



دانشگاه سям نور

ریاضیات پایه

(رشته حسابداری، مدیریت و علوم اجتماعی)

لیدا فرخو

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

پیشگفتار

فصل اول. نظریه مجموعه‌ها

۱	
۲	۱-۱ مفهوم مجموعه
۱۳	۲-۱ اعمال جبری روی مجموعه‌ها
۲۴	۳-۱ حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها
۲۶	۴-۱ تعداد عضوها و افراز یک مجموعه

فصل دوم. دستگاه‌های مختصات

۳۵	
۳۶	۱-۲ دستگاه مختصات دکارتی
۴۳	۲-۲ معامله و نمودار خط
۵۶	۳-۲ دستگاه مختصات قطبی

فصل سوم. رابطه و تابع

۶۹	
۷۰	۱-۳ رابطه
۷۲	۲-۳ تابع
۸۰	۳-۳ جبر توابع
۸۵	۴-۳ توابع جبری
۹۱	۵-۳ توابع غیرجبری
۱۰۶	۶-۳ توابع خاص
۱۱۶	۷-۳ تابع وارون

فصل چهارم. حد و پیوستگی توابع

۱۳۱	
۱۳۲	۱-۴ حد تابع
۱۳۶	۲-۴ قضایایی درباره حد تابع
۱۴۶	۳-۴ حدهای یک‌طرفه

۱۵۲	۴-۴ حدهای بی‌نهایت
۱۵۹	۵-۴ حد در بی‌نهایت
۱۶۹	۶-۴ پیوستگی توابع

۱۸۵	فصل پنجم. مشتق
۱۸۶	۱-۵ مفهوم مشتق
۱۹۶	۲-۵ قضیه‌های مشتق
۲۰۳	۳-۵ مشتق توابع مثلثاتی
۲۰۶	۴-۵ مشتق وارون تابع
۲۰۹	۵-۵ مشتق توابع لگاریتمی و نمایی
۲۱۴	۶-۵ مشتق مرتبه‌های بالاتر
۲۱۶	۷-۵ دیفرانسیل

۲۳۱	فصل ششم. کاربردهای مشتق
۲۳۲	۱-۶ توابع صعودی و نزولی
۲۳۳	۲-۶ ماکسیموم و مینیموم تابع
۲۴۸	۳-۶ تقعر و تحدب و نقطه عطف نمودار تابع
۲۵۴	۴-۶ رسم نمودار یک تابع
۲۶۵	۵-۶ صورت‌های مبهم

۲۸۳	پیوست‌ها
۲۸۳	الف) الفبای یونانی
۲۸۴	ب) جدول اعداد نمایی
۲۸۵	ج) جدول لگاریتم طبیعی
۲۸۸	د) جدول توابع مثلثاتی
	ه) جدول مشتق‌ها
	فهرست منابع

پیشگفتار

این کتاب براساس آخرین سرفصل‌های مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری و با توجه به دانش ریاضی دانشجویان دوره کارشناسی رشته‌های حسابداری، مدیریت، اقتصاد و علوم اجتماعی تدوین شده است. در این کتاب، که تجدیدنظر شده متن قبلی است، سعی شده است که حتی‌الامکان از نظرات، انتقادات و پیشنهادات مدرسان محترم و دانشجویان گرامی استفاده شود.

این کتاب مشتمل بر شش فصل و چندین بخش است. تمرین‌ها در واقع از مهم‌ترین وسایل ارزیابی آموخته‌ها هستند و بنابراین اهمیت خاصی دارند. حل کامل تمرین‌هایی را که در لابه‌لای متن ارائه شده‌اند در کتاب دیگری با عنوان «پاسخ به سؤالات و حل مسائل متن ریاضیات پایه» آورده‌ایم. البته باید سعی کنید این تمرین‌ها را خودتان حل کنید و سپس برای اطمینان از درستی آنها، به کتاب یاد شده مراجعه کنید. در انتهای هر فصل نیز تمرین‌های گوناگونی آورده‌ایم که در کتاب «حل مسائل» تنها به ذکر پاسخ صحیح آنها اکتفا شده است.

