



دانشگاه سیام نور
پی

ریاضی فیزیک ۱

(رشته فیزیک)

دکتر رحیم کوهی فائق مهندس علیرضا یینش

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

نه	پیشگفتار
۱	فصل اول. بردارها
۱	۱-۱ تعاریف
۹	تمرین‌ها
۹	۲-۱ ضرب نرده‌ای یا داخلی
۱۷	تمرین‌ها
۱۸	۳-۱ ضرب برداری
۲۵	تمرین‌ها
۲۷	۴-۱ ضرب سه‌گانه بردارها
۲۷	۱-۴-۱ ضرب سه‌گانه نرده‌ای
۲۹	۲-۴-۱ ضرب سه‌گانه برداری
۳۱	تمرین‌ها
۳۳	۵-۱ میدان‌های نرده‌ای و برداری
۳۶	۶-۱ شیب (گرادیان) یک میدان نرده‌ای
۴۲	تمرین‌ها
۴۳	۷-۱ انتگرال برداری
۵۰	تمرین‌ها
۵۱	۸-۱ واگرایی (دیورژانس) یک تابع برداری
۵۴	تمرین‌ها
۵۵	۹-۱ قضیه واگرایی (گاوس)
۵۸	تمرین‌ها
۵۹	۱۰-۱ تاو (کرل) یک میدان برداری
۶۵	تمرین‌ها
۶۷	۱۱-۱ قضیه استوکس
۷۱	تمرین‌ها
۷۲	۱۲-۱ سایر عبارات‌های شامل ∇
۷۸	تمرین‌ها

۸۰	۱۳-۱ خلاصه مطالب
۸۱	مراجع
۸۳	فصل دوم. دستگاه‌های مختصات
۸۳	۱-۲ مقدمه
۸۴	۲-۲ مختصات خمیده خط
۱۰۲	تمرین‌ها
۱۰۳	۳-۲ عملگرهای مشتق برداری در دستگاه‌های خمیده
۱۱۰	تمرین‌ها
۱۱۱	۴-۲ دستگاه‌های مختصات خاص
۱۱۱	۱-۴-۲ دستگاه مختصات کروی
۱۲۳	۲-۴-۲ دستگاه مختصات استوانه‌ای دوار (ρ, f, z)
۱۳۱	تمرین‌ها
۱۳۴	۵-۲ جداسازی متغیرها
۱۳۵	۱-۵-۲ جداسازی متغیرها در دستگاه مختصات دکارتی
۱۴۴	۲-۵-۲ جداسازی متغیرها در دستگاه مختصات استوانه‌ای دوار
۱۵۲	۳-۵-۲ جداسازی متغیرها در دستگاه مختصات قطبی کروی
۱۶۷	تمرین‌ها
۱۷۱	۶-۲ خلاصه مطالب
۱۷۲	مراجع
۱۷۵	فصل سوم. تانسورها
۱۷۶	۱-۳ مقدمه و تعریف‌ها
۱۷۷	۱-۲-۳ نمادنویسی و قراردادها
۱۸۱	۲-۲-۳ بردارهای پادوردا و هموردا
۱۸۵	۳-۲-۳ تانسورهای رتبه دوم
۱۹۴	۴-۲-۳ تعریف کلی
۱۹۴	تمرین‌ها
۱۹۶	۳-۳ جبر تانسوری
۱۹۶	۱-۳-۳ برابری تانسور و تانسور صفر
۱۹۷	۲-۳-۳ جمع و تفریق تانسورها
۱۹۸	۳-۳-۳ ضرب برداری تانسورها
۲۰۰	۴-۳-۳ ضرب نرده‌ای تانسورها
۲۰۱	۵-۳-۳ تانسورهای مقارن و پادمتقارن
۲۰۳	تمرین‌ها
۲۰۴	۴-۳ تانسورهای دکارتی و کاربردها
۲۰۶	۱-۴-۳ تانسورهای دکارتی
۲۰۷	۲-۴-۳ کاربردها
۲۰۸	الف) تنش، کرنش، و قانون هوک
۲۱۲	ب) پیزو الکتریک و پذیرفتاری دی‌الکتریک
۲۱۳	ج) تانسور گشتاور لختی
۲۱۵	تمرین‌ها

