



ریاضی فیزیک ۲

(رشته فیزیک)

دکتر علی حسین محمدظاهری

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب کتاب

نه	پیشگفتار
۱	فصل اوّل. اعداد مختلط
۲	۱-۱ ویژگی‌های اعداد مختلط
۳	۲-۱ جبر اعداد مختلط
۳	۳-۱ خواصّ عمل جمع در اعداد مختلط
۵	۴-۱ ضرب اعداد مختلط
۶	۵-۱ خواصّ عمل ضرب
۸	۶-۱ تقسیم اعداد مختلط
۸	۷-۱ نمایش تصویری اعداد مختلط
۱۲	۸-۱ شکل قطبی اعداد
۱۵	۹-۱ شکل نمایی اعداد مختلط
۱۶	۱۰-۱ ضرب اعداد مختلط (شکل نمایی)
۱۶	۱۱-۱ تقسیم اعداد مختلط (شکل نمایی)
۱۶	۱۲-۱ قضیه دوموآور
۱۹	۱۳-۱ ریشه‌های n ام اعداد مختلط
۲۹	۱۴-۱ ناحیه مختلط
۳۰	مسائل فصل اوّل
۳۵	فصل دوّم. توابع مختلط
۳۵	۱-۲ توابع یک متغیره مختلط
۳۶	۲-۲ دسته نقاط
۳۶	۳-۲ همسایه یک نقطه
۳۶	۴-۲ نقطه حلقی یک مجموعه
۳۶	۵-۲ تابع متغیر مختلط
۳۷	۶-۲ تابع پیوسته مختلط
۳۷	۷-۲ معرفی چند تابع مختلط مقدماتی

۴۴	۸-۲ مشتق‌گیری از توابع مختلط
۵۳	مسائل فصل دوّم
۵۵	فصل سوّم. انتگرال‌گیری از توابع مختلط
۵۵	۱-۳ انتگرال‌گیری از توابع مختلط
۵۷	۲-۳ انتگرال‌های خطی حقیقی
۵۷	۳-۳ قضیه انتگرال کوشی
۸۶	مسائل فصل سوّم
۸۹	فصل چهارم. بسط تیلور
۸۹	۱-۴ تعریف سری
۸۹	۲-۴ سری‌های توانی مختلط
۹۰	۳-۴ سری‌های توابع
۹۰	۴-۴ همگرایی مطلق
۹۱	۵-۴ بسط تیلور توابع مختلط
۹۶	۶-۴ چند سری خاصّ
۹۶	۷-۴ بسط لوران
۱۰۷	۸-۴ اصل انعکاس شوارتز
۱۰۸	مسائل فصل چهارم
۱۱۱	فصل پنجم. حساب مانده‌ها
۱۱۱	۱-۵ مقلّده
۱۱۳	۲-۵ تعمیم به حالت کلی
۱۱۴	۳-۵ نقاط منفرد یا تکیه (قطب‌ها)
۱۱۵	۴-۵ نقاط شاخه‌ای
۱۱۹	۵-۵ مقادیر اصلی کوشی
۱۲۲	۶-۵ انتگرال‌گیری با استفاده از حساب مانده‌ها
۱۴۳	مسائل فصل پنجم
۱۴۷	فصل ششم. نگاشت
۱۴۷	۱-۶ نمایش تصویری توابع مختلط
۱۵۲	۲-۶ نگاشت همدیس (همشکلی)
۱۵۴	۳-۶ محک همشکلی
۱۵۹	۴-۶ ژاکوبین یک تبدیل
۱۶۳	مسائل فصل ششم
۱۶۵	فصل هفتم. سری فوریه
۱۶۵	۱-۷ مقلّده
۱۶۶	۲-۷ ضرایب بسط فوریه

۱۷۱	۳-۷ تغییر بازه انتگرال ها
۱۷۲	۴-۷ کاربردهای سری فوریه
۱۷۴	۵-۷ تقریب توسط چندجمله‌ای‌های مثلثاتی - خطای مرتبی
۱۷۶	۶-۷ انتگرال فوریه
۱۸۰	مسائل فصل هفتم

