



دانشگاه سیام نور
پی

ریاضی فیزیک ۳

(رشته فیزیک)

دکتر فرین پاینده

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

۱	فصل اول. توابع گاما و بتا
۲	۱-۱ تعریف تابع گاما به صورت یک حد نامتناهی (نمایش حدی اویلر)
۵	۲-۱ تعریف تابع گاما به صورت یک انتگرال معین (نمایش انتگرالی اویلر)
۲۶	۳-۱ تعریف تابع گاما به صورت حاصل ضرب نامتناهی (نمایش وایرستراس)
۳۵	۴-۱ نمادگذاری فاکتوریل
۳۹	۵-۱ نمادگذاری فاکتوریل دوگانه و سه گانه
۴۸	۶-۱ بررسی قطب‌های تابع گاما
۵۲	۷-۱ تابع بتا
۵۸	۸-۱ مشتق تابع گاما: توابع دی گاما و پلی گاما
۶۵	۹-۱ تابع پلی گاما برحسب تابع زتای ریمان
۶۹	تمرین‌های فصل اول
۷۱	فصل دوم. توابع بسل
۷۲	۱-۲ مقدمه‌ای بر توابع متعامد
۷۴	۲-۲ توابع نوع اول بسل
۷۴	۱-۲-۲ معادله دیفرانسیل بسل
۸۰	۲-۲-۲ تابع مولد برای $J_n(x)$
۸۵	۳-۲-۲ بیان توابع مثلثاتی برحسب توابع بسل
۸۷	۴-۲-۲ روابط بازگشتی برای $J_n(x)$
۹۴	۵-۲-۲ عملگرهای بالا برنده (افزاینده) و پایین آورنده (کاهنده) برای توابع بسل
۹۶	۶-۲-۲ نمایش انتگرالی توابع بسل
۱۰۷	۷-۲-۲ ریشه‌های توابع بسل
۱۱۳	۳-۲ تعامد
۱۱۳	۱-۳-۲ تعامد توابع بسل
۱۲۲	۲-۳-۲ بسط یک تابع اختیاری برحسب سری فوریه - بسل
۱۲۳	۳-۳-۲ صورت پیوستاری
۱۳۰	۴-۲ توابع نویمان، توابع نوع دوم بسل

۱۳۰	۲-۴-۱ توابع نویمان
۱۳۵	۲-۴-۲ شکل سری تابع نویمان
۱۳۶	۲-۴-۳ استقلال خطی جواب‌ها (رونسکین)
۱۳۹	۲-۴-۴ فرمول‌های رونسکین برای معادله بسل
۱۴۳	۲-۵ توابع هنکل
۱۴۶	۲-۶ توابع تعدیل یافته بسل
۱۴۶	۲-۶-۱ معادله بسل تعدیل یافته و توابع تعدیل یافته بسل، $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$
۱۵۱	۲-۶-۲ تابع مولد تابع تعدیل یافته بسل
۱۵۴	۲-۷ توابع کروی بسل
۱۵۴	۲-۷-۱ توابع کروی بسل
۱۵۶	۲-۷-۲ نمایش سری تابع کروی بسل
۱۵۷	۲-۷-۳ روابط بازگشتی برای توابع کروی بسل
۱۵۹	۲-۷-۴ عملگرهای بالا برنده و پائین آورنده برای توابع بسل کروی
۱۶۰	۲-۷-۵ تعامل توابع کروی بسل
۱۶۳	۲-۸ بسط مجانبی توابع بسل
۱۶۶	تمرین‌های فصل دوم

۱۶۹	فصل سوم. توابع لژاندر
۱۷۰	۳-۱ توابع لژاندر
۱۷۰	۳-۱-۱ الکتروستاتیک: مبنای فیزیکی توابع لژاندر
۱۷۱	۳-۱-۲ چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۷۶	۳-۱-۳ چند قطبی‌های الکتریکی خطی
۱۷۹	۳-۱-۴ تعمیم به چندجمله‌ای‌های فوق کروی
۱۷۹	۳-۲ روابط بازگشتی و خواص ویژه برای توابع لژاندر
۱۷۹	۳-۲-۱ روابط بازگشتی
۱۸۴	۳-۲-۲ معادله دیفرانسیل برای چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۸۵	۳-۲-۳ مقادیر خاص برای چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۸۶	۳-۲-۴ پارینته چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۸۷	۳-۲-۵ کران‌های بالا و پایین چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۸۸	۳-۳ تعامل توابع لژاندر
۱۹۹	۳-۴ سایر تعریف‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۹۹	۳-۴-۱ فرمول رودریگز
۲۰۱	۳-۴-۲ انتگرال اشلافی
۲۰۹	۳-۵ توابع وابسته لژاندر
۲۰۹	۳-۵-۱ معادله دیفرانسیل وابسته لژاندر
۲۱۱	۳-۵-۲ تابع مولد وابسته لژاندر
۲۱۲	۳-۵-۳ روابط بازگشتی برای توابع وابسته لژاندر
۲۱۲	۳-۵-۴ پارینته توابع وابسته لژاندر
۲۱۳	۳-۵-۵ تعامل توابع وابسته لژاندر
۲۱۸	۳-۵-۶ شکل رودریگز چند جمله‌ای‌های وابسته لژاندر
۲۲۰	۳-۵-۷ حل معادله لاپلاس در مختصات قطبی کروی
۲۳۷	۳-۶ هماهنگ‌های کروی