لازم است بار دیگر توجه دانشجویان را به این نکته جلب کنم که مسئله‌ها و تمرین‌ها در یادگیری علم ریاضی، به‌ویژه حساب دیفرانسیل و انتگرال، نقش اساسی دارند. بنابراین کسب مهارت در ریاضیات جز یا حل تمرین و مسئله میسر نیست.

لیدا فرخو

دانشگاه علامه طباطبائی

۱۳۷۷

راهنمای مطالعه

برای فراگیری بهتر مطالب این کتاب به نکات زیر توجه فرمایید.

هدف کلی درس

هدف کلی این درس آموزش مباحثی از ریاضیات است که دانشجویان رشته‌های علوم انسانی در دروس تخصصی خود به آنها نیاز خواهند داشت.

مباحث کتاب

برای نیل به هدف کلی، مباحث زیر در شش فصل تدوین شده است.

فصل اول. نظریه مجموعه‌ها

فصل دوم. دستگاه‌های مختصات

فصل سوم. رابطه و تابع

فصل چهارم. حد و پیوستگی توابع

فصل پنجم. مشتق

فصل ششم. کاربردهای مشتق

در آغاز هر فصل نکاتی به‌عنوان راهنمای مطالعه و هدف کلی آمده است، که به شما کمک می‌کند تا منظور کل آن فصل را دریابید، در قسمتی که با عنوان هدف‌های رفتاری و آموزشی مشخص شده است، از شما انتظار می‌رود که پس از پایان مطالعه هر

فصل مطالبی را که یاد گرفته‌اید با توجه به هدف‌های رفتاری بسنجید. یادگیری می‌تواند مثلاً بیان یک مفهوم، مقایسهٔ دو مفهوم با یکدیگر، توضیح یک قضیه، نتیجه‌گیری از یک مطلب، یا حل یک مسئله باشد. نظر به پیوستگی مفاهیم ریاضی، تا زمانی که به همه هدف‌های رفتاری یک فصل نایل نشده‌اید، و مسائل آن فصل را حل نکرده‌اید به فصل بعدی نپردازید. در صورت لزوم دوباره به متن درس رجوع کنید و مطالب آن را مرور کنید تا مطمئن شوید که برای پاسخگویی به هدف‌های رفتاری و حل مسائل انتهای فصل آمادگی دارید. برای راهنمایی بیشتر توصیه می‌شود که پیشگفتار مؤلف را به دقت بخوانید.

فصل اول

نظریهٔ مجموعه‌ها

هدف کلی

هدف کلی فصل این است که با مفهوم مجموعه، انواع آن، اعمال جبری روی مجموعه‌ها و ویژگی‌های این اعمال آشنا شوید.

هدف‌های رفتاری

- از شما انتظار می‌رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:
۱. مجموعه را شناسایی کنید.
 ۲. عضوهای مجموعه‌های داده شده را تعیین کنید.
 ۳. زیرمجموعه‌های هر مجموعه داده شده را بیابید.
 ۴. مجموعه تهی را شناسایی کنید و مثال‌هایی از مجموعه تهی بیاورید.
 ۵. اعمال جبری روی مجموعه‌ها را تعریف کنید و برای مجموعه‌های داده شده، اعمال موردنظر را انجام بدهید.
 ۶. بازه‌های باز و بسته را تشخیص دهید و آنها را به صورت مجموعه نمایش دهید.
 ۷. مفهوم مجموعه جهانی را توضیح دهید.
 ۸. مکمل هر مجموعه را نسبت به مجموعه جهانی داده شده، تعیین کنید.
 ۹. ویژگی‌های اعمال جبری روی مجموعه‌ها را بیان کنید و در مسال به کار ببرید.
 ۱۰. قوانین «دمورگان» را بیان کنید و در مسائل به کار ببرید.
 ۱۱. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه را بیان کنید و آن را برای مجموعه‌های داده شده

محاسبه کنید.

۱۲. تعداد عناصر هر مجموعه متناهی داده شده را تعیین کنید.