۱۸۳	فصل هشتم. نظریه اشتورم - لیوویل
۱۸۳	۱-۸ عملگرهای خودالحاقی
۱۸۶	۲-۸ تبدیل عملگر غیر خودالحاقی به عملگر خودالحاقی
۱۸۸	۳-۸ ویژه توابع - ویژه مقادیر
۱۹۸	۴-۸ عملگرهای هرمیتی
۲۰۱	۵-۸ عملگرهای هرمیتی در مکانیک کوانتومی
۲۰۳	۶-۸ فضای براکت (روش دیراک)
۲۰۴	۷-۸ فضای برا
۲۰۴	۸-۸ ضرب داخلی یک برا و یک کت
۲۰۵	۹-۸ عملگرها
۲۰۵	۱۰-۸ خواص عملگرها
۲۰۶	۱۱-۸ ضرب
۲۰۷	۱۲-۸ متعامدسازی گرام اشمیت
۲۱۱	۱۳-۸ کامل بودن ویژه توابع
۲۱۸	مسائل فصل هشتم

۲۲۱	فصل نهم. حساب تغییرات
۲۲۱	۱-۹ اکستریم انتگرال
۲۲۲	۲-۹ معادلات اوایلر
۲۲۶	۳-۹ قیدها
۲۲۷	۴-۹ نمادگذاری تغییرات
۲۲۹	۵-۹ اصل هامیلتون
۲۳۰	۶-۹ معادلات لاگرانژ
۲۳۲	۷-۹ سیستم‌های اشتورم - لیوویل و روش‌های ریلی - ریتس
۲۳۷	مسائل فصل نهم

۲۴۰	مراجع
-----	-------

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

پیشگفتار

دانش ریاضیات برای حلّ مسائل علمی در شاخه‌های مختلف رشته‌های علوم و مهندسی، به‌ویژه فیزیک نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. به بیانی می‌توان نقش ریاضیات در حلّ مسائل فیزیکی را به نقش داربست هنگام ساختن یک ساختمان تشبیه نمود. همان‌گونه که پس از اتمام ساخت ساختمان داربست‌ها کنار گذاشته می‌شوند، در حلّ مسائل فیزیکی به کمک ریاضیات نیز در آخرین گام ریاضیات کنار رفته و تعبیر فیزیکی نتایج حاصل برای ما حائز اهمیت هستند.

در این کتاب سعی شده است مفاهیم مورد نیاز و مصوب در شورای عالی انقلاب فرهنگی برای کتاب ریاضی فیزیک (۲) ویژه دانشجویان رشته فیزیک به زبان ساده و با مثال‌های متعدّد به‌گونه‌ای مورد بحث قرار گیرند که فرآیند یادگیری این درس به شکل خودآموز فراهم گردد.

در پایان، لازم می‌دانم از کلیه همکاران محترم اعضای شورای تخصصی فیزیک که این کتاب را به‌عنوان منبع درسی برای دانشگاه پیام‌نور تصویب کرده و نیز از تمام کسانی که اینجانب را در مراحل تهیه و تدوین کتاب درسی یاری نموده‌اند، به‌ویژه سرکار خانم دکتر فرّین پاینده که ویراستاری این کتاب را با صبر و حوصله خاصی انجام داده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

با آرزوی توفیق

دکتر علی حسین محمد ظاهری

فصل اول

اعداد مختلط

پوالوفا محمد بوزجانی

دانشمند مسلمان ایرانی - اسلامی سده چهارم هجری

او در ۳۲۸ هجری قمری در بوزجان (تربت جام امروزی) به دنیا آمد. در بیست سالگی به بغداد رفت و به خدمت شرفالدوله - فرزند عضدالدوله - درآمد و در رصدخانه‌ای که شرفالدوله در بغداد ساخته بود، با سرپرستی ابوسهل کوهی مشغول به کار شد. از آثار وی می‌توان فیما یحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسه و المجسطی یا الکامل را نام برد. وی واضع اتحاد مثلثاتی بود. هم‌چنین قانون سینوس‌ها را برای مثلثات کروی کشف کرد.