۲۳۷	۳-۶-۱ وابستگی سمتی تعامد
۲۳۷	۳-۶-۲ وابستگی زاویه قطبی
۲۳۸	۳-۶-۳ معادله دیفرانسیل هماهنگ‌های کروی
۲۴۰	۳-۶-۴ تعامد هماهنگ‌های کروی
۲۴۳	۳-۶-۵ قضیه جمع برای هماهنگ‌های کروی
۲۵۱	۳-۶-۶ روابط بازگشتی برای هماهنگ‌های کروی
۲۶۱	تمرین‌های فصل سوم
۲۶۵	فصل چهارم. توابع خاص
۲۶۶	۴-۱ تابع مولد چندجمله‌ای‌های هرمیت
۲۶۶	۴-۱-۱ رابط بازگشتی چندجمله‌ای‌های هرمیت
۲۷۳	۴-۱-۲ شکل سری توابع هرمیت
۲۸۰	۴-۱-۳ معادله دیفرانسیل هرمیت
۲۸۵	۴-۱-۴ حل معادله دیفرانسیل هرمیت به روش سری فروبنیوس
۲۹۵	۴-۱-۵ شکل رودریگز توابع هرمیت
۲۹۷	۴-۱-۶ شکل انتگرالی توابع هرمیت
۳۰۳	۴-۱-۷ تعامد و بهنجارش توابع هرمیت
۳۱۵	۴-۲ توابع لاگر
۳۱۵	۴-۲-۱ معادله دیفرانسیل لاگر و حل آن به روش سری فروبنیوس
۳۲۱	۴-۲-۲ چند جمله‌ای‌های وابسته لاگر
۳۳۶	۴-۲-۳ شکل انتگرالی چند جمله‌ای‌های لاگر و لاگر وابسته
۳۴۰	۴-۲-۴ تابع مولد چندجمله‌ای‌های لاگر و لاگر وابسته
۳۴۲	۴-۲-۵ شکل سری چندجمله‌ای‌های لاگر و لاگر وابسته
۳۵۷	۴-۲-۶ روابط بازگشتی برای چندجمله‌ای‌های لاگر و لاگر وابسته
۳۶۸	۴-۲-۷ شکل رودریگز چندجمله‌ای‌های لاگر
۳۷۰	۴-۲-۸ تعامد توابع لاگر و لاگر وابسته
۳۷۵	۴-۳ چندجمله‌ای‌های چیشیف
۳۷۶	۴-۳-۱ چندجمله‌ای‌های چیشیف نوع اول و دوم
۳۸۳	۴-۳-۲ معادله دیفرانسیل چیشیف
۳۸۵	۴-۳-۳ شرط تعامد چندجمله‌ای‌های چیشیف
۳۹۰	۴-۳-۴ چندجمله‌ای‌های چیشیف به عنوان حالات خاصی از چندجمله‌ای‌های فوق کروی
۳۹۳	۴-۳-۵ تابع مولد چندجمله‌ای‌های چیشیف
۳۹۶	۴-۳-۶ مقادیری خاص از چندجمله‌ای‌های چیشیف
۳۹۷	۴-۳-۷ روابط بازگشتی برای چندجمله‌ای‌های چیشیف
۳۹۸	۴-۳-۸ روابط پارته و نمایش رودریگز برای چندجمله‌ای‌های چیشیف
۳۹۹	۴-۳-۹ شکل مثلثاتی چندجمله‌ای‌های چیشیف
۴۰۲	۴-۳-۱۰ چندجمله‌ای‌های انتقال یافته چیشیف
۴۰۳	۴-۴ توابع فوق هندسی
۴۰۳	۴-۴-۱ معادله دیفرانسیل فوق هندسی
۴۰۶	۴-۴-۲ روابط تابع مجاور
۴۰۷	۴-۴-۳ نمایش‌های فوق هندسی

۴۱۱	۴-۴-۴ خواصّ تابع فوق هندسی
۴۱۱	۴-۴-۵ جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل فوق هندسی
۴۱۲	۴-۴-۶ نمایش انتگرالی توابع فوق هندسی
۴۱۳	۴-۴-۷ جواب‌های مختلف معادلهٔ دیفرانسیل فوق هندسی
۴۱۵	۴-۴-۸ تابع فوق هندسی همشار یا متلاقی
۴۱۶	۴-۴-۹ نمایش‌های انتگرالی تابع فوق هندسی همشار
۴۱۹	۴-۴-۱۰ نمایش توابع بسل و تعدیل‌یافته بسل برحسب تابع فوق هندسی همشار
۴۲۰	۴-۴-۱۱ نمایش توابع هرمیت برحسب تابع فوق هندسی همشار
۴۲۲	تمرین‌های فصل چهارم
۴۲۵	فصل پنجم. تبدیلات انتگرالی
۴۲۶	۵-۱ تبدیل‌های انتگرالی
۴۲۹	۵-۲ تبدیل انتگرالی فوریه
۴۳۲	۵-۲-۱ شکل نمایی انتگرال فوریه
۴۳۳	۵-۲-۲ نمایش انتگرال فوریهٔ تابع دلتای دیراک
۴۳۵	۵-۳ تبدیل فوریهٔ وارون
۴۳۵	۵-۳-۱ تعریف تبدیل فوریهٔ وارون
۴۳۷	۵-۳-۲ تبدیل کسینوسی فوریه
۴۳۸	۵-۳-۳ تبدیل سینوسی فوریه
۴۳۹	۵-۳-۴ قطار موج متناهی
۴۴۶	۵-۴ تبدیل فوریهٔ مشتق‌ها
۴۴۷	۵-۴-۱ تبدیل فوریهٔ معادلهٔ موج
۴۵۰	۵-۵ قضیهٔ پیچش و رابطهٔ پارسوال
۴۵۴	۵-۶ نمایش تکانه
۴۶۱	۵-۷ توابع انتقال
۴۶۶	۵-۸ تبدیل انتگرالی لاپلاس
۴۷۲	۵-۸-۱ تبدیل لاپلاس وارون
۴۷۷	۵-۸-۲ یافتن تبدیل لاپلاس وارون با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزئی
۴۸۳	تمرین‌های فصل پنجم
۴۸۷	مراجع

تقدیم به استاد فرزانه

دکتر مهدی گلشنی

مقدمه مؤلف

بی‌شک، ریاضی فیزیک یکی از اساسی‌ترین دروس رشته فیزیک به‌شمار می‌رود و یادگیری آن برای تمام کسانی که علاقه‌مند هستند به فهم دقیق و صحیحی از مسائل فیزیکی به‌ویژه در دروس الکترودینامیک و مکانیک کوانتومی دست‌یابند، ضروری است. کتابی که در پیش‌رو دارید، بر طبق سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فن‌آوری برای درس ریاضی فیزیک (۳) تنظیم شده است و تا حد امکان سعی بر این بوده است که تمامی روابط ریاضی به‌طور کامل و گام‌به‌گام اثبات شوند تا فرآیند یادگیری خودآموز این درس نسبتاً سنگین را به آسانی میسر سازند. لذا، روی سخن این کتاب با دانشجویانی است که حداقل دسترسی به کلاس و آموزش سنتی را دارند، اما شوق یادگیری چون چراغی راهنمای آنان در راه دشوار و شگفتی است که پاداش چالش در آن، مشاهده و درک مفاهیم فیزیکی زیبایی است که در پس پرده روابط غامض و مبهم ریاضی پنهان شده‌اند.

البته، مسلم است که این اثر خالی از نقص و اشکال نمی‌باشد و هرگونه نظر و پیشنهادی از سوی خوانندگان محترم در راستای رفع ایرادها و بهبود کمی و کیفی مطالب کتاب، موجب دل‌گرمی و استقبال مؤلف خواهد بود.^۱ توصیه مفید به خوانندگان

۱. خوانندگان گرامی می‌توانند نظرات و پیشنهادات خود را به آدرس fnphysics.com@gmail.com ارسال نمایند.

این است که پس از فراگیری مطالب این کتاب به سایر منابع موجود برای این درس مراجعه کرده و با مطالعه مطالب و حل مسائل بیشتر و متنوعی که به دلیل محدود بودن حجم این کتاب از بیان آنها صرف نظر گردیده است، عمق یادگیری خود را به ویژه در مسائل فیزیکی بیازمایند. لازم به ذکر است که حل برخی از تمرین ها و تعدادی آزمون تستی به همراه دو بخش ضمیمه به شکل CD به همراه کتاب درسی و یا به صورت فایل در وبسایت مربوط به بخش تدوین در اختیار دانشجویان قرار خواهد گرفت.

در پایان کلام، بر خود واجب می دانم که از دکتر مرتضی محسنی و دکتر احمد آخوند به خاطر راهنمایی های ارزنده شان در مراحل تألیف کتاب و از دکتر سعید محمدی که ویراستاری علمی این کتاب را با حوصله و دقت هرچه تمام بر عهده داشته اند، از عزیزان گرامی و ارجمندم مهندس سمیه دوشابچی ارشی، مهندس مهری تقی زاده انور، مهندس جواد جم آذری، مهندس حسین سیدی مسلمی، و مهندس محسن فتحی که در تمام مراحل تهیه، تنظیم و قالب بندی محتوای این کتاب به طور بی شائبه ای مرا یاری نموده اند، نیز از دوستان گرانقدرم دکتر محبوبه عبدالهی و دکتر معصومه عابدینی، و از اساتید بزرگوارم دکتر محمدعلی جعفری زاده، دکتر محمد مهرآفرین، دکتر محمد وحید تکوک، و دکتر پرویز حوائی که همواره مشوق من بوده اند، و به ویژه استاد فرزانه دکتر مهدی گلشنی که همواره شگفتی های دنیای فیزیک را به تصویر کشیده اند و از ایشان بسیار آموخته ام، قدردانی نموده و نهایت سپاس قلبی خود را ابراز نمایم.