۲۱۶	۳-۵ دیادیک‌ها
۲۱۸	تمرین‌ها
۲۱۹	۳-۶ تانسورها در نسبیت خاص
۲۲۸	تمرین‌ها
۲۲۸	۳-۷ هموردایی در الکترودینامیک
۲۳۸	تمرین‌ها
۲۳۹	۳-۸ خلاصهٔ مطالب
۲۴۱	مراجع
۲۴۳	فصل چهارم. دترمینان‌ها و ماتریس‌ها
۲۴۳	۴-۱ مقدمه
۲۴۴	۴-۲ دترمینان‌ها
۲۴۷	۴-۲-۱ بسط لاپلاس دترمینان
۲۴۹	۴-۲-۲ ویژگی‌های عمومی دترمینان‌ها
۲۵۱	۴-۲-۳ مشتق دترمینان
۲۵۳	۴-۲-۴ کاربرد دترمینان: حل دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت
۲۵۶	(الف) روش حذف گاؤس
۲۵۹	(ب) روش حذف گاؤس - جردن
۲۶۱	تمرین‌ها
۲۶۵	۴-۳ ماتریس‌ها
۲۷۴	تمرین‌ها
۲۷۵	۴-۴ ماتریس‌های خاص
۲۹۳	تمرین‌ها
۲۹۶	۴-۵ ماتریس‌های متعامد
۳۰۵	۴-۵-۱ زاویه‌های اولر
۳۰۸	۴-۵-۲ تبدیل تشابه
۳۱۲	تمرین‌ها
۳۱۳	۴-۶ ماتریس‌های هرمیتی، یکانی و بهنجار
۳۲۴	تمرین‌ها
۳۲۶	۴-۷ قطری‌سازی ماتریس‌ها
۳۲۷	۴-۷-۱ ویژه‌بردارها و ویژه‌مقدارها
۳۴۰	۴-۷-۲ روش قطری‌سازی ماتریس
۳۴۶	تمرین‌ها
۳۵۰	۴-۸ خلاصه مطالب
۳۵۲	مراجع
۳۵۳	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی
۳۵۵	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی

پیشگفتار

با وجود این که در دو دهه اخیر چند کتاب ریاضی فیزیک به زبان فارسی ترجمه شده است، هیچ کدام، به عنوان کتاب درسی، مناسب تدریس در دانشگاه پیام نور نیستند. زیرا اساس نظام آموزشی این دانشگاه بر خودآموزی دانشجو است و هر واحد درسی رشته فیزیک بر مبنای ۸ ساعت در هر نیمسال طراحی شده است. در نتیجه کتاب های مورد استفاده مدرسین این دانشگاه باید به صورت خودآموز تألیف شود تا دانشجو بتواند با مطالعه آن به آسانی مطالب علمی پیشرفته را درک کند و مسائل مربوطه را حل کند. پیرو احساس این نیاز و با توجه به تجربه تدریس بیش از ۲۰ سال این درس و ترجمه کتاب های ریاضی فیزیک و ریاضی کاربردی، ما حدود دو سال پیش پیشنهاد تألیف کتاب ریاضی فیزیک ۱ را به شورای گروه فیزیک دانشگاه پیام نور ارائه کردیم. با تصویب شورای مذکور کار شروع گردید و نتیجه آن اکنون پیش روی شماست.

در تألیف این کتاب سعی شده است که مطالب درسی با توضیحات کافی و مثال های متعدد به خواننده ارائه شود، حتی در بعضی موارد، برخلاف کتاب های دیگر مطالب ساده و جزئی را نیز توضیح داده ایم تا برای دانشجو نکات مبهم کمتری باقی بماند. مسلماً کار ما بی عیب نیست و در این مورد هیچ ادعایی هم نداریم، بلکه انتظار داریم که همکاران و دانشجویان محترم کمبودهای کار را به گوشزد کنند تا در چاپ های بعدی کتاب این کاستی ها را برطرف کنیم. پیشاپیش از همه عزیزانی که در این راه ما را یاری می کنند سپاسگزاری می کنیم.

محتوای کتاب طوری تنظیم شده است که مطابق مطالب تعیین شده، برای ۳ واحد درس ریاضی فیزیک ۱، از سوی شورای عالی برنامه ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری باشد. این مطالب را در ۴ فصل گنجانده ایم که امیدواریم مقبول دانشجویان و استادان محترم این درس در دانشگاه پیام نور باشد.