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(2a) &= 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)\end{aligned}$$

از ریاضیات پایه می‌دانیم که برای معادله $x^2 + 1 = 0$ جواب حقیقی وجود ندارد. در راستای تلاش‌های انجام شده برای یافتن جوابی برای این معادله و معادلات مشابه، در قرن شانزدهم میلادی نماد $\sqrt{-1}$ به‌عنوان جواب معادله فوق معرفی شد. این نماد که با علامت i نشان داده می‌شود، یک عدد ساختگی و موهومی است که همانند یک عدد حقیقی عمل می‌کند. لذا چندجمله‌ای $x^2 + 1$ را می‌توان به شکل $x^2 - i^2$ و یا به شکل $(x+i)(x-i)$ تجزیه کرده و جواب آن را به شکل $x = \pm i$ نوشت و سپس با تعمیم این بحث، مجموعه اعداد مختلط را تعریف نمود. در حالت کلی مجموعه دستگاه اعداد مختلط که با z نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$z = \{(x, y) | x, y \in R\} \quad (1)$$

به بیان دیگر هر عدد مختلط ترکیبی از دو عدد حقیقی مانند x ، y است که توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$z = x + iy \quad (2)$$

گاهی رابطه فوق را با زوج مرتب $z = (x, y)$ نشان می‌دهند.

در معادله بالا x بخش حقیقی و y بخش موهومی را تشکیل می‌دهد و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. معمولاً قسمت حقیقی را با $(\text{Re}(z) = x)$ و قسمت موهومی را با $(\text{Im}(z) = y)$ نشان می‌دهند.

۱-۱ ویژگی‌های اعداد مختلط

۱-۱-۱ اندازه (مدول) عدد مختلط

اندازه هر عدد مختلط به شکل $|z|$ نوشته می‌شود و با رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

مثال ۱: مدول (قدر مطلق) عدد مختلط $z = 4 + 2i$ را محاسبه کنید:

$$|z| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

۱-۱-۲ مزدوج عدد مختلط

برای هر عدد مختلط، یک مزدوج مختلط تعریف می‌شود که از تبدیل i به $-i$ به دست می‌آید و با (z^*) یا $\bar{z}$ نمایش داده می‌شود. با استفاده از حاصل ضرب مزدوج عدد مختلط در خود آن می‌توان به شیوه زیر مدول عدد مختلط را به دست آورد:

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad z^* = x - iy \quad (4)$$

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2$$

$$|z| = (zz^*)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اگر $z_1, z_2, \dots, z_m$ اعداد مختلط باشند، خواص زیر برای مدول اعداد مختلط برقرارند:

$$|z_1, z_2, \dots, z_m| = |z_1| |z_2| \dots |z_m| \quad (\text{الف})$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0 \quad (\text{ب})$$

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_m| \quad (\text{ج})$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2| \quad (\text{د})$$

۲-۱ جبر اعداد مختلط

برای هر مجموعه‌ای جبر خاصی تعریف می‌شود به طوری که عملیات جبری بین اعضای آن مجموعه تعریف می‌گردد و حاصل باید در آن مجموعه وجود داشته باشد. بدیهی است جبر اعداد مختلط مستثنای از این قاعده نیست.

جمع:

فرض کنید z_1, z_2 دو عدد مختلط باشند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

حاصل جمع این دو عدد مختلط برابر است با:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (5)$$

ملاحظه می‌کنیم که حاصل جمع دو عدد مختلط یک عدد مختلط است. پس برای جمع دو عدد مختلط بخش‌های حقیقی را با هم جمع کرده و بخش‌های موهومی را نیز با هم جمع می‌کنیم.

۳-۱ خواص عمل جمع در اعداد مختلط

- عضو خنثی در عمل جمع اعداد مختلط، صفر مختلط است که در اینجا با z_0 نشان داده شده است.

$$z_0 = 0 + 0i \quad z = z_1 + z_0 = (x_1 + 0) + i(y_1 + 0) \Rightarrow z = x_1 + iy_1 = z_1$$

- خاصیت جابه‌جایی: جمع دو عدد مختلط دارای خاصیت جابه‌جایی است.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

- خاصیت شرکت پذیری: اعداد مختلط دارای خاصیت شرکت پذیری هستند.

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

- معکوس عمل جمع

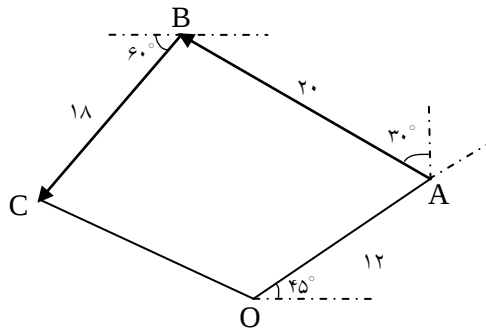
جمع یک عدد مختلط با معکوس جمعی آن، معادل با عضو خنثی در جمع اعداد مختلط است.

$$z + (-z) = 0 + 0i$$

مثال ۲: شخصی ۱۲ مایل با زاویه 45° به شمال شرقی، ۲۰ مایل با زاویه 30° به شمال غربی، و سپس ۱۸ مایل با زاویه 60° به جنوب غربی می‌رود. مسافت پیموده شده و جهت آن از نقطه شروع را (الف) به روش تحلیلی (ب) به روش تصویری، تعیین کنید.

(الف) روش تحلیلی. فرض کنیم O نقطه شروع باشد، در این صورت تغییر مکان‌های متوالی با بردارهای OA, AB و BC نمایش داده می‌شوند. حاصل هر سه تغییر مکان با بردار زیر نشان داده می‌شود:

$$OC = OA + AB + BC$$



شکل ۱-۱

اما می‌توان نوشت:

$$OA = 12(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 12e^{\frac{\pi i}{4}}$$

$$AB = 2 \cdot \left\{ \cos(90^\circ + 30^\circ) + i \sin(90^\circ + 30^\circ) \right\} = 2 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$BC = 18 \left\{ \cos(180^\circ + 60^\circ) + i \sin(180^\circ + 60^\circ) \right\} = 18e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} OC &= 12e^{\frac{\pi i}{4}} + 2 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} + 18e^{\frac{24\pi i}{3}} \\ &= \left\{ 12 \cos 45^\circ + 2 \cos 120^\circ + 18 \cos 240^\circ \right\} + i \left\{ 12 \sin 45^\circ + 2 \sin 120^\circ + 18 \sin 240^\circ \right\} \\ &= \left\{ (12) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (2) \left(-\frac{1}{2} \right) + (18) \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} + i \left\{ (12) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (18) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= (6\sqrt{2} - 19) + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

هرگاه، داشته باشیم:

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = 6\sqrt{2} - 19 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i$$

آن گاه، خواهیم داشت:

$$r = \sqrt{(6\sqrt{2} - 19)^2 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = 14.7$$

و

$$\theta = \cos^{-1} \frac{6\sqrt{2} - 19}{14.7} = \cos^{-1}(-0.717) = 135^\circ 49'$$

لذا، این شخص مسافت ۱۴/۷ مایل را از نقطه شروع و در جهت $45^\circ 49' - 90^\circ = 135^\circ 49'$ به سمت شمال غربی طی کرده است.

۴-۱ ضرب اعداد مختلط

دو عدد مختلط z_1 و z_2 به شکل زیر در هم ضرب می‌شوند:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - y_1 y_2 \end{aligned}$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (۶)$$

ملاحظه می‌شود که حاصل، یک عدد مختلط است.

۵-۱ خواص عمل ضرب

- عنصر خنثی: در عمل ضرب اعداد مختلط، عدد مختلط ۱ است که به شکل $z_0 = 1 + 0i$ تعریف می‌شود.

- خاصیت جابه‌جایی نسبت به عمل ضرب:

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

- خاصیت شرکت‌پذیری:

$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$$

- خاصیت توزیع‌پذیری:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

اگر $z_1 = (a_1, b_1)$ ، $z_2 = (a_2, b_2)$ و $z_3 = (a_3, b_3)$ باشند، قانون توزیع‌پذیری را می‌توانیم مطابق زیر ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a_1, b_1)\{(a_2, b_2) + (a_3, b_3)\} = (a_1, b_1)(a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= \{(a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))\} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

- وارون عدد مختلط: وارون هر عدد مختلط، عدد مختلطی است که با ضرب آن‌ها در یکدیگر حاصل ضرب برابر یک خواهد شد:

$$z^{-1}z = 1 + 0i$$

$$(x', y').(x, y) = (1, 0) \Rightarrow (x'x - y'y, x'y + y'x) = (1, 0)$$

$$z^{-1} = (x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\begin{cases} x'x - y'y = 1 \\ x'y + y'x = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا، وارون z برابر با $1 + 0i$ حاصل می‌شود:

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$z = \frac{x_1^2 - i x_2 y_2 + i x_1 y_2 + y_1^2}{x_2^2 - i x_2 y_2 + i x_1 y_2 + y_1^2} = \frac{x_2^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_1^2} = 1 + 0i$$

مثال ۳: وارون عدد مختلط $z = 1 + i$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم وارون عدد مختلط z ، عدد مختلطی مانند z_1 باشد که مطابق زیر

تعریف می‌شود:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

بنابراین x_1 و y_1 را به روش زیر پیدا می‌کنیم:

$$zz_1 = 1 + 0i$$

$$(1 + i)(x_1 + iy_1) = 1 \Rightarrow x_1 + iy_1 + x_1 i - y_1 = 1 + 0i$$

$$(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)i = 1 + 0i \Rightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 = 1 \\ x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = -y_1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

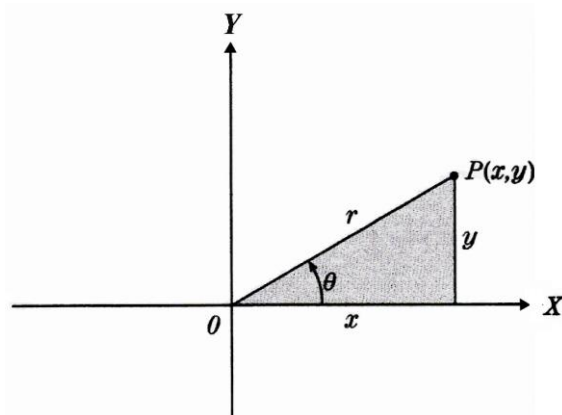
۶-۱ تقسیم اعداد مختلط

حاصل تقسیم دو عدد مختلط، یک عدد مختلط است که به شکل زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{z_2^*}{z_2^*} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - i x_1y_2 + i y_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \end{aligned} \quad (V)$$

۷-۱ نمایش تصویری اعداد مختلط

نمایش هندسی مفاهیم ریاضی در اغلب موارد کمک شایانی به فهم موضوع می کند. هر عدد مختلط z را می توان در صفحه $x-y$ (به نام صفحه مختلط) که صفحه آرگاند - گاوس نیز خوانده می شود، نمایش داد. در صفحه آرگاند - گاوس محور افقی X بیانگر قسمت حقیقی و محور عمودی Y بیانگر قسمت موهومی عدد مختلط است.



شکل ۲-۱

هر نقطه مانند $p \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ در این صفحه بیانگر یک عدد مختلط مانند $z = x + iy$ می باشد که $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ به مدول عدد مختلط معروف است و زاویه بین OP و قسمت مثبت محور X ، آرگومان z نامیده می شود و با رابطه $\theta = \arg(z)$ نشان داده می شود. با توجه به این که می توان به θ مقدار $2k\pi$ را اضافه کرد، می توان نوشت:

$$\arg(z) = \arg(z) + 2k\pi \quad (۸)$$

در رابطه بالا $\arg(z)$ را مقدار اصلی آرگومان می نامند و بازه تغییرات آن از $-\pi$ تا $+\pi$ است، به طوری که برای نیم صفحه بالایی محور x از 0 تا π و برای نیم صفحه پایینی از 0 تا $-\pi$ تغییر می کند. به طور خلاصه $\arg(z)$ برای ربع های مختلف به شکل زیر نوشته می شود:

برای ربع اوّل

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \arg(z) = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

برای ربع دوّم

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \arg(z) = \theta = \pi - \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

برای ربع سوّم

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad \arg(z) = \theta = -\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

برای ربع چهارم

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad \arg(z) = \theta = -\tan^{-1} \frac{y}{x}$$

مثال ۴: ثابت کنید مدول مجموع دو عدد مختلط، کوچکتر یا مساوی مجموع مدولهای آنها است.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{و} \quad |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

حل:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= [(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2] \\ &= [x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2] \end{aligned}$$

از طرفی قسمت حقیقی $z_1 z_2^*$ برابر $x_1 x_2 - y_1 y_2$ می باشد، یعنی:

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

$$|\operatorname{Re} z_1 z_2^*| \leq |z_1 z_2^*| \rightarrow |(z_1 + z_2)|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

توضیح:

$$z + z^* = 2\operatorname{Re} z$$

$$z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* = 2\operatorname{Re}((z_1 z_2^*)) \leq 2|z_1 z_2^*| \leq 2|z_1||z_2|$$

مثال ۵: ثابت کنید مدول تفاقی دو عدد مختلط بزرگتر یا مساوی تفاقی مدولهای آنها است.

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

حل:

$$|z_1 - z_2|^2 \geq (|z_1| - |z_2|)^2$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\begin{aligned}
 |z_1 - z_2|^2 &= [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\
 &= [x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2] \\
 |z_1 - z_2|^2 &= [(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)] \\
 &= [|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)]
 \end{aligned}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq |z_1||z_2|$$

$$|z_1 - z_2|^2 \geq (|z_1| - |z_2|)^2$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

مثال ۶: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

حل:

$$\begin{aligned}
 (z_1 \pm z_2)^* &= (x_1 + x_2) \mp i(y_1 + y_2) \\
 &= (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) \\
 &= z_1^* \pm z_2^*
 \end{aligned}$$

مثال ۷: جواب‌های حقیقی معادله زیر را به دست آورید.

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$$

حل:

$$4x + 2xi + 5y - 3yi = 13 + i$$

$$(4x + 5y) + (2x - 3y)i = 13 + i \Rightarrow \begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 2, y = 1$$

مثال ۸: مدول و آرگومان عدد مختلط زیر را پیدا کنید.

$$z = -\sin \frac{\pi}{\lambda} - i \cos \frac{\pi}{\lambda}$$

حل:

$$|z| = \left[\left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \arg z &= -\pi + \tan^{-1} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi}{\lambda}} \right) \\ &= -\pi + \tan^{-1} \left(\cot \frac{\pi}{\lambda} \right) = -\pi + \tan^{-1} \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\lambda} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\arg z = -\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\lambda} \right) = \frac{-\pi}{\lambda}$$

$$\text{Arg} z = \arg z + 2k\pi \Rightarrow \text{Arg} z = \left[\frac{-\pi}{\lambda} + 2k\pi \right], \quad k = 0, 1, \dots$$

۸-۱ شکل قطبی اعداد مختلط

بردار (x, y) به طول $|\rho| = \sqrt{x^2 + y^2}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم این بردار با محور x ها زاویه φ تشکیل می‌دهد به طوری که $-\pi < \varphi \leq \pi$ باشد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (9)$$

با جاگذاری مقادیر بالا در رابطه $z = x + iy$ ، شکل قطبی اعداد مختلط را می‌توان به صورت $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ نوشت که در این رابطه ρ مدول و φ آرگومان z می‌باشند:

$$|z| = \rho, \quad \varphi = \arg z$$

و نحوه محاسبه ρ و φ در قسمت‌های قبل بیان شد.