هم چنین، از مدیریت محترم تدوین دکتر حسن صادقی، معاونت محترم تدوین آقای محمد رضا ثمری و نیز از و کارشناسان محترم تدوین آقای امیر عالی، خانم زینب حیدری عراقی، خانم خدیجه علی نژاد به خاطر زحمات بی دریغ شان در راستای چاپ این کتاب، کمال سپاسگزاری و امتنان را دارم.

با آرزوی توفیق

دکتر فرین پاینده

فصل اوّل

توابع گاما و بتا

نگاه کن و بهرس،

دوست بدار و گذشت کن،

یاد بگیر و پیش برو.

"یاکوب تراختبرگ"
ریاضی دان روسی

پیش گفتار

توابع گاما و بتا غالباً در مسائل فیزیکی نظیر بهنجارش توابع موج کولنی و محاسبه احتمالات در مکانیک آماری ظاهر می شوند. اهمیت این توابع از فوایدشان در بسط و گسترش سایر توابع نظیر توابع فوق هندسی، توابع خطا، تابع فاکتوریل، انتگرال های نمایی، انتگرال های دیریکله، توابع بیضوی، توابع تناوبی و... که همگی دارای کاربردهای مستقیم فیزیکی می باشند، سرچشمه می گیرد. معمولاً برای تابع گاما سه تعریف متفاوت و مناسب به کار می برند که این تعریف ها با یکدیگر هم ارزند. نخستین کار ما بیان این تعاریف، عنوان کردن برخی پیامدهای مستقیم و ساده آنها، و نشان دادن هم ارزی آنها است. تابع گاما، تابع فاکتوریل نیز خوانده می شود.

هدف های جزئی آموزشی

در این فصل به معرفی تابع گاما و بیان ویژگی های آن می پردازیم.

انتظار می رود دانشجو پس از مطالعه این فصل بتواند:

۱. سه تعریف هم ارز تابع گاما را بشناسد و در انجام محاسبات از آنها استفاده کند.
۲. روش های مربوط به محاسبه مشتق های تابع گاما (توابع دی گاما و پلی گاما) را بشناسد و در محاسبات به کار گیرد.
۳. تابع بتا و نمایش های متفاوت انتگرالی آن را بشناسد و در محاسباتی مثل به دست آوردن مقدار انتگرال ها از آن استفاده کند.

۱-۱ تعریف تابع گاما به صورت یک حد نامتناهی (نمایش حدی اویلر)
 نخستین تعریف از تابع گاما^۱، منسوب به اویلر^۲، به صورت یک حد نامتناهی عبارت
 است از:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+N)} \quad , \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (1)$$

که در آن، z می تواند یک متغیر حقیقی و یا مختلط باشد. تعریف بالا از $\Gamma(z)$ در بسط
 یکی از صورت های $\Gamma(z)$ به نام حاصل ضرب نامتناهی وایرشتراس^۳ و در محاسبه
 مشتق $\ln \Gamma(z)$ مفید واقع می شود. با جاگذاری $z+1$ به جای z ، خواهیم داشت:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^{z+1}}{(z+1)(z+1+1)(z+2+1) \dots (z+N+1)}$$

$$\Gamma(z+1) = \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+N)}}_{\Gamma(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z N}{z+N+1}$$

$$\Gamma(z+1) = \Gamma(z) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z N}{z+N+1} = \Gamma(z) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N z}{N \left(\frac{z}{N} + 1 + \frac{1}{N} \right)}$$

$$\Gamma(z+1) = \Gamma(z) \frac{z}{\frac{z}{\infty} + 1 + \frac{1}{\infty}} = \Gamma(z) \frac{z}{0 + 1 + 0} = \Gamma(z) z$$

و لذا:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (2)$$

این عبارت، رابطه اساسی تابع گاما به شمار می آید. بنابراین، به دست می آوریم:

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \times 1 = 2! = 2$$

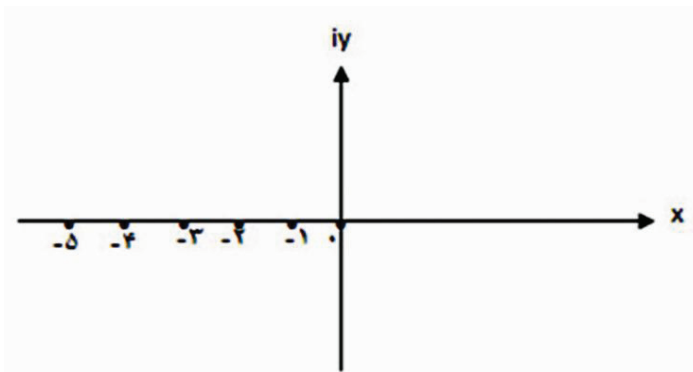
$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = (n-1)!$$

نکته: در تعریف حد نامتناهی اویلر برای تابع گاما به صورت زیر:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^z}{z(z+1) \dots (z+N)}$$

ملاحظه می‌کنیم که به ازای $z = 0$ و $z = -1, -2, \dots$ یعنی تمامی اعداد صحیح منفی، تابع گاما بی‌نهایت می‌شود و به عبارت دیگر تابع گاما در نقاط مزبور غیر تحلیلی است، اما در سایر نقاط صفحه مختلط تحلیلی می‌باشد. لذا بد نیست به این نکته اشاره کنیم که با مقایسه تعریف حد نامتناهی اویلر تابع گاما مطابق رابطه بالا و تعریف انتگرالی تابع گاما که به ازای $\text{Re } z > 0$ معتبر است و در ادامه به آن خواهیم پرداخت، ملاحظه می‌شود که نمایش حد نامتناهی تابع گاما ادامه تحلیلی نمایش انتگرالی آن است.

$$\text{Re } z = x, \quad z = x + iy$$

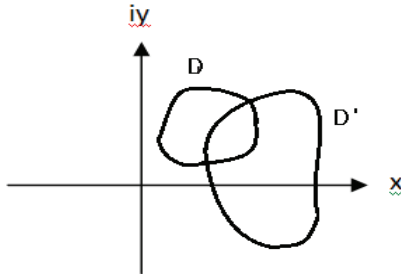


شکل (۱-۱): نقاط غیر تحلیلی تابع گاما در صفحه مختلط

یادآوری: فرض کنیم تابعی مانند $f(z)$ داشته باشیم که در ناحیه‌ای مانند D از صفحه مختلط، تحلیلی باشد. حال اگر تابع دیگری مانند $g(z)$ را بیابیم به گونه‌ای که این تابع علاوه بر ناحیه D ، در ناحیه D' نیز تحلیلی یا به عبارت دیگر تابع $g(z)$ در

ناحیه $D \cup D'$ تحلیلی باشد، آن‌گاه چنان چه برای هر z متعلق به ناحیه D داشته باشیم:

$$\forall z \in D: f(z) = g(z)$$



شکل (۲-۱): نواحی تحلیلی D و D' در صفحه مختلط

در این صورت خواهیم گفت $g(z)$ ادامه تحلیلی $f(z)$ در ناحیه D' است. یک تابع تحلیلی نیز تابعی است که به‌طور محلی به وسیله یک سری توانی همگرا مشخص می‌شود. به بیان دیگر، تابع f روی مجموعه باز D تحلیلی حقیقی است اگر برای هر x_0 در D بتوان نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

مثال: درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\pi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N!}{(2N+1)!!} \right]^2 2^{2N+2} N$$

حل: می‌دانیم که $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ است. حال، از تعریف حد نامتناهی اوایلر برای تابع گاما به‌ازای $z = \frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+N)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} + N\right)}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \sqrt{N}}{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right) \right] \frac{[3 \times 5 \dots (2N+1)]}{(2N+1)!!}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \sqrt{N}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^N (2N+1)!!}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! \sqrt{N}}{(2N+1)!!} 2^{N+1}$$

اکنون، طرفین رابطه بالا را به توان دو می‌رسانیم و خواهیم داشت:

$$\pi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N!}{(2N+1)!!} \right]^2 N 2^{2N+2}$$

۲-۱ تعریف تابع گاما به صورت یک انتگرال معین (نمایش انتگرالی اوایلر)

تعریف انتگرالی تابع گاما، که باز هم در موارد فراوانی به نام تعریف انتگرالی اوایلر خوانده می‌شود، عبارت است از:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{با شرط } Re\ z > 0$$

انتگرال بالا یک انتگرال حقیقی است و فقط بر روی صفحه حقیقی مثبت تعریف می‌شود و در منطقه با $Re\ z > 0$ تحلیلی است و بی‌نهایت نمی‌شود. یعنی هنگامی می‌توانیم گامای z را مطابق رابطه بالا تعریف کنیم که قسمت حقیقی z مثبت باشد و در صورتی که قسمت حقیقی z منفی باشد، آن‌گاه $\Gamma(z)$ بی‌نهایت خواهد بود. بنابراین، تابع $\Gamma(z)$ طبق نمایش انتگرالی بالا، تنها در نیمه راست صفحه مختلط تحلیلی می‌باشد. برای این که نشان دهیم تعریف انتگرالی تابع گاما فقط به‌ازای نواحی با $Re\ z > 0$ صحیح می‌باشد، انتگرال بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(z) \equiv \underbrace{\int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt}_{(I)} + \underbrace{\int_a^b e^{-t} t^{z-1} dt}_{(II)} + \underbrace{\int_b^\infty e^{-t} t^{z-1} dt}_{(III)}$$

در رابطه بالا جمله دوم یعنی انتگرال (II) در فاصله a و b همواره وجود دارد و دارای مقدار معینی است. می‌توانیم نشان دهیم که جمله (III) نیز دارای مقدار محدودی است و نمی‌تواند بی‌نهایت شود و لذا بی‌نهایت شدن $\Gamma(z)$ به‌ازای مقادیر خاصی از z ، به خاطر جمله (I) است که آن نیز ناشی از حد پایین انتگرال جمله (I) می‌باشد. برای اثبات محدود بودن مقدار جمله (III) کافی است نشان دهیم که قدرمطلق آن از یک عدد معین کوچکتر است. لذا، می‌توان نوشت:

$$|AB| \leq |A||B|, \quad z = x + iy$$

$$\left| \int_b^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| = \left| \int_b^\infty e^{-t} t^{x+iy-1} dt \right|$$

$$\left| \int_b^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_b^\infty \underbrace{|e^{-t}|}_{e^{-t}} \underbrace{|t^{x-1}|}_{t^{x-1}} \underbrace{|t^{iy}|}_1 \underbrace{|dt|}_{dt}$$

زیرا:

$$|t^{iy}| = t^{iy} (t^{iy})^* = t^{iy} t^{-iy} = 1$$

بنابراین، به‌دست می‌آوریم:

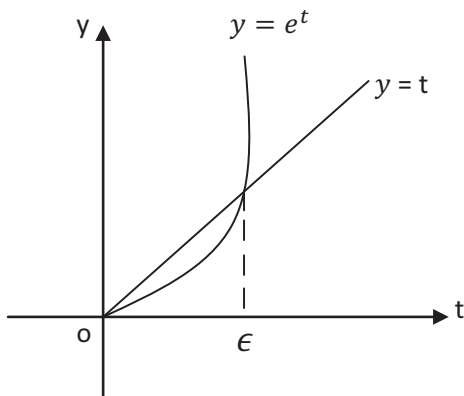
$$\left| \int_b^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \underbrace{\int_b^\infty e^{-t} t^{x-1} dt}_{(*)}$$

اکنون، مطمئن هستیم که حاصل انتگرال سمت راست یک عدد حقیقی است و کافی است یک برآورد عددی برای حاصل آن بنمائیم و به‌این نتیجه برسیم که قدر مطلق جمله (III) از یک مقدار عددی معین کوچک‌تر است و لذا حاصل آن یک مقدار محدود می‌باشد. بدین منظور انتگرال سمت راست در نامساوی بالا را در نظر می‌گیریم:

$$(*) = \int_b^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

برای نشان دادن همگرایی انتگرال بالا، می‌توانیم از مقایسه همگرایی تابع توانی

t^{x-1} با یک تابع نمایی مانند $e^{\beta t}$ استفاده کنیم. چنانچه می‌دانیم، سرعت همگرایی تابع نمایی به مراتب بیشتر از تابع توانی است. به‌عنوان مثال، اگر نمودار توابع $y = e^t$ و $y = t$ را رسم کنیم:



نمودار این دو تابع در نقطه‌ای مانند $t = \epsilon$ یکدیگر را قطع می‌کنند. همان‌گونه که از شکل بالا ملاحظه می‌شود، در تمامی بازه از 0 تا ϵ ، تابع توانی $y = t$ بزرگ‌تر از تابع نمایی $y = e^t$ است ولی پس از نقطه ϵ موضوع برعکس می‌شود و تابع نمایی بر هر تابع توانی غلبه می‌کند. در واقع، همواره نقطه‌ای به مختصه $t = \epsilon$ پیدا می‌شود به‌گونه‌ای که تابع نمایی در آن نقطه تابع توانی را قطع نماید و پس از آن نقطه به‌ازای t های بزرگ‌تر از ϵ ، تابع نمایی بزرگ‌تر از تابع توانی گردد. زیرا، داریم:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

در بسط تابع نمایی e^x برحسب توابع توانی، واضح است که وقتی $n \rightarrow \infty$ میل کند، آنگاه پس از نقطه‌ای مانند $t = \epsilon$ ، تابع نمایی بر هر تابع توانی غلبه کند. در نقطه تلاقی دو منحنی تابع توانی و تابع نمایی می‌توان نوشت:

$$[t^{x-1} = e^{\beta t}]_{t=\epsilon} \rightarrow \epsilon^{x-1} = e^{\beta \epsilon}$$

بنابراین، ϵ از رابطه بالا به‌دست می‌آید. اکنون، به‌ازای $t \geq \epsilon$ می‌توان نوشت:

$$t^{x-1} \leq e^{at}$$

لذا، خواهیم داشت:

$$\left| \int_b^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_b^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_b^\infty e^{-t} t^{\alpha t} dt \quad (۱)$$

محدودیت می‌گذاریم که $0 < \alpha < 1$ باشد. در این صورت، به‌دست می‌آوریم:

$$\int_b^\infty e^{-t} e^{\alpha t} dt = \int_b^\infty e^{(\alpha-1)t} dt = \left[\frac{1}{\alpha-1} e^{(\alpha-1)t} \right]_b^\infty$$

$$\int_b^\infty e^{-t} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha-1} \underbrace{e^{(\alpha-1)\infty}}_{=0} - \frac{1}{\alpha-1} e^{(\alpha-1)b}$$

و چون $0 < \alpha < 1$ است، لذا $(\alpha-1)$ یک مقدار منفی است و داریم:

$$e^{(\alpha-1)\infty} \simeq e^{-\infty} = 0$$

$$\int_b^\infty e^{-t} e^{\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha-1} e^{(\alpha-1)b} \quad (۲)$$

لذا، از مقایسه روابط (۱) و (۲)، به‌دست می‌آوریم:

$$\left| \int_b^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \frac{1}{1-\alpha} e^{(\alpha-1)b}$$

و یا:

$$|(III)| \leq \text{یک مقدار عددی معین}$$

بنابراین، ثابت کردیم که حاصل جمله (III) نیز مقدار محدودی می‌باشد. اکنون، می‌خواهیم نشان دهیم که جمله (I) یعنی عبارت $\int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt$ مشکل‌آفرین است. بدین منظور، قدرمطلق جمله مزبور را محاسبه می‌کنیم و با بردن قدر مطلق به داخل انتگرال به‌دست می‌آوریم:

$$\left| \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt$$

با افزایش t از صفر، e^{-t} از یک کوچک ترمی شود. بنابراین، اگر به‌جای e^{-t} حداکثر مقدار آن، یعنی یک (به‌ازای $t=0$)، را قرار دهیم، آن‌گاه حاصل عبارت انتگرال سمت راست را باز هم بزرگ‌تر کرده‌ایم. بنابراین، می‌توان نوشت:

توابع گاما و بتا ۹

$$e^{-t} = e^0 = 1 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \text{به ازای}$$

$$\left| \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^a e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^a t^{x-1} dt$$

$$\int_0^a t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_0^a = \frac{1}{x} a^x - \frac{1}{x} (0)^x$$

یعنی:

$$\left| \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \frac{1}{x} (a^x - 0^x)$$

حال اگر در سمت راست نامساوی فوق x منفی باشد، آن گاه صفر به توان یک عدد منفی مساوی بی نهایت می شود. یعنی، داریم:

$$\left| \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \infty \quad \rightarrow \quad Re \ z < 0 \quad \text{یا} \quad x < 0 \quad \text{به ازای}$$

پس، به ازای $x < 0$ یا $Re \ z < 0$ نمی توانیم نتیجه بگیریم که عبارت (I) کوچک تر از یک مقدار حقیقی است:

$$Re \ z < 0 \quad \rightarrow \quad |(I)| \leq \infty$$

بنابراین، نمایش انتگرالی تابع گاما به ازای $Re \ z > 0$ صحیح است. حتی اگر $x = 0$ یعنی $Re \ z = 0$ باشد، باز هم 0^0 (صفر به توان صفر) جزو صور مبهم است و لذا تابع گاما تعریف نمی شود.

مثال ۱: با استفاده از نمایش انتگرالی تابع گاما، درستی رابطه $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ را نشان دهید.

حل:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \int_0^\infty t^z (e^{-t} dt)$$

$$\int_0^{\infty} t^z (-de^{-t}) = - \int_0^{\infty} \underbrace{t^z}_{u} \underbrace{(de^{-t})}_{dv}$$

با استفاده از انتگرال گیری به روش جزء به جزء داریم:

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\begin{cases} u = t^z \rightarrow du = z t^{z-1} dt \\ dv = de^{-t} \rightarrow v = e^{-t} \end{cases}$$

$$\Gamma(z+1) = - \left[\underbrace{t^z e^{-t}}_{(*)} - \int e^{-t} z t^{z-1} dt \right]_0^{\infty}$$

$$\text{جمله اول} = (*) = [t^z e^{-t}]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^z e^{-t} - \lim_{t \rightarrow 0} t^z e^{-t} = 0 - 0 = 0$$

چون تابع نمایی e^{-t} به ازای $t \rightarrow \infty$ سریع تر از تابع توانی t^z به سمت صفر میل می کند، لذا حاصل جمله اول برابر صفر خواهد بود. بنابراین، به دست می آوریم:

$$\Gamma(z+1) = - \left[0 - \int_0^{\infty} e^{-t} z t^{z-1} dt \right] = z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z)$$

پس:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

مثال ۲: ثابت کنید به ازای $Re \, z > 0$ ، نمایش انتگرالی و نمایش حد نامتناهی برای تابع گاما با یکدیگر هم ارزند.

حل: به طوری که قبلاً نیز ذکر شد، نمایش حد نامتناهی برای تابع گاما، ادامه تحلیلی نمایش انتگرالی آن است. اکنون، می خواهیم از نمایش انتگرالی تابع گاما به نمایش حد نامتناهی آن برسیم. بدین منظور، لازم است که تغییر متغیر ساده ای را انجام دهیم. داریم:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad , \quad Re \, z > 0$$

حال، به جای e^{-t} فرمول زیر را که از ریاضیات عمومی می دانیم، جاگذاری می کنیم:

$$e^{-t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N$$

یعنی، داریم:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt$$

با تغییر متغیری به شکل زیر:

$$\frac{t}{N} = u \rightarrow t = Nu \rightarrow dt = N du$$

و با جاگذاری در $\Gamma(z)$ ، به دست می آوریم:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-u)^N (Nu)^{z-1} N du$$

با انجام تغییر متغیر از t به u ، حدود انتگرال از 0 تا ∞ به 0 تا 1 تبدیل می شود. زیرا:

$$t = Nu \rightarrow u = \frac{t}{N} \rightarrow \begin{cases} t = 0 & \rightarrow u = 0 \\ t = \infty & \rightarrow u = 1 \end{cases}$$

که N عدد صحیحی است که به بی نهایت میل می کند. خواهیم داشت:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-u)^N N^{z-1} u^{z-1} N du = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \int_0^1 (1-u)^N u^{z-1} du$$

حال، برای این که بتوانیم جملات موجود در مخرج عبارت تابع گاما در نمایش حد نامتناهی آن را ظاهر کنیم، از انتگرال گیری به روش جزء به جزء استفاده می کنیم. ابتدا، رابطه بالا را در یک z ضرب و تقسیم می نماییم:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z}{z} \int_0^1 \underbrace{(1-u)^N}_t \underbrace{z u^{z-1} du}_{dv} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z}{z} \int_0^1 \underbrace{(1-u)^N}_t \underbrace{d(u^z)}_{dv}$$

$$\text{انتگرال گیری جزء به جزء: } \int t dv = t v - \int v dt$$

$$\begin{cases} (1-u)^N = t & \rightarrow N(1-u)^{N-1} du = dt \\ \int z u^{z-1} du = dv & \rightarrow \int z u^{z-1} dv = \int dv \rightarrow u^z = v \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z}{z} \left[(1-u)^N u^z - \int_0^1 u^z N(1-u)^{N-1} dt \right]_0^1$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z}{z} \left[(1-1)^N 1^z - (1-0)^N \times 0^N - N \int_0^1 u^z (1-u)^{N-1} dt \right]$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z}{z} N \int_0^1 u^z (1-u)^{N-1} dt \times (-1)$$

حال، طرفین رابطه بالا را در یک $z+1$ ضرب و تقسیم می‌کنیم تا دوباره بتوانیم از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء استفاده کنیم:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z}{z} N \frac{1}{z+1} \int_0^1 u^z (1-u)^{N-1} (z+1) dt \times (-1)$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{1}{z+1} \int_0^1 \underbrace{(1-u)^{N-1}}_t \underbrace{(z+1)u^z du}_{dv} \times (-1)$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{(-1)}{z+1} \int_0^1 \underbrace{(1-u)^{N-1}}_t \underbrace{d(u^{z+1})}_{dv}$$

$$\begin{cases} (1-u)^{N-1} = t & \rightarrow (N-1)(1-u)^{N-2} du = dt \\ (z+1)u^z du = dv & \rightarrow \int (z+1)u^z dv = \int dv \rightarrow u^{z+1} = v \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{(-1)}{z+1} \left[(1-u)^{N-1} u^{z+1} - \int_0^1 u^{z+1} (N-1)(1-u)^{N-2} du \right]_0^1$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{(-1)}{z+1} \left[\underbrace{(1-1)^{N-1} \times 1^{z+1}}_{=0} - \underbrace{(1-0)^{N-1} \times 0^{z+1}}_{=0} - \int_0^1 u^{z+1} (N-1)(1-u)^{N-2} du \right]$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{N-1}{z+1} \int_0^1 (1-u)^{N-2} u^{z+1} du$$

اکنون، طرفین رابطه بالا را در $z+2$ ضرب و تقسیم می‌کنیم تا دوباره بتوانیم از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء استفاده کنیم:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{N-1}{z+1} \frac{1}{z+2} \int_0^1 \underbrace{(1-u)^{N-2}}_t \underbrace{(z+2) u^{z+1} du}_{dv}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{N-1}{z+1} \frac{1}{z+2} \int_0^1 \underbrace{(1-u)^{N-2}}_t \underbrace{d(u^{z+2})}_{dv}$$

$$\begin{cases} (1-u)^{N-2} = t & \rightarrow (N-2)(1-u)^{N-3} du = dt \\ (z+2) u^{z+1} du = dv & \rightarrow \int (z+2) u^{z+1} du = \int dv \rightarrow u^{z+2} = v \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{(N-1)}{z+1} \frac{1}{z+2} \left[(1-u)^{N-2} u^{z+2} - \int u^{z+2} (N-2)(1-u)^{N-3} du \right]_0^1$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{(N-1)}{z+1} \frac{1}{z+2} \left[- \int_0^1 u^{z+2} (N-2)(1-u)^{N-3} du \right]$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \frac{N}{z} \frac{N-1}{z+1} \frac{N-2}{z+2} (-1) \int_0^1 (1-u)^{N-3} u^{z+2} du$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌کنیم ما تا این مرحله سه بار انتگرال‌گیری جزء به جزء را انجام داده‌ایم و در نتیجه این کار توان $(1-u)$ به $N-3$ کاهش یافته و توان u به $z+2$ افزایش یافته است. یعنی، داریم:

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^z \int_0^1 (1-u)^N u^{z-1} du$$