در اینجا لازم می دانیم از کلیه عزیزانی که در تألیف و تولید این کتاب ما را یاری کردند و یا در این کار نقشی داشته اند تشکر کنیم، به خصوص از آقای دکتر مرتضی محسنی، مدیر محترم گروه فیزیک دانشگاه پیام نور، مدیر محترم دایره تدوین و سایر همکارانشان در دایره تدوین این دانشگاه، به ویژه سرکار خانم زینب حیدری عراقی، و مدیریت و کارکنان محترم چاپخانه دانشگاه قدرانی می کنیم.

در پایان از استاد عزیزمان آقای دکتر میرعباس رحمتی که دست نوشته های ما شاگردان قدیمی خود را با صبر و حوصله ویرایش کردند تشکر و قدردانی می کنیم.

رحیم کوهی فایق

علیرضا بینش

فصل اول

بردارها

در این فصل از جبر و آنالیز برداری و قضیه‌های مربوط به آن‌ها که در شاخه‌های مختلف فیزیک چون مکانیک کوانتومی، الکترومغناطیس، مکانیک کلاسیک، و اپتیک، و غیره کاربردهای اساسی دارند به‌طور مشروح صحبت خواهیم کرد. پس از یادگیری این فصل باید بتوانید:

۱. بردار را تعریف کنید و جمع و ضرب (برداری و نرده‌ای) و ضرب‌های سه‌گانه را بنویسید و در مسائل به‌کار برید.
۲. فرمول عملگر دیفرانسیل برداری ∇ را در مختصات دکارتی بنویسید، و آن را روی میدان‌های برداری و نرده‌ای اثر دهید.
۳. سه نوع مشتق‌گیری برداری شیب، واگرایی، و گردش را تعریف کنید و فرمول‌های مربوط به آن‌ها را بنویسید و به‌کار بندید.
۴. قضیه‌های مهم مربوط به انتگرال‌های برداری چون واگرایی و استوکس را بیان و اهمیت آن‌ها را در ساده‌سازی محاسبات درک کنید و آن‌ها را در مسائل به‌کار گیرید.

۱-۱ تعاریف

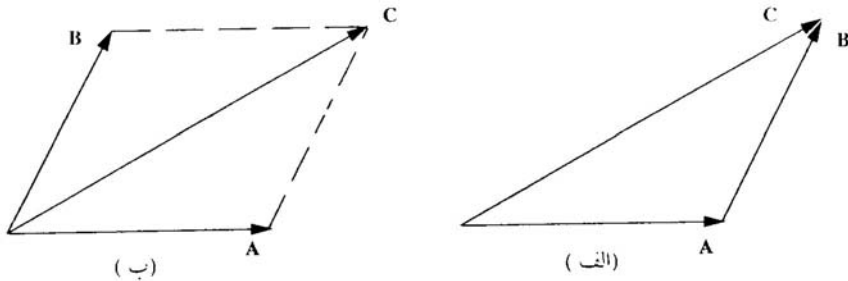
در بخش‌های مختلف علم فیزیک غالباً به کمیت‌هایی بر می‌خوریم که فقط با مقدارشان مشخص می‌شوند. این کمیت‌ها را **اسکالر** یا **نرده‌ای** می‌نامیم. جرم، زمان، دما، و انرژی از این نوع‌اند. کمیت‌های فیزیکی دیگری نیز داریم که با مقدار و جهتشان مشخص می‌شوند. این گروه **بردار** نامیده می‌شوند که از جمله آن‌ها می‌توان از شتاب، نیرو، تکانه، و میدان الکتریکی نام برد. کمیت‌های فیزیکی گروه دوم یعنی بردارها را معمولاً

با حروف سیاه نمایش می دهند درحالی که گروه اول را با حروف معمولی نشان می دهند که بتوان آن ها را از هم تمیز داد. مثلاً A یک بردار است در صورتی که A کمیتی نرده ای است. چون نوشتن حروف سیاه در دست نوشته ها مشکل است، در این گونه موارد برای تشخیص بردار از یک علامت پیکان بالای آن، $\vec{A}$ یا یک خط موج دار زیر آن، $\vec{A}$ ، استفاده می شود.