از مزایای شکل قطبی اعداد مختلط، سهولت در برخی از عملیات جبری از جمله ضرب می‌باشد. به عنوان مثال، فرض کنید:

$$z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad , \quad z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

لذا $z_1 z_2$ برابر خواهد شد با:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)]$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

پس در حالت کلی می‌توان گفت حاصل ضرب دو عدد مختلط، عدد مختلطی است که مدول آن برابر با حاصل ضرب مدول‌های آن دو عدد و آرگومان یا شناسه آن مساوی مجموع آرگومان‌های آن‌ها می‌باشد. یعنی، داریم:

$$\rho = \rho_1 \rho_2 \quad , \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

مثال ۹: عدد مختلط زیر را به شکل قطبی نمایش دهید.

$$z = -1 - i\sqrt{3}$$

حل:

$$|z| = \rho = \left[(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\varphi = -\pi + \tan^{-1} \sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

مثال ۱۰: اعداد مختلط زیر را به شکل قطبی بیان کنید.

(ج) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$

(ب) $-5 + 5i$

(الف) $2 + 2\sqrt{3}i$

حل:

(الف) مدول یا قدر مطلق عدد $۲+۲\sqrt{۳}i$ برابر است با:

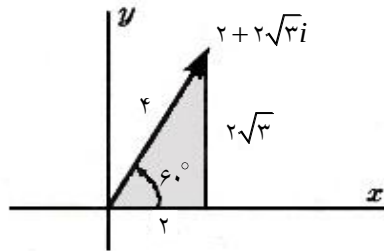
$$\rho = |۲+۲\sqrt{۳}i| = \sqrt{۴+۱۲} = ۴$$

و دامنه یا شناسه آن برحسب رادیان عبارت است از:

$$\theta = \sin^{-1} \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \sin^{-1} \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$$

در این صورت، می توان نوشت:

$$۲+۲\sqrt{۳}i = r(\cos \theta + i \sin \theta) = ۴(\cos ۶۰^\circ + i \sin ۶۰^\circ) = ۴(\cos \frac{\pi}{۳} + i \sin \frac{\pi}{۳})$$

نتیجه بالا را می توان با استفاده از فرمول اویلر، به صورت $۴e^{\pi i/۳}$ نوشت.

شکل ۳-۱

(ب) برای عدد مختلط $-۵+۵i$ نیز داریم:

$$\rho = |-۵+۵i| = \sqrt{۲۵+۲۵} = ۵\sqrt{۲}$$

$$\theta = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴} \text{ رادیان}$$

در این صورت:

$$-۵+۵i = ۵\sqrt{۲}(\cos ۱۳۵^\circ + i \sin ۱۳۵^\circ)$$

$$= ۵\sqrt{۲} \operatorname{cis} \frac{۳\pi}{۴} = ۵\sqrt{۲} e^{\frac{۳\pi i}{۴}}$$

(ج) به همین ترتیب، برای عدد مختلط $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ داریم:

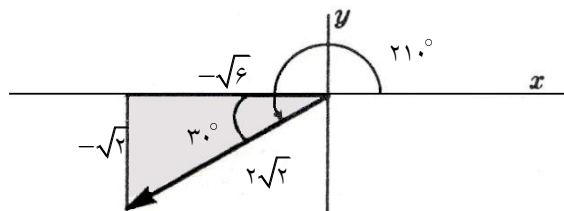
$$\rho = |-\sqrt{6}-\sqrt{2}i| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = -\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\varphi = -\frac{5\pi}{6} \text{ رادیان}$$

در این صورت:

$$-\sqrt{6}-\sqrt{2}i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$



شکل ۴-۱

۹-۱ شکل نمایی اعداد مختلط

اعداد مختلط را می‌توان به شکل نمایی $z = \rho e^{i\varphi}$ نمایش داد که در آن ρ مدول z و φ آرگومان آن می‌باشد:

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

$$|z| = \rho$$

$$\varphi = \arg z \quad (10)$$

مثال ۱۱: مجموعه اعداد مختلط $z \neq 0$ را طوری بیابید که در شرط $z^{n-1} = z^*$ صدق کند.

حل:

$$z = \rho e^{i\varphi} \rightarrow z^{n-1} = \rho^{n-1} e^{i(n-1)\varphi}$$