳-۶ استوانه سهمی‌وار
۲۴۳	۴-۶ استوانه بیضوی
۲۴۴	۵-۶ استوانه هذلولوی
۲۴۴	۶-۶ بیضی‌وار
۲۴۵	۷-۶ هذلولی‌وار بیضوی یک‌پارچه
۲۴۶	۸-۶ هذلولی‌وار بیضوی دو‌پارچه
۲۴۷	۹-۶ سهمی‌وار بیضوی
۲۴۸	۱۰-۶ سهمی‌وار هذلولوی
۲۴۹	۱۱-۶ مخروط بیضوی
۲۶۰	خلاصه مطالب مهم
۲۶۳	فصل هفتم: توابع برداری
۲۶۳	هدف کلی
۲۶۳	هدف‌های یادگیری
۲۶۴	۱-۷ توابع برداری
۲۶۶	۲-۷ پیوستگی

۲۶۸	۳-۷ مشتق توابع برداری
۲۷۲	۴-۷ یادآوری
۲۷۲	۵-۷ مشتق حاصل ضرب سه گانه اسکالر
۲۷۳	۶-۷ مشتق بردارهای به طول ثابت
۲۷۵	۷-۷ انتگرال تابع برداری
۲۷۹	۸-۷ خم ها و پارامتری سازی
۲۸۲	۹-۷ خم بسته
۲۸۲	۱۰-۷ خم غیر خود متقاطع
۲۸۳	۱۱-۷ پارامتری سازی خم فصل مشترک دو رویه
۲۸۴	۱۲-۷ خم های قطعه به قطعه هموار
۲۸۴	۱۳-۷ پارامتری سازی برحسب طول کمان
۲۸۶	۱۴-۷ انحنا
۲۸۹	۱۵-۷ نرمال بکه
۲۹۴	۱۶-۷ شتاب حرکت
۲۹۷	۱۷-۷ دایره انحنا و شعاع انحنا
۳۰۰	۱۸-۷ بردار قائم دوم
۳۰۴	۱۹-۷ مؤلفه های مماسی و قائم شتاب
۳۰۷	۲۰-۷ تاب
۳۰۸	۲۱-۷ تاب خم های پارامتری
۳۱۴	۲۲-۷ صفحه بوسان، صفحه نرمال و صفحه اصلاحی
۳۲۲	خلاصه مطالب مهم
۳۲۵	فصل هشتم: توابع چندمتغیره، مشتق گیری جزئی
۳۲۵	هدف های کلی
۳۲۵	هدف های یادگیری
۳۲۸	۱-۸ توابع چند متغیره
۳۲۸	۲-۸ دامنه تابع دو متغیره
۳۳۱	۳-۸ توابع سه متغیره
۳۳۳	۴-۸ نمودار توابع دو متغیره
۳۳۷	۵-۸ حد و پیوستگی
۳۴۲	۶-۸ تعریف های هم ارز در توابع دو متغیره
۳۵۱	۷-۸ بررسی حد توابع کسری که صورت و مخرج چندجمله ای اند و $(x, y) \rightarrow (0, 0)$
۳۵۲	۸-۸ دستور هوپیتال
۳۵۳	۹-۸ تعویض متغیر کلی
۳۵۵	۱۰-۸ تغییر متغیر قطبی
۳۵۹	۱۱-۸ پیوستگی
۳۶۶	۱۲-۸ مشتقات جزئی

۳۶۷	۸-۱۳ نمادگذاری
۳۷۰	۸-۱۴ تعبیر هندسی مشتقات جزئی
۳۷۴	۸-۱۵ تعریف صفحه مماس بر سطح S
۳۷۵	۸-۱۶ معادله صفحه مماس و خط قائم بر سطح S
۳۷۹	۸-۱۷ مشتق جزئی توابع با بیش از دو متغیر
۳۸۰	۸-۱۸ مشتقات جزئی مراتب بالاتر
۳۸۱	۸-۱۹ قضیه کلرو
۳۸۶	۸-۲۰ توابع مشتق پذیر و دیفرانسیل ها
۳۹۵	۸-۲۱ قاعده زنجیری (مشتق تابع مرکب)
۴۰۴	۸-۲۲ مشتق گیری ضمنی
۴۰۵	۸-۲۳ قضیه تابع ضمنی
۴۰۸	۸-۲۴ مشتق جهتی یا سویی و گرادیان
۴۱۰	۸-۲۵ تعریف مشتق جهتی یا سویی
۴۲۱	۸-۲۶ اکسترم های توابع دو متغیره
۴۲۳	۸-۲۷ تعریف نقطه بحرانی
۴۲۴	۸-۲۸ آزمون مشتق دوم
۴۳۱	۸-۲۹ مقادیر اکسترم توابع دو متغیره بر دامنه کراندار
۴۳۴	۸-۳۰ برهان آزمون مشتق دوم
۴۳۷	۸-۳۱ ضرایب لاگرانژ
۴۳۸	۸-۳۲ روش ضرب های لاگرانژ
۴۴۷	۸-۳۳ روش ضرب های لاگرانژ در حالت دو قیدی
۴۵۴	خلاصه مطالب مهم
۴۵۹	فصل نهم: انتگرال های چندگانه
۴۵۹	هدف کلی
۴۵۹	هدف های یادگیری
۴۶۰	۹-۱ انتگرال های دوگانه روی مستطیل ها
۴۶۲	۹-۲ تعریف انتگرال دوگانه روی مستطیل
۴۶۵	۹-۳ تعبیر هندسی انتگرال های دوگانه
۴۶۹	۹-۴ انتگرال های مکرر
۴۷۱	۹-۵ قضیه فوبینی
۴۷۶	۹-۶ انتگرال دوگانه روی نواحی کلی تر
۴۸۱	۹-۷ تعیین حدود انتگرال گیری
۴۹۲	۹-۸ مساحت
۴۹۴	۹-۹ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی
۵۰۱	۹-۱۰ محاسبه مساحت در انتگرال های دوگانه قطبی
۵۰۳	۹-۱۱ تعویض متغیر در انتگرال دوگانه

۵۱۵	۹-۱۲ مساحت ناحیه‌ای قطبی
۵۲۰	۹-۱۳ مساحت رویه‌ها
۵۲۵	۹-۱۴ جرم یک ورق نازک
۵۲۶	۹-۱۵ مرکز جرم یک ورق نازک
۵۲۸	۹-۱۶ گشتاور ماند
۵۳۱	۹-۱۷ انتگرال سه‌گانه
۵۳۴	۹-۱۸ انواع نواحی در انتگرال‌های سه‌گانه
۵۴۷	۹-۱۹ تعویض متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه
۵۵۹	۹-۲۰ سایر کاربردهای انتگرال سه‌گانه
۵۶۶	خلاصه مطالب مهم
۵۷۱	فصل دهم: میدان‌های برداری
۵۷۱	هدف کلی
۵۷۱	هدف‌های یادگیری
۵۷۳	۱۰-۱ میدان‌های برداری
۵۷۶	۱۰-۲ خط‌های میدان (خم‌های انتگرال)
۵۷۹	۱۰-۳ میدان‌های برداری در مختصات قطبی
۵۸۱	۱۰-۴ انتگرال روی اشیای خمیده
۵۸۷	۱۰-۵ خواص انتگرال خط
۵۸۹	۱۰-۶ انتگرال‌های خط نسبت به x یا y
۵۹۳	۱۰-۷ انتگرال خط در فضا (روی اشیای خمیده)
۵۹۶	۱۰-۸ انتگرال‌های خط میدان‌های برداری
۶۰۲	۱۰-۹ قضیه اساسی انتگرال‌های خط
۶۰۴	۱۰-۱۰ استقلال از مسیر
۶۰۴	۱۰-۱۱ تعریف مستقل بودن از مسیر
۶۲۴	۱۰-۱۲ قضیه گرین
۶۲۴	۱۰-۱۳ نمادگذاری
۶۳۴	۱۰-۱۴ کرل و دیورجانس (چرخه و واگرایی)
۶۳۴	۱۰-۱۵ کرل (چرخه)
۶۳۶	۱۰-۱۶ تعریف دیورجانس یا واگرایی
۶۳۸	۱۰-۱۷ لاپلاسین
۶۳۸	۱۰-۱۸ شکل‌های برداری قضیه گرین
۶۴۵	۱۰-۱۹ سطوح پارامتری و مساحت آن‌ها
۶۴۸	۱۰-۲۰ مساحت سطوح
۶۵۶	۱۰-۲۱ انتگرال‌های سطح
۶۶۰	۱۰-۲۲ انتگرال سطح در سطوح پارامتری
۶۶۳	۱۰-۲۳ سطوح جهت‌دار

۶۶۶	۱۰-۲۴ انتگرال سطح میدان برداری
۶۶۸	۱۰-۲۵ یادآوری
۶۶۹	۱۰-۲۶ روش محاسبه شار
۶۷۴	۱۰-۲۷ قضیه استوکس
۶۸۶	۱۰-۲۸ قضیه دیورجانس (واگرایی)
۶۸۷	۱۰-۲۹ قضیه دیورجانس یا واگرایی
۶۹۶	خلاصه مطالب مهم
۷۰۱	مراجع

پیشگفتار

خدا را شکر می‌گوییم که توفیق تدوین کتاب ریاضی عمومی ۲ دوره کارشناسی را در ادامه کتاب ریاضی عمومی ۱ نصیب ساخت.

برای حفظ تسلسل مطالب و جلوگیری از تشتت آن‌ها، منابع و مراجع مورد استفاده همان کتاب ریاضی عمومی ۱ دانشگاه پیام نور است که در انتهای کتاب مذکور آمده‌اند. سه فصل اول به دنباله‌ها و سری‌های تابعی اختصاص یافته است. سپس به خم‌های پارامتری در صفحه و انواع مختصات و رویه‌ها پرداخته شده است. در فصول بعدی مطالب مربوط به توابع برداری، توابع چندمتغیره و مشتق‌گیری جزئی، انتگرال‌های چندگانه و میدان‌های برداری و حساب برداری آورده شده‌اند.

کتاب سرشتی ویژه داشته و به‌نحوی تألیف گردیده که بتواند در رشته‌های ریاضی و کاربردها، فیزیک و رشته‌های فنی به‌طور مشترک (در یک کلاس) ارائه شود. این امر قطعاً موجب آشنایی بیشتر دانشجویان با جریانات علمی نزدیک و صرفه‌جویی در زمان و امکانات دانشگاه خواهد شد.

برخلاف عادت و سلیقه‌ای که بعضی در تألیف و تدریس تعدادی از سرفصل‌های ارائه شده این نوشتار در ریاضی عمومی ۱ دارند نگارنده با تجربه حدود شصت بار تدریس درس ریاضی عمومی ۱ و ۲ در دانشگاه‌های مختلف اعتقاد راسخ دارد به دلیل حجم بالای مطالب دروس ریاضی دبیرستان که در ریاضی عمومی ۱ تکرار می‌شوند شوق و علاقه لازم برای مطالعه و یادگیری درس ذکر شده در خواننده دوره کارشناسی در همان بدو ورود به دانشگاه از بین می‌رود.

مثلاً فصلی مانند دنباله‌ها و سری‌ها که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال رابرت آدامز در فصل نهم (آخر) جلد اول گنجانده گردیده در این کتاب در فصل اول ارائه شده و انتخاب جای آن تا حدی دلخواه است و یا چون به هر حال موضوع مختصات و منحنی‌های قطبی به منحنی‌های پارامتری مربوط می‌شود در مباحث تألیفی کتاب حاضر آمده است. براساس تجربه طولانی مؤلف و به‌طور کلی سعی شده است سرفصل‌های تکراری دبیرستان تا حد امکان با ظرافت، دیدی نو و حل مثال‌های متنوع و جدید طوری در کتاب‌های تألیف شده ریاضی عمومی ۲ (و ریاضی عمومی ۱) پراکنده و تقسیم شوند که حوصله خواننده علاقه‌مند از مطالعه آن‌ها سر نرفته و مطمئناً در کنار آن لطمه‌ای به تسلسل، و ساختار زنجیر مطالب وارد نشود.

حدود دویست صفحه از مطالب تألیف شده ابتدای کتاب که مربوط به هندسه تحلیلی و مقدمات جبر خطی و سرشار از مثال‌ها، مطالب و تمرین‌های جالب بود برخلاف اصرار مؤلف به عدم حذف آن، کنار گذاشته شد. بنابراین فصل جداگانه‌ای برای بردارها و هندسه تحلیلی وجود ندارد. البته در ریاضی ۲ ارائه زمینه لازم درباره بردارها و هندسه در فضای سه‌بعدی و جبر خطی اساسی نیست، خواننده می‌تواند در درس‌های پیشرفته‌تر همراه با یادآوری مطالب مقدماتی دبیرستان دیدگاه‌های لازم را به‌دست آورد. حذف عنوان درسی ریاضی عمومی ۳ از دوره کارشناسی ریاضی از سوی شورای عالی برنامه‌ریزی و سرریز مطالب آن به ریاضی ۲ خواه‌ناخواه حجم کتاب ریاضی ۲ را دستخوش تغییرات فراوان می‌کند. درواقع به نظر مؤلف تدریس و رفع اشکال درس حساب دیفرانسیل و انتگرال بعد از حذف ریاضی عمومی ۳ چه در ریاضی عمومی ۱ چه در ریاضی عمومی ۲ به‌دلیل حجم خیلی بالا نیاز قطعی به وسایل چندرسانه‌ای آموزشی، نوار صوتی و فیلم آموزش درس، پاورپوینت و ساعات بیشتر تدریس و رفع اشکال گروهی دارد. درواقع یک درس کامل دیفرانسیل و انتگرال متغیرهای حقیقی در دانشگاه‌های بزرگ و معتبر دنیا در یک برنامه سه یا چهار نیم‌سالی گنجانده می‌شود.

کلاس حل تمرین برای آموزش هرچه بهتر مطالب کتاب بسیار ضروری است و بهتر است از دانشجویان نخبه و علاقه‌مند در این خصوص استفاده شود.

کوشش شده است مطالب کتاب‌های ریاضی عمومی قبلی دانشگاه پیام‌نور با توجه به منابع تدریس فعلی در دانشگاه‌های شاخص و مطرح دنیا به روز شده، انتخاب گسترده مباحث و کاربردها تجربه آموزشی غنی و متنوعی را برای دانشجویان فراهم آورد. به علاوه خواننده علاقه‌مند پس از مطالعه آن بتواند در آزمون‌های جدی‌تری مانند آزمون‌های ورودی دوره کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی و فنی موفق و سربلند باشد. از خوانندگان محترم انتظار دارد لغزش‌های این نوشته را به آدرس دانشگاهی مؤلف یعنی sh_fmmand@pnu.ac.ir ارسال نمایند تا در چاپ‌های بعدی تصحیح گردند.

دکتر شهریار فرهمند راد

شهریورماه ۱۳۹۷

فصل اول

دنباله‌ها

هدف کلی

در این فصل هدف کلی، یادگیری دقیق مفهوم دنباله‌های همگرا و واگرا توسط خواننده و تمیز دادن اختلاف بین آن‌هاست.

هدف‌های یادگیری

خواننده پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. دنباله را تعریف و مثال‌های مختلفی از آن ارائه کند.
۲. با داشتن چند جمله از یک دنباله، جمله‌هایی عمومی برای آن دنباله بیابد.
۳. اگر جمله عمومی یک دنباله معلوم باشد هر جمله دلخواه از آن را به دست آورد.
۴. دنباله‌های مهم و خاص را ارائه دهد.
۵. روش‌های نمایش یک‌محوری، دو‌محوری و تابع هادی را توضیح دهد.
۶. دنباله همگرا را تعریف و مثال‌های ابتدایی و متنوعی از آن را بازگو کند.
۷. تعریف ریاضی دنباله همگرا را ارائه دهد.
۸. ثابت کند $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
۹. مثال‌هایی از دنباله‌های غیر عددی ارائه دهد.
۱۰. دنباله واگرا را تعریف و مثال‌های ابتدایی و متنوعی از آن را شرح دهد.
۱۱. به کمک تعریف ریاضی، واگرایی دنباله‌ها را برحسب مورد ثابت کند.

۱۲. اعمال روی دنباله‌های همگرا، واگرا و همگرا - واگرا را اثبات و مثال در هر مورد ذکر کند.

۱۳. قضیه فشردگی را همراه با مثال بیان کند.

۱۴. فرمول استرلینگ را بیان و در مثال‌های مختلف مورد استفاده قرار دهد.

۱۵. ارتباط رشد نسبی را در تعدادی از توابع ابتدایی و مهم بازگو نماید.

۱۶. دنباله‌های کراندار، بیکران و ارتباط بین آن‌ها و دنباله‌های همگرا و واگرا را همراه با مثال ارائه دهد.

۱۷. دنباله یکنوا را تعریف و در حالت‌های مختلف جمله عمومی یکنوایی را تشخیص دهد.

۱۸. قضیه بولتزانو - وایراشتراس را بیان و تشریح نماید.

۱۹. مفهوم زیردنباله را همراه مثال بیان و ارتباط آن را با همگرایی دنباله اصلی ارائه دهد.

مقدمه

دنباله‌ها در ارتباط با پارادوکس‌های زنون و نمایش‌های اعشاری اعداد معرفی شده‌اند. اگر a و b نمایش‌های اعشاری مختوم باشند جمع آن‌ها با الگوریتم دبستانی جمع اعشاری از سمت راست انجام می‌شود اما اگر a و b گویا نباشند نمایش اعشاری مختوم نداشته و برای پیدا کردن $a + b$ نقطه شروعی از سمت راست وجود ندارد. اگر در نمایش اعشاری a و b فقط تا n امین رقم پس از ممیز را در نظر بگیریم و آن‌ها را به روش معمول جمع کنیم فاصله حاصل جمع آن‌ها با مقدار واقعی $a + b$ با مقدار خطایی به دست خواهد آمد. با افزایش n ($n \rightarrow \infty$) حداکثر خطای محاسبه مجموع کوچک می‌شود و این همان بحث همگرایی دنباله‌هاست.

در این بخش پس از معرفی دنباله‌ها، آن‌ها را به دو دسته کلی همگرا و واگرا تقسیم می‌کنیم و اینکه یک دنباله همگرا است یا نه اهمیت ویژه‌ای دارد. پیدا کردن جمله عمومی یک دنباله با داشتن چند جمله از آن (و ارتباطی بین جمله عمومی و چند جمله قبلی یا بعد از آن) یعنی دنباله‌های بازگشتی خود از جمله مطالب مهمی است که در درس مبانی ترکیبیات به آن پرداخته خواهد شد.

هر دنباله یک تابع است که دامنه آن مجموع اعداد طبیعی و برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۳ دنباله‌ها

در حالت کلی گفته می‌شود به هر عدد طبیعی n ، a_n (یا $a(n)$) نسبت داده شده است که a_n عبارتی بر حسب n است و جمله عمومی نامیده می‌شود.

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longrightarrow a(n) \text{ یا } a_n$$

یک فرم نمایش دنباله، نوشتن جمله عمومی آن داخل علامت آکولاد یا پرانتز است، $\{a_n\}$ یا (a_n) . نمایش دیگر نوشتن جملات دنباله به صورت یک رشته با ترتیب معین پشت سرهم می‌باشد

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

اگر دامنه، زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{N}$ باشد، دنباله‌ای متناهی خواهیم داشت. ما با دنباله‌های نامتناهی سروکار خواهیم داشت و بنابراین هر جمله a_n یک تالی a_{n+1} خواهد داشت.

دنباله را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots\}$$

مثال

هریک از رشته‌های زیر، دنباله می‌باشد.

$$۱. \quad ۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$۲. \quad \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$۳. \quad \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \dots, \frac{۱}{۲}, \dots$$

$$۴. \quad ۱, ۰/۱, ۰/۰/۱, ۰/۰/۰/۱, \dots, (۰/۱)^{n-1}, \dots$$

$$۵. \quad ۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۴}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

$$۶. \quad \frac{n}{\sqrt{n}} \mid \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & \sqrt{۲} & \sqrt{۳} & ۲ \end{array} \mid \dots$$

$$۷. \quad \left\{ (1, 1), (2, \frac{1}{۲}), (3, \frac{1}{۳}), \dots, (n, \frac{1}{n}), \dots \right\}$$

۸. $۲, \sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}, ۴, ۸\sqrt{۲}$

۹. $\left\{ \frac{n-1}{2n+1} \right\}_{n \geq 1}$ یا $\left\{ \frac{n-1}{2n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\left\{ \frac{n-1}{2n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

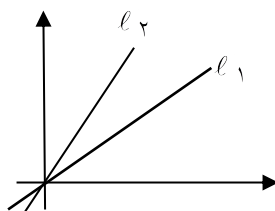
۱۰. $\left(\left[\frac{1}{n} \right] \right)_{n \geq 1}$ (کروشه یعنی جزء صحیح)

۱۱. $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \dots$

i عددی است مختلط ($i = \sqrt{-1}$) در این دنباله $a_n = i^n$

۱۲.

فرض کنیم $\{L_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای است که در آن L_n خط راست مار بر مبدأ با شیب n است یعنی L_n خط راست به معادله $y = nx$ می‌باشد.



شکل ۱-۱

تذکر

گاهی در دنباله‌ها جمله عمومی ساده‌ای نداریم مثلاً اگر a_n را رقم موجود در n امین مکان اعشاری عدد e بگیریم $\{a_n\}$ دنباله‌ای معین است که اولین جملات آن به صورت زیر می‌باشند

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, \dots\}$$

بین جملات یک دنباله و مجموعه جملات آن تفاوتی اساسی وجود دارد. جملات یک دنباله، فهرستی از اعضای آن دنباله است درحالی که برد دنباله یا مجموعه جملات به برد تابع $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ اشاره داشته عناصر تکراری را حذف و تنها یکی را در نظر می‌گیرد. مثلاً در دنباله $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$ جملات به صورت

$$-1, +1, -1, +1, \dots, (-1)^n, \dots$$

هستند درحالی که مجموعه جملات آن، مجموعه $\{-1, 1\}$ می‌باشد.

تذکر

با داشتن جمله عمومی دنباله می‌توان به متغیر موجود در آن (مثلاً n) مقادیر $۱, ۲, ۳, \dots$ را با توجه به دامنه‌اش نسبت داده فهرست جملات دنباله را تشکیل داد.

مثال

جمله صدم دنباله $\left\{ \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right] \right\}_{n \geq 1}$ را بنویسید.

حل

$$a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right]$$

$$n=100 \Rightarrow a_{100} = \left[\sqrt{200} + \frac{1}{2} \right] = [14.1 + 0.5] = 14$$

تذکر

با معلوم بودن چند جمله از یک دنباله، گاهی می‌توان جمله n ام آن را حدس زد.

مثال

جمله عمومی دنباله $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots$ را بیابید، سپس جمله هفتم را بنویسید.

حل

اگر صورت و مخرج برحسب n از درجه یک باشند باید داشته باشیم:

$$an + b \begin{matrix} \xrightarrow{n=1} a+b=0 \\ \xrightarrow{n=2} 2a+b=1 \end{matrix} \Rightarrow a=1, b=-1$$

$$cn + d \xrightarrow{n=4} 4c + d = 5 \Rightarrow c = d = 1$$

پس ظاهراً $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ که با نسبت دادن $n=3, 5, \dots$ درستی آن باید بررسی شود.

توجه کنید که ممکن است دنباله‌های دیگری نیز با این جملات ابتدایی وجود داشته باشند، که کسری نبوده صورت و مخرجشان حتی در حالت کسری بودن درجه یک نباشند.

تذکر

دو دنباله مساویند هرگاه جملات آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند مثلاً دنباله‌های

$$\{ \cos n\pi \}_{n \geq 1} \text{ و } \{ (-1)^n \}_{n \geq 1} \text{ با هم مساویند.}$$

تذکر

با استفاده از جمله عمومی می‌توان تعداد جملات با وضعیت خاص را به دست آورد.