گرچه تحلیل بردارها ابتدا در علم مکانیک رونق نگرفت، اما امروزه بررسی مسائل مکانیک بدون استفاده از بردارها بسیار مشکل است. بردار را با پیکانی در فضا نمایش می دهیم که طول پیکان معرف اندازه بردار و راستای پیکان جهت بردار است. به این ترتیب جمع دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1-1)$$

از قراردادن ابتدای $\vec{B}$ در انتهای $\vec{A}$ حاصل می شود. در این وضعیت، چنان که در شکل ۱-۱ (الف) نمایش داده ایم، بردار $\vec{C}$ برداری است که ابتدایش ابتدای $\vec{A}$ و انتهایش انتهای $\vec{B}$ است.



شکل ۱-۱ جمع بردارها

اگر شکل (الف) را به صورت متوازی الاضلاع درآوریم، مطابق شکل ۱-۱ (ب) داریم.

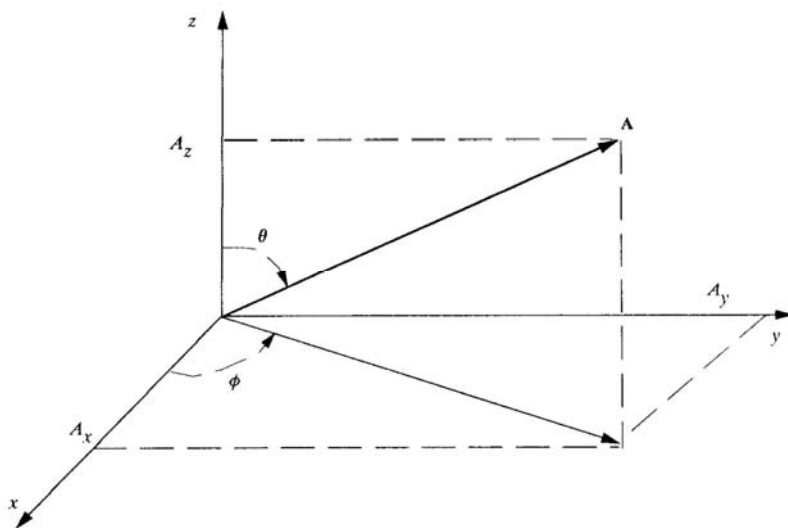
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

حال منفی یک بردار را به صورت برداری تعریف می‌کنیم که با همان اندازه اما در خلاف جهت خود بردار باشد. با توجه به شکل ۱-۱ واضح است که تفاضل دو بردار، $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ ، را می‌توان با قرار دادن ابتدای دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بر هم به دست آورد، به طوری که انتهای $\vec{B}$ ابتدای $\vec{D}$ و انتهای $\vec{A}$ انتهای آن باشد.

توجه داشته باشید که یک بردار مستقل از دستگاه مختصات است. در واقع برای تعریف یک بردار نیازی به دستگاه مختصات خاصی نداریم. مثلاً می‌توانیم بگوییم بردار سرعت باد برابر 2ms^{-1} و در صفحه موازی سطح زمین از جنوب شرقی به شمال غربی است.

بردارها را علاوه بر نمایش با پیکان می‌توان به صورت دیگری هم نمایش داد. بردار $\vec{A}$ را مطابق شکل ۲-۱ در نظر بگیرید. نقطه انتهای بردار با مختصات (A_x, A_y, A_z) مشخص می‌شود. اگر اندازه بردار A و زوایای آن با محورهای x و y و z به ترتیب α و β و γ باشند روشن است که

$$A_z = A \cos \gamma, \quad A_y = A \cos \beta, \quad A_x = A \cos \alpha \quad (2-1)$$