مقدمه

مجموعه یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم در ریاضیات است و غالباً نقطه آغازی برای ریاضیات پایه و کاربردهای آن در بسیاری از علوم محسوب می‌شود. مثلاً، در رشته مدیریت در موارد بسیاری صحبت از مجموعه تولیدات یک کارخانه، یا مجموعه کارگران یک کارگاه، یا مجموعه تصمیم‌های ممکن برای مدیر یک واحد و نظایر آن به میان می‌آید. برای درک بسیاری از مطالب ارائه شده در این کتاب، آشنایی با تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌ها ضروری است. در این فصل، مفهوم بنیادی مجموعه و اعمال جبری روی مجموعه‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱-۱ مفهوم مجموعه

۱-۱-۱ مفهوم شهودی مجموعه: مفهوم ریاضی یک مجموعه با مفهوم شهودی (عادی یا روزمره) آن تفاوت دارد. یک مجموعه از نظر ریاضی هنگامی معین است که اشیای تشکیل‌دهنده آن کاملاً مشخص باشند. به بیان دیگر هنگامی که برای هر شیء به دقت بتوان تعیین کرد که آن شیء به آن مجموعه تعلق دارد یا تعلق ندارد.

برای مثال، «مجموعه» دانشجویان رشته مدیریت دانشگاه‌های ایران یک مجموعه ریاضی نیز هست، زیرا دقیقاً می‌توان تک‌تک این افراد را مشخص کرد. ولی دسته دانشجویان باهوش دانشگاه تهران در سال جاری، مجموعه نیست، چون باهوش بودن یک صفت نسبی است (مطلق نیست)؛ یعنی دقیقاً نمی‌توان تعیین کرد که دانشجویی باهوش است، یا خیر. در نتیجه افراد تشکیل‌دهنده این دسته معین نیستند.

به‌طور کلی، صفاتی مانند مهارت، تبحر، زیبایی، زشتی، کوچکی، بزرگی، خوشمزدگی و خوش سلیقگی و... که تعریف دقیقی ندارند، نمی‌توانند مشخص‌کننده یک مجموعه باشند.

هر شیء متعلق به یک مجموعه را **عضو** یا **عنصر** آن مجموعه می‌نامیم.

۱-۱-۲ مثال: هر یک از دسته‌های زیر، یک مجموعه است:

(الف) دسته اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰.

(ب) دسته حروف الفبای زبان فارسی.

(پ) دسته روزهای هفته.

(ت) آن دسته از دانشجویان دانشگاه پیام‌نور که سن آنها کمتر از ۲۵ است.

(ث) دسته پایتخت‌های کشورهای آسیایی.

(ج) دسته کتاب‌های درسی سال اول ابتدایی.

(چ) دسته شهرهای کشور جمهوری اسلامی ایران.

(ح) دسته حروف کلمه دانش.

(خ) دسته سیارات منظومه شمسی.

(د) دسته گیاهان یکساله ایران.

(ذ) دسته جانوران گیاهخوار.

۱-۱-۳ قرارداد: اگر x عضوی از مجموعه S باشد، می‌نویسیم:

$$x \in S$$

و می‌خوانیم « x متعلق به مجموعه S است» یا « x عضوی از S است» یا، به‌طور

خلاصه، « x در S است». نقیض $x \in S$ را با نماد

$$x \notin S$$

نشان می‌دهیم و می‌خوانیم « x عضو S نیست» یا « x به S تعلق ندارد» یا، به‌طور

خلاصه، « x در S نیست».

از این پس مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A, B, C, D و... و

عضوهای آنها را با حروف کوچک لاتین نظیر a, b, c, d و... نشان خواهیم داد.

۱-۱-۴ نکته: مجموعه S زمانی معین است که برای هر شیء x بتوان تشخیص داد که

x به S تعلق دارد یا نه.

۱-۱-۵ تمرین: کدام یک از گروه‌های زیر مجموعه است.

الف) کارگران کارخانه پارس خودرو.

ب) دانش‌آموزان دبستان معلم شهید.

پ) دانشجویان سال تحصیلی آینده دانشگاه پیام‌نور.

ت) کتاب‌های خوب چاپ شده در سال ۱۳۶۸.

پاسخ خود را با [۱-۱-۵] مقایسه کنید.

۱-۱-۶ نمایش مجموعه‌ها: برای نمایش یک مجموعه تمام عضوهای آن را، که با

علامت «،» از هم جدا کرده‌ایم، در داخل ابرو می‌آوریم:

$$A = \{۲, ۴, ۶, ۸\} \quad , \quad S = \{۵, ۸, ۲۶, ۷۳\}$$

توجه کنید که ترتیب نوشتن اعضای مجموعه، اهمیتی ندارد. برای مثال دو مجموعه

$$\{۱, ۲, ۳\} \quad \{۳, ۱, ۲\}$$

در واقع یک مجموعه را نمایش می‌دهند.

در مواردی که نوشتن تمام عضوهای یک مجموعه غیرعملی باشد، مانند

مجموعه تمرین ۱-۱-۵ (ب)، معمولاً عضوها را می‌توانیم برحسب خاصیت مشترکی

معین کنیم. فرض می‌کنیم گزاره $P(x)$ بیان‌کننده این خاصیت مشترک مربوط به x باشد.

در این صورت اگر مجموعه S شامل تمام x هایی باشد که به ازای آنها گزاره $P(x)$

درست است، می‌نویسیم:

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

مانند

$$A = \{x \in Q \mid (۲x - ۱)(۳x + ۴) = ۰\}$$

۱-۱-۷ مثال: الف) مجموعه اعداد اول بین ۱ تا ۳۰ را می‌توان به صورت

$$\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹\}$$

نشان داد.

ب) مجموعه ریشه‌های حقیقی معادله جبری $x^2 + ۴x - ۱ = ۰$ را می‌توانیم

به صورت زیر بنویسیم

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + ۴x - ۱ = ۰\}$$

پ) مجموعه اعداد صحیح فرد و مثبت را می‌توانیم به هر یک از صورت‌های زیر نشان بدهیم:

$$\{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$$

یا

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

۸-۱-۱ تمرین: عضوهای هر یک از مجموعه‌های مشخص شده در زیر را در داخل ابرو بنویسید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی زوج کمتر از ۱۵.

ب) مجموعه تمام ریشه‌های معادله جبری $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$.

پ) مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت ناکمتر از ۷.

ت) مجموعه تمام اعداد گویا.

پاسخ خود را با [۸-۱-۱] مقایسه کنید.

۹-۱-۱ تمرین: عضوهای هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) مجموعه تمام عامل‌ها (مقسوم‌علیه‌های) اول عدد ۱۵.

ب) مجموعه تمام ریشه‌های معادله جبری $(x-1)(x+3)(x+5) = 0$.

پ) مجموعه تمام اعداد صحیح بین $1/5$ تا $6/5$.

پاسخ خود را با [۹-۱-۱] مقایسه کنید.

مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) مجموعه تمام اعداد صحیح x به‌طوری که داشته باشیم $5x = 1$.

ب) مجموعه تمام ریشه‌های حقیقی معادله جبری $x^2 + 1 = 0$.

توجه کنید که مجموعه‌های داده شده در (الف) و (ب) دارای هیچ عضوی نیستند، زیرا هیچ عدد صحیحی نمی‌توانیم پیدا کنیم که وقتی در ۵ ضرب شود برابر یک شود. هم‌چنین، به ازای هر عدد حقیقی x ، همواره داریم

$$x^2 + 1 \geq 1$$

به مجموعه‌هایی که دارای هیچ عضوی نباشند، نام خاصی داده می‌شود. به

تعریف زیر توجه کنید.

۱-۱-۱۰ تعریف: مجموعه S را تهی می‌نامیم، اگر و تنها اگر دارای هیچ عضوی نباشد. مجموعه تهی را معمولاً با حرف یونانی $\emptyset$ (فی) نشان می‌دهیم. بنابراین نماد

$$S = \emptyset$$

«مجموعه S تهی است» خوانده می‌شود.

اگر مجموعه S تهی نباشد، می‌نویسیم

$$S \neq \emptyset$$

و می‌خوانیم « S تهی نیست» یا « S ناتهی است». در نتیجه، $S \neq \emptyset$ خواهد بود. اگر و تنها اگر حداقل دارای یک عضو باشد.

۱-۱-۱۱ تمرین: نشان بدهید که هر یک از مجموعه‌های زیر تهی است.

$$\text{الف) } \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 2x = 1\}$$

ب) مجموعه تمام اعداد حقیقی x که در دو شرط $x < -1$ و $2 < x$ صدق می‌کند.

پ) مجموعه تمام اعداد گویای x به‌طوری‌که داشته باشیم $x^2 = 3$.

ت) مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت x به‌گونه‌ای که 3^x بر عدد ۵ بخش‌پذیر باشند.

پاسخ خود را با [۱-۱-۱۱] مقایسه کنید.

۱-۱-۱۲ تعریف: مجموعه S را یک مجموعه یکانی می‌نامیم، اگر و تنها اگر فقط دارای یک عضو باشد. برای مثال، هر یک از مجموعه‌های زیر یکانی‌اند:

$$\{a\}, \quad \{0\}, \quad \{-\sqrt{3}\}, \quad \{2\}$$

۱-۱-۱۳ تعریف: دو مجموعه A و B را در نظر می‌گیریم. اگر هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B هم باشد، A را یک زیر مجموعه B می‌نامیم و با نماد

$$A \subseteq B$$

نشان می‌دهیم و می‌خوانیم « A زیر مجموعه‌ای از B است» یا « B شامل A است». نماد $\subseteq$ را علامت شمول یا جزئیت می‌گوییم.

در صورتی که A زیر مجموعه‌ای از B نباشد، می‌نویسیم

$$A \not\subseteq B$$

۱-۱-۱۴ تعریف: فرض می‌کنیم مجموعه A زیر مجموعه‌ای از مجموعه B باشد. اگر B حداقل یک عضو داشته باشد که در مجموعه A نباشد، آنگاه مجموعه A را یک زیرمجموعه سره B می‌نامیم و با نماد زیر نشان می‌دهیم.

$$A \subset B$$

در صورتی که مجموعه A زیرمجموعه سره B نباشد می‌نویسیم

$$A \not\subset B$$

۱-۱-۱۵ مثال: مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x \leq 100\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x \leq 50\}$$

روشن است که هر عضو مجموعه B به مجموعه A نیز تعلق دارد. پس

$$B \subseteq A$$

از طرفی $80 \in A$ ولی $80 \notin B$ ، پس B یک زیرمجموعه سره A است، یعنی

$$B \subset A$$

اکنون فرض می‌کنیم که

$$C = \{x \mid x \leq 720, x \text{ عدد صحیح مثبتی است که بر } 4 \text{ بخش پذیر است}\}$$

C زیرمجموعه‌ای از A نیست، زیرا $180 \in C$ ولی $180 \notin A$. پس

$$C \not\subseteq A$$

توجه کنید که A هم زیرمجموعه‌ای از مجموعه C نیست، زیرا $29 \in A$ ولی

$29 \notin C$. پس

$$A \not\subseteq C$$

۱-۱-۱۶ قضیه: مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

۱-۱-۱۷ برهان: مجموعه دلخواه S را در نظر می‌گیریم. اگر مجموعه تهی زیرمجموعه‌ای از S نباشد، آنگاه باید $\emptyset$ عضوی داشته باشد که متعلق به S نباشد. ولی چون $\emptyset$ تهی است، این امر غیرممکن است، بنابراین $\emptyset$ زیرمجموعه‌ای از S است. از قضیه ۱-۱-۱۶ نتیجه می‌شود که دقیقاً یک مجموعه تهی وجود دارد.

۱-۱-۱۸ تمرین: تمام جزئیت‌های ممکن بین مجموعه‌های A و B را در هر یک از موارد زیر تعیین کنید.

- | | | |
|------|------------------------------|---|
| الف) | $A = \{1, 3, 5, 6, 8\}$ | $B = \{1, 5, 7\}$ |
| ب) | $A = \{1, 3, 7\}$ | $B = \{x \mid x \text{ عدد صحیح فرد است}\}$ |
| پ) | $A = \{a, b, c, d\}$ | $B = \{b, c, a, d\}$ |
| ت) | $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ | $B = \{x \mid (x^2 - 1)(x - 2) = 0\}$ |

پاسخ خود را با [۱-۱-۱۸] مقایسه کنید.

۱-۱-۱۹ نکته: برای اینکه تفاوت نمادهای $\subseteq$ و $\in$ روشن‌تر شود، توجه کنید که نماد $\subseteq$ تنها بین دو مجموعه و نماد $\in$ بین یک عضو مجموعه و مجموعه به‌کار می‌رود. برای مثال، زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ عبارتند از

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$$

پس می‌توانیم بنویسیم

$$\{a\} \subset A, \quad \{b\} \subset A, \quad \{b, c\} \subset A$$

$$a \in A, \quad b \in A$$

ولی هیچ‌یک از عبارت‌های زیر درست نیست:

$$a \subset A, \quad \{b\} \in A$$

به‌طوری‌که مشاهده می‌کنیم تعداد کل زیرمجموعه‌های A برای ۸ است. بین تعداد عضوهای یک مجموعه و تعداد کل زیرمجموعه‌های ممکن آن مجموعه رابطه‌ای وجود دارد که در قضیه زیر بیان شده است.

۱-۱-۲۰ قضیه: اگر تعداد عضوهای مجموعه A برابر عدد طبیعی n باشد، آنگاه تعداد کل زیرمجموعه‌های A مساوی 2^n است.

۱-۱-۲۱ تمرین: نخست تمام زیرمجموعه‌های ممکن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را بنویسید و بعد مطمئن شوید که تعداد آنها را با آنچه از قضیه بالا برمی‌آید یکی است.
پاسخ خود را با [۱-۱-۲۱] مقایسه کنید.

۱-۱-۲۲ تعریف: مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A را **مجموعه توانی** A می‌نامیم و آن را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم.

۱-۱-۲۳ مثال: فرض کنید $A = \{a, b\}$ ، تمام زیرمجموعه‌های A عبارتند از:

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

بنابراین $P(A)$ ، مجموعه توانی A برابر است با

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

بنابر قضیه ۱-۱-۲۰ اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه $P(A)$ برابر 2^n خواهد بود.

۱-۱-۲۴ تمرین: مجموعه توانی هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

$$A = \{a\} \quad \text{الف)}$$

$$B = \phi \quad \text{ب)}$$

$$C = \{a, \{a\}\} \quad \text{پ)}$$

پاسخ خود را با [۱-۱-۲۴] مقایسه کنید.

۱-۱-۲۵ تمرین: فرض کنید A ، B و C چنان مجموعه‌هایی باشند که داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. ثابت کنید که در $A \subseteq C$

پاسخ خود را با [۱-۱-۲۵] مقایسه کنید.

۱-۱-۲۶ تعریف: دو مجموعه A و B را مساوی (یا برابر) می‌نامیم اگر و تنها اگر

$A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. در این صورت می‌نویسیم

$$A = B$$

به بیان دیگر، دو مجموعه را مساوی می‌نامیم، اگر و تنها اگر دارای عضوهای یکسانی باشند.

۱-۱-۲۷ تمرین: کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

$$\begin{aligned} B &= \{2, -2, -1, 1\} & , & & A &= \{2, -2, 1\} \\ D &= \{2, -2, 1, 1, 1, 2\} & , & & C &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2, x \neq 0\} \\ & & & & E &= \{x \mid (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0\} \end{aligned}$$

پاسخ خود را با [۱-۱-۲۷] مقایسه کنید.

۱-۱-۲۸ تعریف: معمولاً مجموعه‌هایی که در مباحث مختلف ریاضی در نظر گرفته می‌شوند، خود زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ای بزرگ به نام مجموعه جهانی هستند. این مجموعه را با حروف U نشان می‌دهیم. بنابراین، به ازای هر مجموعه A داریم

$$A \subseteq C$$

۱-۱-۲۹ مثال: هنگام بررسی تولیدات کارخانه A واقع در شهر تهران، هر یک از مجموعه‌های زیر را می‌توانیم به‌عنوان مجموعه جهانی انتخاب کنیم.

الف) مجموعه تولیدات تمام کارخانه‌های واقع در شهر تهران.

ب) مجموعه تولیدات تمام کارخانه‌های واقع در استان تهران.

پ) مجموعه تولیدات تمام کارخانه‌های کشور جمهوری اسلامی ایران.

۱-۱-۳۰ تمرین: در هر یک از بررسی‌های زیر، تعیین کنید چه مجموعه‌هایی را می‌توانیم به‌عنوان مجموعه جهانی انتخاب کنیم.

الف) بررسی وضع خوابگاه‌های دانشجویان دانشگاه تهران.

ب) بررسی ریشه‌های معادله خطی $ax + b = 0$ ، که در آن $a, b \in \mathbb{N}$.

پاسخ خود را با [۱-۱-۳۰] مقایسه کنید.

۱-۱-۳۱ تعریف: فرض می‌کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a < b$.
الف) مجموعه تمام اعداد حقیقی x را که $a \leq x \leq b$ ، بازه بسته a و b می‌نامیم
و با نماد $[a, b]$ نشان می‌دهیم. پس

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

در شکل ۱-۱ بخشی از خط حقیقی که پررنگ کشیده شده است $[a, b]$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱

ب) مجموعه تمام اعداد حقیقی x را که $a \leq x \leq b$ ، بازه باز a و b می‌نامیم و با نماد (a, b) یا $[a, b]$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

در شکل ۲-۱ قسمت پررنگ خط حقیقی، نشان‌دهنده (a, b) است.

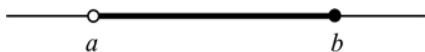


شکل ۲-۱

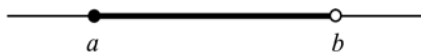
توجه کنید که خود اعداد a و b به بازه باز (a, b) تعلق ندارند، و به همین علت در شکل ۲-۱ با دایره‌های توخالی نشان داده شده‌اند.
پ) هر یک از مجموعه‌های

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad , \quad \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

را یک بازه نیم‌باز a و b می‌نامیم و به ترتیب با نمادهای $(a, b]$ و $[a, b)$ نشان می‌دهیم. به شکل‌های ۳-۱ و ۴-۱ نگاه کنید.



شکل ۴-۱



شکل ۳-۱

ت) هنگام استفاده از علامت‌های $+\infty$ (بینهایت مثبت) و $-\infty$ (بینهایت منفی) باید مواظب باشیم که این نمادها را با اعداد حقیقی اشتباه نکنیم. زیرا آنها خواص اعداد حقیقی را ندارند. بنابراین بازه‌های زیر را داریم:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$

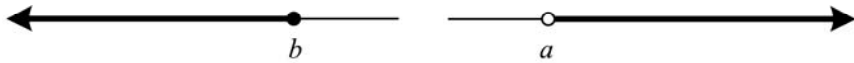
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

شکل ۵-۱ بازه $(a, +\infty)$ و شکل ۶-۱ بازه $(-\infty, b)$ را نمایش می‌دهد. توجه کنید که بازه $(-\infty, +\infty)$ مجموعه تمام اعداد حقیقی را نمایش می‌دهد.



شکل ۶-۱

شکل ۵-۱

در هر یک از بازه‌های (a, b) ، $[a, b]$ ، $(a, b]$ و $[a, b)$ ، اعداد حقیقی a و b را نقاط انتهایی بازه می‌نامیم.

۱-۱-۳۲ مثال: مجموعه جواب نامعادله $2 + 3x < 5x + 6$ را تعیین کنید و آن را روی محور اعداد حقیقی نمایش بدهید.

حل: اگر x عددی باشد که در نامساوی صدق می‌کند، باید داشته باشیم

$$2 + 3x < 5x + 6$$

یا

$$-2x < 4$$

یا

$$x > -2$$

چون تمام مرحله‌های بالا برگشت‌پذیر هستند، نتیجه می‌گیریم که