مثال

در دنباله $\{2n - 4\}_{n \geq 1}$ چند جمله کوچکتر از پنجاه وجود دارد؟

حل

باید تعداد $n \geq 1$ ای را بیابیم که

$$a_n \leq \omega_0$$

$$2n - 4 \leq 50 \Rightarrow 2n \leq 54 \Rightarrow 1 \leq n \leq 27$$

در ازای $n = 27$ داریم $n_{27} = 54 - 4 = 50$ پس ۲۶ جمله کوچک‌تر از پنجاه

وجود دارد که در ازای

$$n = 1, 2, \dots, 26$$

بہ دست می آیند۔

مثال

در یک دنباله $a_n = \frac{1}{n^4 + 2n}$ است a_{128} را بنویسید.

حل

$$\Upsilon^n = 12\lambda \Rightarrow n = \vee \Rightarrow a_{2\lambda} = a_{\Upsilon\vee} = \frac{1}{\vee^{\Upsilon} + 1\Upsilon} = \frac{1}{2\Upsilon 15}$$

مثال

مجموع چند جمله از دنباله یا جمله عمومی $a_n = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{n} \right]$ برابر ۵۵ است؟ (کروشه

یعنی جزء صحیح)

حل

با نسبت دادن مقادیر $1, 2, 3, \dots$ داریم:

n	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ... n
a_n	$\underbrace{1}_{1 \times 1}$ $\underbrace{2 \ 2}_{2 \times 2}$ $\underbrace{3 \ 3 \ 3}_{3 \times 3}$ $\underbrace{4 \ 4 \ 4 \ 4}_{4 \times 4}$ $\dots$ $\underbrace{n \ n \ \dots \ n}_{n \times n}$

در نتیجه باید تعداد n هایی را بیابیم که $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = 55$ یا $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 55$ و یا $n(n+1)(2n+1) = 330$ و چون $5 \times 6 \times 11 = 330$ پس $n = 5$ است.

چند دنباله مهم

۱. دنباله ثابت یا ایستا یا ایستی

دنباله‌ای است که همه جملاتش با هم برابرند

$$C, C, C, \dots, C, \dots$$

مثلاً دنباله‌های $\{\sin n\pi\}$ و $\{\sin(2n+1)\pi\}$ و $\{ \operatorname{tg} n\pi \}$ دنباله ثابت (صفر) هستند.

۲. دنباله همانی $a_n = \{n\}$ جملات دنباله به صورت $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ می‌باشند.

۳. دنباله تصاعد عددی یا حسابی با $a_n = An + B$ که در آن $A = d$ و $a_1 - d = B$ است.

مثلاً دنباله $7, 10, 13, 16, 19, \dots$ تصاعد عددی است و در آن $d = 3$ و $a_1 = 7$.

۴. دنباله تصاعد هندسی با $a_n = AB^{n-1}$ که در آن $B = q$ و $A = a_1$ می‌باشد.

مثلاً دنباله $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \dots$ تصاعد هندسی است با $q = \frac{1}{2}$ و $a_1 = \frac{1}{3}$.

۵. دنباله بازگشتی یا برگشتی یا تراجعی. در این نوع دنباله‌ها رابطه‌ای بین جمله عمومی و چند جمله بعد یا قبل از آن داده می‌شود به علاوه یک یا چند جمله اول دنباله نیز معلوم می‌باشد.

$$\text{مثلاً } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2}a_n \end{cases} \text{ و } \begin{cases} b_1 = \frac{1}{2} \\ 3b_{n+1} = b_n - 2 \end{cases} \text{ دنباله‌هایی بازگشتی هستند.}$$

مشهورترین دنباله‌های بازگشتی، دنباله فیبوناچی و دنباله لوکا می‌باشد.

در دنباله فیبوناچی

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_n + a_{n+1} = a_{n+2}; n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

در دنباله لوکا $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_n + a_{n+1} = a_{n+2} \end{cases}$ است.