شکل ۲-۱ مؤلفه‌های دکارتی یک بردار

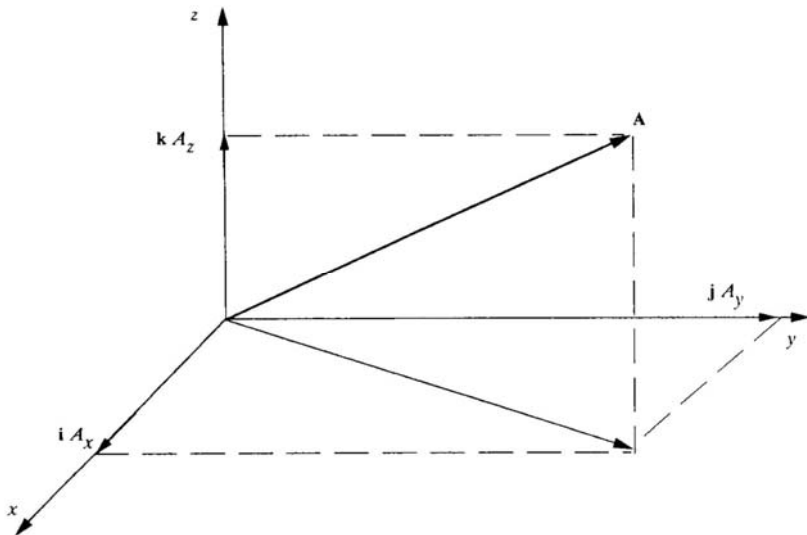
$\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ را کسینوس‌های هادی می‌نامند که مقدار آن‌ها برحسب زوایای معمول مختصات کروی بردار A یعنی θ و ϕ برابر است با:

$$\cos \alpha = \sin \theta \cos \phi \quad , \quad \cos \beta = \sin \theta \sin \phi \quad , \quad \cos \gamma = \cos \theta$$

می‌دانیم که کسینوس‌های هادی $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ باید در رابطه $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ صدق کنند. با تلفیق این رابطه با رابطه ۱-۲ داریم:

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 \quad (3-1)$$

این نتیجه را از شکل هندسی هم می‌توان به‌دست آورد. اکنون بردارهای یکه‌ای در امتداد محورهای x و y و z در نظر می‌گیریم و آن‌ها را به‌ترتیب با $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ نشان می‌دهیم. در این صورت بردار $A_x \hat{i}$ برداری خواهد بود به طول $|A_x|$ و راستای آن در جهت محور x ‌ها یا خلاف آن بسته به مثبت یا منفی بودن A_x خواهد بود. به‌همین ترتیب $A_y \hat{j}$ برداری است در جهت یا در خلاف جهت محور y ‌ها و $A_z \hat{k}$ برداری است در جهت یا خلاف جهت محور z ‌ها. بنابر قانون جمع بردارها و باتوجه به شکل ۱-۳ داریم.



شکل ۱-۳ مؤلفه‌های دکارتی یک بردار و بردار یکه

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (۴-۱)$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ و A_z را مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ به ترتیب در امتداد x, y و z می‌گوییم. بنابر قضیه فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

که همان رابطه (۳-۱) است.

حال می‌توان جمع و تفریق بردارها را با استفاده از مؤلفه‌های آن‌ها به صورت زیر انجام داد. اگر $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$ باشد، داریم:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \hat{i}(A_x \pm B_x) + \hat{j}(A_y \pm B_y) + \hat{k}(A_z \pm B_z) \quad (۵-۱)$$

یعنی بردار حاصل از جمع (تفریق) دو بردار، برداری است که مؤلفه‌های آن حاصل جمع (تفریق) مؤلفه‌های آن دو بردار باشند.

مثال ۱-۱ فرض کنید $\vec{W}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ و $\vec{W}_2 = 6\hat{i} + 7\hat{j}$ را به دست آورید.

حل) طبق رابطه ۵-۱ داریم:

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \vec{W}_1 + \vec{W}_2 = (3+6)\hat{i} + (2+7)\hat{j} = 9\hat{i} + 9\hat{j} \\ \vec{W}' &= \vec{W}_1 - \vec{W}_2 = (3-6)\hat{i} + (2-7)\hat{j} = -3\hat{i} - 5\hat{j} \end{aligned}$$

مثال ۲-۱ اگر $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ و $\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ باشند، بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بر حسب مؤلفه‌های آن‌ها تعیین کنید.

حل: داریم

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{2} \left[(\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{A} - \vec{B}) \right] = \frac{1}{2} \left[(2+3)\hat{i} + (2+2)\hat{j} + (-1+6)\hat{k} \right] \\ &= 2.5\hat{i} + 2\hat{j} + 2.5\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\vec{A} + \vec{B}) - (\vec{A} - \vec{B}) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(3-2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (6+1)\hat{k} \right] \\ &= 0.5\hat{i} - 0.5\hat{j} + 3.5\hat{k}\end{aligned}$$

مثال ۳-۱ بردار $\vec{A}$ از مبدأ مختصات به نقطه A به مختصات $(2, 3, 4)$ در فضا رسم شده است. زوایای این بردار با محورهای مختصات را تعیین کنید.

حل:

$$A = \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (4 + 9 + 16)^{\frac{1}{2}} = 29^{\frac{1}{2}} = 5.39$$

$$A_x = A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = A_x / A = \frac{2}{5.39} = 0.371 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} 0.371 \approx 68.2^\circ$$

$$A_y = A \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = A_y / A = \frac{3}{5.39} = 0.557 \Rightarrow \beta = \cos^{-1} 0.557 = 56.18^\circ$$

$$A_z = A \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = A_z / A = \frac{4}{5.39} = 0.742 \Rightarrow \gamma = \cos^{-1} 0.742 = 42.1^\circ$$

مثال ۴-۱ اگر سیستم شکل ۴-۱ (الف) در حال تعادل و بدون اصطکاک باشد وزن و زنه W_1 را تعیین کنید.

حل: از شکل ۴-۱ (ب)، که معادل شکل ۴-۱ (الف) است پیدا است که:

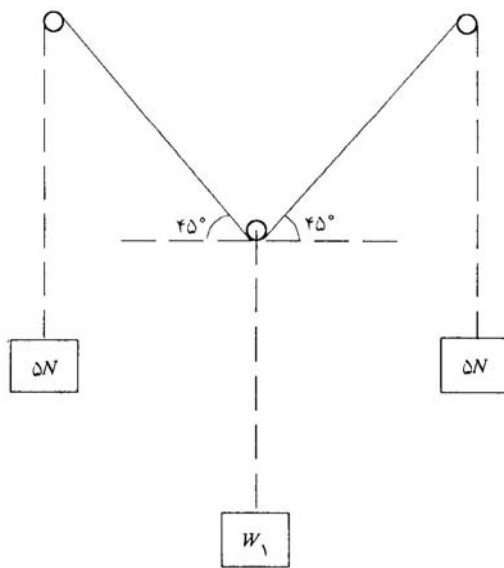
$$W_{1x} = 0$$

و

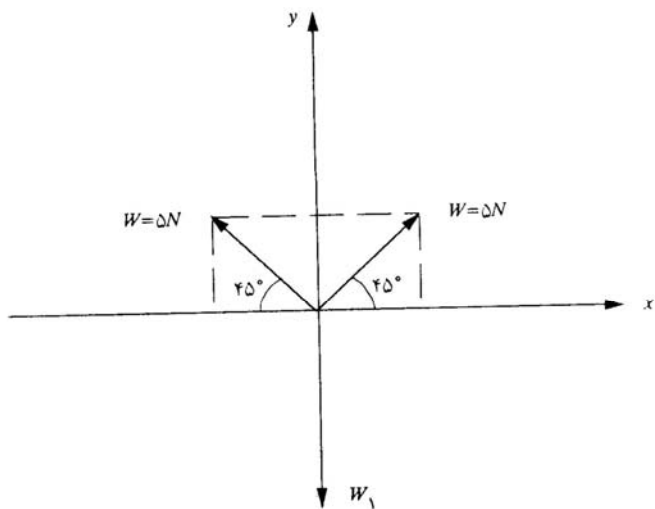
$$W_{1y} = 2W_y$$

$$W_{1y} = 2W \sin \theta$$

$$W_1 = W_{1y} = 2 \times 5 \times \sin 45^\circ \approx 7.1 \text{ N}$$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱ تعادل نیروها

مثال ۵-۱ اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در رابطه $\vec{A} = \alpha \vec{B}$ ، (α یک کمیت نرده‌ای است)، صدق کنند، موازی هم هستند. ثابت کنید بردارهای زیر موازی یکدیگرند.

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$$

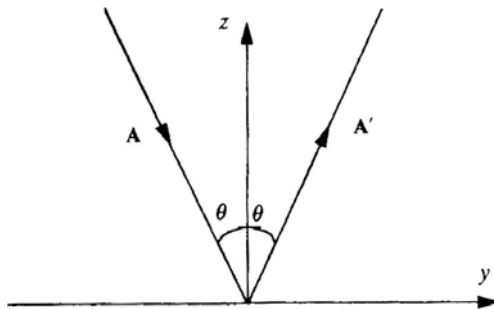
حل: داریم:

$$\vec{B} = 2(3\hat{i} + 2\hat{j}) = 2\vec{A}$$

پس دو بردار موازی‌اند.

مثال ۶-۱ نور تختی به صفحه بازتابان منطبق بر صفحه xy با بردار تابش $\vec{A} = 2\hat{j} - \hat{k}$ تابیده می‌شود. جهت بازتاب آن با چه برداری تعیین می‌شود؟ مسئله را با رسم شکل و تعیین مؤلفه‌های بردار موردنظر حل کنید.

حل) بنابر شکل زیر بردار A' راستای بازتاب را نشان می‌دهد.



با توجه به شکل داریم:

$$A'_y = A_y = 2$$

$$A'_z = -A_z = +1$$

بنابراین

$$\vec{A}' = 2\hat{j} + \hat{k}$$

تمرین‌ها

- ۱-۱-۱ ثابت کنید که میانه‌های یک مثلث در نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند که به اندازه $\frac{1}{3}$ طول هر میانه از رأس مربوطه فاصله دارد.
- ۱-۱-۲ ثابت کنید قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.
- ۱-۱-۳ برآیند نیروهای زیر را حساب کنید.

$$\vec{p} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{q} = 5\hat{i} - 2\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{u} = -\hat{j} + 3\hat{k} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{p} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{q} = -2\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{u} = \hat{k} \quad (\text{ب})$$

- ۱-۱-۴ نیروی $\vec{P}$ را طوری پیدا کنید که برآیند آن با $\vec{q} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ و $\vec{u} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ صفر شود.

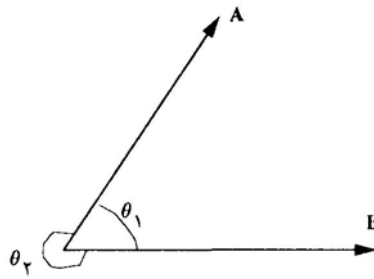
- ۱-۱-۵ برداری به طول ۱۰ با محورهای x و y و z زوایای مساوی می‌سازد، مؤلفه‌های آن را به دست آورید.

- ۱-۱-۶ برداری که در صفحه xy قرار دارد و با جهت مثبت محور x و y زاویه مساوی می‌سازد، مؤلفه‌های آن را به دست آورید.

۲-۱ ضرب نرده‌ای یا داخلی

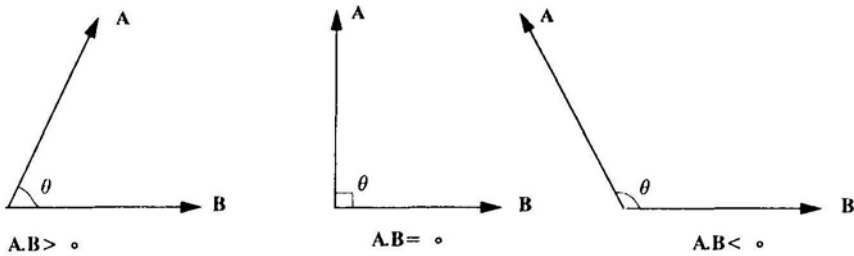
اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار دلخواه در فضا باشند به آسانی می‌توان آن‌ها را از یک مبدأ رسم کرد. این دو بردار با یکدیگر زوایای θ_1 و θ_2 می‌سازند. کوچک‌ترین زاویه را θ_1 فرض می‌کنیم و زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌نامیم، در نتیجه $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ است (شکل ۵-۱). حال ضرب نرده‌ای یا داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (6-1)$$

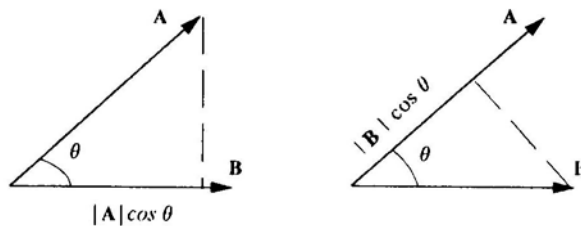


شکل ۵-۱ زاویه بین دو بردار

چون مقدار کسینوس می تواند مثبت، صفر و یا منفی باشد، بنابراین حاصل ضرب داخلی دو بردار نیز می تواند مثبت، صفر و یا منفی باشد (شکل ۶-۱).



شکل ۶-۱ زاویه بین دو بردار و مقدار ضرب نرده ای



شکل ۷-۱ تصویر $\vec{A}$ در امتداد $\vec{B}$ و یا $\vec{B}$ در امتداد $\vec{A}$

چون $A \cos \theta$ اندازه تصویر $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ است، پس با توجه به شکل (۷-۱) ملاحظه می شود:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{B}| (\text{تصویر } \vec{A} \text{ در راستای } \vec{B}) = |\vec{A}| (\text{تصویر } \vec{B} \text{ در راستای } \vec{A})$$

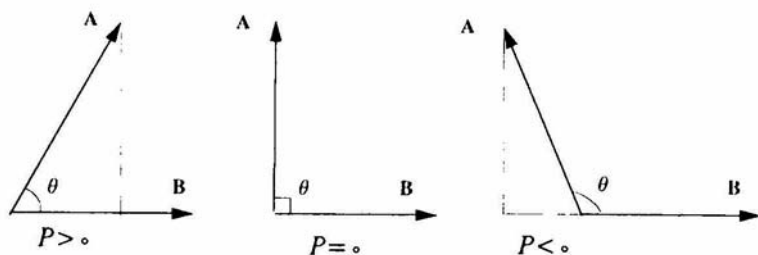
بنابراین اگر P طول تصویر بردار $\vec{A}$ در راستای بردار $\vec{B}$ باشد داریم:

$$P = |\vec{A}| \cos \theta \quad (۷-۱)$$

اگر سمت راست رابطه بالا را در $|\vec{B}|$ ضرب و تقسیم کنیم ($|\vec{B}| \neq 0$) آن گاه

$$P = \frac{|\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \quad (۸-۱)$$

در شکل (۸-۱) حالت‌های مختلف θ نشان داده شده‌اند.



شکل ۸-۱ تصویر بردار $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$

همچنین برای بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ که در مختصات دکارتی تعریف شدند روابط زیر برقراراند:

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \\ \hat{j} \cdot \hat{i} &= \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0 \end{aligned} \quad (۹-۱)$$

بنابراین اگر در مختصات دکارتی $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ به صورت یا $\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$ باشد، که در آن A_x و A_y و A_z عبارتند از تصاویر $\vec{A}$ در

راستای محوره‌های x و y و z و نیز برای $\vec{B}$ داریم $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$ یا $\vec{B} = [B_x, B_y, B_z]$ آن‌گاه با استفاده از رابطه (۹-۱) می‌توان نشان داد که ضرب نرده‌ای دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت زیر است:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (۱۰-۱)$$

سرانجام از مساوی قرار دادن طرف راست دو رابطه (۶-۱) و (۱۰-۱)، θ زاویه بین دو بردار را می‌توان به دست آورد:

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\vec{A} \cdot \vec{B}} \quad (۱۱-۱)$$

مثال ۷-۱ ضرب نرده‌ای $\vec{A} = [۱, ۲, ۰]$ و $\vec{B} = [۳, ۲, ۱]$ را به دست آورید.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ۱ \times ۳ + ۲ \times ۲ + ۰ \times ۱ = ۷ \quad (\text{حل})$$

مثال ۸-۱ در مثال ۷-۱ تصویر $\vec{A}$ را در راستای $\vec{B}$ به دست آورید.

(حل) می‌دانیم $\vec{A} \cdot \vec{B} = ۳ + ۴ = ۷$ و $|\vec{B}| = \sqrt{۹ + ۴ + ۱} = \sqrt{۱۴}$ پس:

$$P = \vec{A} \cdot \vec{B} / |\vec{B}| = \frac{۷}{\sqrt{۱۴}} = \frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}} = ۱/\sqrt{۲}$$

مثال ۹-۱ زاویه بین دو بردار زیر را به دست آورید:

$$\vec{A} = ۳\hat{i} + ۴\hat{j} + \hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

(حل) برای محاسبه زاویه θ نخست صورت کسر رابطه (۱۱-۱) را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = ۳ \times ۱ + ۴(-۱) + ۱ \times ۱ = ۰$$

و چون $A = \sqrt{۵}$ و $B = \sqrt{۱۴}$ است پس داریم: