



دانشگاه سям نور

ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲

(رشته های مدیریت، حسابداری و اقتصاد)

دکتر موسی الرضا شمسیه زاهدی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

هفت	پیشگفتار
۱	فصل ۱ انتگرال
۲	۱-۱ انتگرال نامعین
۱۲	۲-۱ روش تغییر متغیر در انتگرال گیری
۱۶	۳-۱ روش انتگرال گیری جزء به جزء
۲۱	۴-۱ روش تجزیه کسرها در انتگرال گیری
۲۹	۵-۱ انتگرال معین
۴۰	۶-۱ کاربرد انتگرال معین
۴۸	۷-۱ کاربردهای اقتصادی انتگرال معین
۵۱	۸-۱ آشنایی با معادلات دیفرانسیل
۵۹	فصل ۲ بردار و ماتریس
۶۰	۱-۲ بردارها
۶۵	۲-۲ ماتریس
۷۶	۳-۲ دترمینان
۸۵	۴-۲ وارون ماتریس

۹۰	کاربردی از ماتریس‌ها در رمز نویسی	۵-۲
۹۳	اعمال سطری مقدماتی	۶-۲
۱۰۳	دستگاه معادلات خطی	۳ فصل
۱۰۴	دستگاه معادلات خطی	۱-۳
۱۰۸	حل دستگاه معادلات خطی $n \times n$	۲-۳
۱۱۳	روش‌های کلی حل دستگاه	۳-۳
۱۳۹	تبدیل خطی و مقادیر ویژه	۴ فصل
۱۴۰	فضای برداری R^n	۱-۴
۱۴۷	تبدیلات خطی	۲-۴
۱۵۴	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۳-۴
۱۶۳	توابع چند متغیره و مشتقات جزئی	۵ فصل
۱۶۴	توابع چند متغیره	۱-۵
۱۶۹	حد و پیوستگی	۲-۵
۱۷۵	مشتقات جزئی	۳-۵
۱۸۳	دیفرانسیل کل، قاعده‌ی زنجیره‌ای و مشتق‌گیری ضمنی	۴-۵
۱۹۳	کاربردهایی از مشتق جزئی	۵-۵
۱۹۷	ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره	۶-۵
۲۰۶	ماکسیمم و مینیمم توابع چند متغیره‌ی مقید	۷-۵
۲۲۱	منابع	
۲۲۲	نمایه	

تقدیم به:

همسر مهربانم

و

دخترانم «مهرنازو مهرنوش»

پیشگفتار

آفرین جان آفرین پاک را آن که جان بخشید و ایمان خاک را

کتاب حاضر حاصل تجربه‌ی چند ساله‌ی تدریس درس ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت برای دانشجویان رشته‌های مدیریت و حسابداری است. در نگارش این اثر سعی شده است که تا حد امکان، مطالب به زبانی ساده و روان برای دانشجویان رشته‌های علوم انسانی بیان شود. البته با توجه به زنجیره وار بودن اغلب مباحث ریاضی، امید است که دانشجویان عزیز، با در اختیار داشتن تجربه‌ای مناسب از درس ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۱ قدم در این راه نهاده باشند، تا لذت بیشتری از مطالعه‌ی مباحث ذکر شده نصیب یکایک آنها گردد.

تلاش ما بر این بود که نحوه‌ی ارائه‌ی مباحث در هر فصل مستقیم و منظم باشد. برای برجسته نمودن مطالب مهم تر از جمله تعریف ها، فرمول ها، قضیه ها و نکات مهم هر قسمت، آنها را در کادر های ویژه ای قرار داده و در پایان حل مثال ها از نماد ■ استفاده نموده ایم. تذکراهایی که در هر بخش دیده می شود، از جمله مواردی است که همواره باید با دقت و تأمل بیشتری ملاحظه گردد. در انتهای هر بخش تمرین هایی به منظور تسلط بیشتر دانشجویان عزیز با علامت  ارائه شده اند. همچنین در پایان تمام فصل ها (به



جز فصل چهارم) تمرین های گوناگون که با نماد متمایز شده اند، برای امتحان آموخته های دانشجوی و جمع بندی مطالب ذکر شده است. تمامی این تمرین ها از ساده به دشوار مرتب شده تا دانشجویان با اعتماد به نفس بهتری گام به گام، به حل آنها بپردازند.

در اغلب فصل ها بر آن بودیم که مواردی از کاربردهای ملموس و مفید ریاضی در اقتصاد و مدیریت، بیان گردد. در فصل اول کتاب به دلیل اهمیت بحث انتگرال و بنا به تجربه، نخست به معرفی و بررسی آن پرداختیم. در این فصل ابتدا مفهوم انتگرال نامعین و سپس انتگرال معین آورده شده است. تلاش ما بر این بود که نحوه ی نزدیک شدن به بحث انتگرال معین از نگرشی هندسی پیروی نماید. همچنین مقدمه ای بر نظریه معادلات دیفرانسیل در انتهای این فصل آورده ایم که می تواند سر آغازی برای پژوهش و تحقیق دانشجویان علاقه مند در این مورد باشد. فصل دوم به معرفی و بیان بحث ساده و جالب بردارها و ماتریس ها می پردازد. البته هدف عمده ی این فصل فراهم آوردن مقدمات لازم برای معرفی روش های حل دستگاه های معادلات خطی در فصل سوم است. فصل چهارم اشاره ای به بحث مقادیر ویژه و بردارهای ویژه دارد که بطور مستقیم به فصل های دوم و سوم مرتبط است. در فصل آخر این کتاب، توابع چند متغیره و نمودارهایی از توابع دومتغیره برای درک بهتر مطالب ارائه گردید. هدف اصلی، معرفی مشتقات جزئی توابع چند متغیره و آشنایی با کاربردهای آن در مسائل بهینه سازی است.

از همه ی دوستانی که به طور مستقیم و یا غیرمستقیم مرا در تهیه ی این کتاب یاری کرده اند، به ویژه همکار ارجمندم آقای **رضا دستجردی** که در تمام مراحل مطالعه، تدوین و نگارش این اثر مشارکت جدی داشتند، نهایت تقدیر و تشکر را دارم.

در پایان، آفریدگار کریم، یکتای بلند مرتبه و بی نهایت مطلق را می ستایم که توفیق خدمت را نثار این بنده ی کوچک خویش ساخته است. به رسم ادب و

احترام از راهنمایی های بی شائبه و حکیمانه ی دانشمند فرزانه و استاد گرانمایه،
آقای دکتر محمد حسن بیژن زاده نهایت تشکر را دارم. بدون تردید ویراستاری
هر کتاب ریاضی از جمله موارد حائز اهمیت است که رنجی بیش از نگارش آن
دارد، در اینجا تشکر خالصانه خویش را تقدیم همکاران گرانقدر و نکته بین،
آقای محسن ساعدی و سرکار خانم دکتر رحمت سلطانی می نمایم که
مسئولیت ویراستاری علمی کتاب را برعهده داشته اند.
پیشاپیش از تمامی همکاران عزیزی که که با ارسال نظرات و انتقادات سازنده ،
مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار می دهند، سپاسگزارم.
گر خطا گفتیم اصلاحش تو کن مصلحی تو ای تو سلطان سخن

موسی الرضا شمسیه زاهدی
عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور
مرکز نیشابور
تابستان ۱۳۹۲

فصل اول

انتگرال

هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی دانشجو با مفاهیم انتگرال معین و نامعین و برخی از کاربردهای آن است.

اهداف رفتاری

دانشجو پس از مطالعه‌ی دقیق این فصل بایستی بتواند:

۱. مفهوم پادمشتق را توضیح دهد.
۲. مفهوم انتگرال معین را توضیح دهد و انتگرال نامعین توابع داده شده را محاسبه کند.
۳. ویژگی‌های انتگرال نامعین را بیان کند.
۴. فرمول‌ها و قواعد انتگرال‌گیری را در حل انتگرال‌های مختلف به کار گیرد.
۵. درک مناسبی از مفهوم هندسی انتگرال معین داشته باشد.
۶. ارتباط موجود بین انتگرال معین و نامعین را شرح دهد.
۷. انتگرال معین توابع داده شده را محاسبه کند.
۸. ویژگی‌های انتگرال معین را در حل مسائل مربوطه مورد توجه قرار دهد.
۹. در مورد کاربردهای انتگرال معین آشنایی لازم را کسب نماید.

مقدمه

امروزه اهمیت علم حساب دیفرانسیل و انتگرال در علوم و فنون مختلف بیش از پیش بر همگان به اثبات رسیده است. یافتن شیب خط مماس بر نمودار یک تابع داده شده و مساحت زیر منحنی از جمله اهداف پایه‌گذاری این دانش نظری بوده است. قبلاً دیدیم که مفهوم مشتق ابزار مناسبی برای محاسبه‌ی شیب خط مماس بر نمودار یک منحنی است. اکنون با بیان مفهوم انتگرال به دنبال یافتن مساحت ناحیه‌هایی هستیم که شکل هندسی خاصی ندارند و محدود به یک یا چند تابع هستند. در ابتدای این فصل انتگرال نامعین یک تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به معرفی انتگرال معین و کاربردهایی از آن در اقتصاد خواهیم پرداخت.

۱-۱ انتگرال نامعین

۱-۱-۱ مقدمه

پیش از این در درس ریاضیات پایه، با عمل مشتق‌گیری، آشنا شدیم. در آنجا با در اختیار داشتن ضابطه‌ی یک تابع (مشتق‌پذیر) قادر به یافتن تابع مشتق بودیم. اکنون به دنبال معرفی و بیان عکس این عمل خواهیم بود. عکس عمل مشتق را در اصطلاح «عمل پادمشتق» یا «یافتن تابع اولیه» برای یک تابع داده شده نامیم. پس هدف ما این است که با داشتن ضابطه‌ی $f(x)$ بتوانیم تابع دیگری پیدا کنیم که مشتق آن برابر $f(x)$ باشد.

۱-۱-۲ تعریف

اگر $f(x)$ روی بازه‌ی I تعریف شده باشد، آنگاه یک پادمشتق (تابع اولیه) برای آن، تابعی مانند $F(x)$ است که برای هر x در I داشته باشیم $F'(x) = f(x)$.

مثال ۱-۱

یک تابع اولیه برای $f(x) = 2x$ بیابید.

(حل)

باید تابع $F(x)$ را چنان بیابیم که مشتق آن برابر $2x$ باشد. با اندکی تأمل درمی‌یابیم که $F(x) = x^2$ دارای این خاصیت است، زیرا:

$$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

پس $F(x) = x^2$ یک پادمشتق برای $f(x) = 2x$ است. ■

سؤال: آیا می‌توان پادمشتق دیگری نیز برای $f(x) = 2x$ یافت؟

پاسخ سؤال قبل به شدت مثبت است! زیرا مشتق عبارت‌های $x^2 + 1$ ، $x^2 + 3$ ، $x^2 + \sqrt{2}$ و $x^2 + (-5)$... همگی برابر $2x$ است. پس $f(x) = 2x$ دارای بی‌نهایت پادمشتق است و می‌توان آن‌ها را به صورت کلی $x^2 + C$ نمایش داد که در آن C معرف یک عدد ثابت دلخواه است. در اینجا می‌گوییم که انتگرال نامعین تابع $f(x) = 2x$ برابر $x^2 + C$ است و می‌نویسیم:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

۳-۱-۱ تعریف

اگر $F(x)$ یک پادمشتق برای تابع $f(x)$ در بازه‌ی I باشد، انتگرال نامعین $f(x)$ را با نماد $\int f(x) dx = F(x) + C$ نمایش می‌دهیم و داریم:

تذکره ۱-۱

باید توجه کنیم که $\int f(x) dx$ یک خانواده از توابع را نمایش می‌دهد، یعنی خانواده‌ی $F(x) + C$ ، که در آن به عدد ثابت C ، ثابت انتگرال‌گیری می‌گوییم.

تذکره ۲-۱

نماد دیفرانسیلی dx که هم در عمل مشتق‌گیری و هم در عمل انتگرال به صورت‌های

$$\int (...) dx \text{ و } \frac{d}{dx} (...) \text{ ظاهر شده است، در واقع مشخص‌کننده‌ی متغیر مستقل است.}$$

در جدول (۱-۱) چند مثال از فرمول‌های مشتق و انتگرال‌های معادل آن‌ها با در

نظر گرفتن متغیر مستقل دیده می‌شود:

جدول ۱-۱

فرمول مشتق	فرمول انتگرال معادل
$\frac{d}{dx}(x^r + x) = rx^{r-1} + 1$	$\int (x^r + 1)dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + x + C$
$\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} + C$
$\frac{d}{du}(\sin u) = \cos u$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z^2}$	$\int \frac{-1}{z^2}dz = \frac{1}{z} + C$
$\frac{d}{d\theta}(\tan \theta) = \sec^2 \theta$	$\int \sec^2 \theta d\theta = \tan \theta + C$
$\frac{d}{dy}(f'(y)) = f''(y)$	$\int f''(y)dy = f'(y) + C$

۴-۱-۱ فرمول‌های انتگرال

در جدول (۲-۱) چند فرمول اصلی عمل انتگرال‌گیری، که به‌طور مستقیم به کمک فرمول‌های مشتق به‌دست آمده‌اند، به همراه فرمول مشتق متناظر با آن، آورده شده است که به‌عنوان اولین گام در مسیر حل مسائل انتگرال باید همواره آن‌ها را در خاطر داشته باشیم. کاربردی‌ترین فرمول انتگرال جدول مورد نظر، فرمول زیر است که به آن فرمول توانی برای انتگرال گفته می‌شود:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

دقت کنیم که فرمول توانی درمورد توان‌هایی از x که مخالف "۱- " باشد، استفاده

می‌شود و در مورد توان برابر با "۱- " از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

جدول ۲-۱

فرمول مشتق	فرمول انتگرال
$\frac{d}{dx}(C) = 0$	$\int 0 \cdot dx = C$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int 1 dx = x + C$
$\frac{d}{dx}(ax) = a$	$\int a dx = ax + C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r \quad (r \neq -1)$	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$

مثال ۲-۱

به کمک فرمول توانی انتگرال حاصل هر قسمت را بیابید:

$$\int x^6 dx \quad \text{الف)} \quad \int \sqrt{x} dx \quad \text{ب)} \quad \int \frac{1}{x} dx \quad \text{ج)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{د)}$$

حل)

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C \quad \text{الف)}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad \text{ب)}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C \quad \text{ج)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad \text{د)}$$

یادآوری: در مورد قسمت‌های ب، ج، و د در مثال قبل قواعدی از مبحث رادیکال و توان را به کار برده‌ایم که عبارت‌اند از:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (۲) \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad (۱) \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (۴) \quad \frac{1}{a} = a^{-1} \quad (۳)$$

۱-۱-۵ قواعد اساسی انتگرال

الف) ضریب ثابت از انتگرال عبور می‌کند، یعنی:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

(دقت کنیم در مورد مشتق نیز این قاعده برقرار بود، یعنی $(kf)' = kf'$)

مثال ۱-۳

$$\int -9x^2 dx = -9 \int x^2 dx = -9 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right) + C = -3x^3 + C$$

و

$$\int \frac{x}{5} dx = \frac{1}{5} \int x dx = \frac{1}{5} \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + C = \frac{x^2}{10} + C$$

ب) جمع و تفریق در انتگرال:

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

(در محاسبه‌ی مشتق نیز این قاعده برقرار است، یعنی $(f \pm g)' = f' \pm g'$)

مثال ۱-۴

به‌کارگیری قاعده‌ی ب) در مثال‌های بعد نشان داده شده است:

الف)

$$\int (x^2 + \sqrt{x}) dx = \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{x^3 + 2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$\int (\cos x - 5)dx = \int \cos x dx - \int 5dx = \sin x - 5x + C \quad (\text{ب})$$

(ج)

$$\int (e^x + 3 \sin x)dx = \int e^x dx + 3 \int \sin x dx = e^x - 3 \cos x + C$$

تذكر ٣-١

قاعدهى جمع و تفريق را نه تنها برائى مجموع و تفاضل دو تابع، بلکه برائى هر تعداد متناهى از توابع نيز مى توان به كار برد.

مثال ٥-١

حاصل انتگرال هاى زير را بياييد.

$$\begin{array}{ll} \int (2x+1)^2 dx & (\text{ب}) \\ \int (x-1)(x^2-3x+1)dx & (\text{د}) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int -7x(3x^2-5)dx & (\text{الف}) \\ \int (x^2+x+2)^2 dx & (\text{ج}) \end{array}$$

(حل)

$$\int -7x(3x^2-5)dx = \int (-21x^3 + 35x)dx \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} &= -21 \int x^3 dx + 35 \int x dx \\ &= -21 \frac{x^4}{4} + 35 \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1)dx \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int x^2 dx + 4 \int x dx + \int dx \\ &= 4 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

$$\int (x^2 + x + 2)^2 dx = \int (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4)dx \quad (\text{ج})$$

$$= \int x^4 dx + 2 \int x^3 dx + 5 \int x^2 dx + 4 \int x dx + 4 \int dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + C \\
 \int (x-1)(x^2-3x+1)dx &= \int (x^3-3x^2+4x-1)dx \\
 &= \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - \int dx \\
 &= \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} - x + C
 \end{aligned} \quad (د)$$

مثال ۱-۶

پادمشتق $G(x)$ از تابع $f(x) = x^2 + x + 1$ را طوری بیابید که $G(0) = 1$.

(حل)

صورت کلی پادمشتق‌های تابع $f(x)$ برابر با $\int f(x)dx$ است، اما داریم:

$$\int f(x)dx = \int (x^2 + x + 1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

پس $G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$. اما از شرط $G(0) = 1$ داریم $C = 1$ و بنابراین

$$\blacksquare \cdot G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

تذکره ۱-۴

برخلاف عمل مشتق‌گیری، برای ضرب و تقسیم انتگرال‌ها قاعده‌ی خاصی وجود ندارد!

(ج) مشتق‌گیری از انتگرال:

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = \left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

به‌طور مثال داریم:

$$\frac{d}{dx} \left(\int \sin^{\circ} x dx \right) = \sin^{\circ} x \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} \left(\int x \ln x dx \right) = x \ln x$$

(د) انتگرال گیری از مشتق:

$$\int \frac{d}{dx}(f(x))dx = \int f'(x)dx = f(x) + C$$

مثال ۷-۱

با به کارگیری قاعده‌ی انتگرال گیری از مشتق داریم:

$$\int \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 3}{\sin x} \right) dx = \frac{x^2 - 3}{\sin x} + C$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x dx &= \int ((\tan^2 x + 1) - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx \\ &= \int (\tan x)' dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

۱-۱-۶ توابع کل و نهایی

از جمله کاربردهای اصلی انتگرال نامعین در اقتصاد، یافتن تابع هزینه‌ی کل از هزینه‌ی نهایی و یا تابع درآمد کل از یک تابع درآمد نهایی معلوم، است. اگر q متغیر تولید روزانه‌ی یک بنگاه اقتصادی باشد و $MC(q)$ و $TC(q)$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تابع هزینه‌ی نهایی و تابع هزینه‌ی کل باشند، می‌دانیم که:

$$\frac{d}{dq}(TC(q)) = MC(q)$$

بنابراین:

$$TC(q) = \int MC(q) dq$$

یعنی با معلوم بودن تابع هزینه‌ی نهایی می‌توان تابع هزینه‌ی کل را با انتگرال‌گیری از تابع هزینه نهایی به دست آورد. دقت کنیم که در این صورت در نمایش تابع هزینه‌ی کل، ثابت C به عنوان یک مجهول ظاهر می‌شود و این مجهول به عنوان هزینه‌های ثابت آن بنگاه در نظر گرفته می‌شود، یعنی هزینه‌هایی که در حالت $q=0$ وجود دارند.

مثال ۸-۱

اگر تابع هزینه نهایی یک بنگاه اقتصادی برابر $MC(q) = 6q^2 - 6q + 5$ باشد و برای $q = 4$ هزینه کل برابر ۲۰۰ باشد، تابع هزینه کل بنگاه را مشخص کنید.

(حل)

$$TC(q) = \int (6q^2 - 6q + 5) dq = 2q^3 - 3q^2 + 5q + C$$

دقت کنیم که با قرار دادن $q = 0$ داریم $TC(0) = C$ و این مجهول نشان دهنده هزینه‌های ثابت تولید بنگاه بدون توجه به مقدار تولید است. با توجه به این که بنا بر فرض مسئله $TC(4) = 200$ ، می‌توان به محاسبه‌ی این مقدار مجهول پرداخت:

$$TC(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 + 5(4) + C = 200$$

پس از انجام محاسبه داریم $C = 100$. بنابراین تابع هزینه کل بنگاه برابر است با:

$$TC(q) = 2q^3 - 3q^2 + 5q + 100 \quad \blacksquare$$

به طریق مشابه با دانستن رابطه‌ی تابع درآمد نهایی یعنی $MR(q)$ و تابع درآمد کل یعنی $TR(q)$ ، یعنی $\frac{d}{dq}(TR(q)) = MR(q)$ ، داریم $TR(q) = \int MR(q) dq$.

مثال ۹-۱

اگر تابع درآمد نهایی یک بنگاه اقتصادی به صورت $MR(q) = 8 - 0.2q$ باشد، تابع درآمد کل را بیابید.

(حل)

$$TR(q) = \int (8 - 0.2q) dq = 8q - 0.1q^2 + C$$

ملاحظه می‌کنید که باز هم ثابت انتگرال‌گیری به عنوان یک مجهول در تابع درآمد کل ظاهر گردید. اما با توجه به این که درآمد کل این بنگاه وقتی تولید روزانه صفر باشد ($q = 0$)، برابر صفر است ($TR(0) = 0$)، پس می‌توان نتیجه گرفت که ثابت انتگرال‌گیری برابر صفر است، یعنی تابع درآمد کل به صورت

$$TR(q) = \int (8 - 0.2q) dq = 8q - 0.1q^2$$

خواهد بود. $\blacksquare$

تمرین‌های بخش ۱-۱

۱. مشتقات زیر را بیابید و برای هر کدام یک انتگرال بنویسید.

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^2 + 4} \right) \quad \text{ب)} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{x+3} \right) \quad \text{الف)}$$

$$\frac{d}{dz} (e^{\sin z}) \quad \text{د)} \quad \frac{d}{dt} (t \tan t - \sin t) \quad \text{ج)}$$

۲. به کمک فرمول توانی برای انتگرال، حاصل هر قسمت را بیابید.

$$\int u^4 \sqrt{u} du \quad \text{ج)} \quad \int \frac{x}{3} dx \quad \text{ب)} \quad \int s^{33} ds \quad \text{الف)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{و)} \quad \int \frac{1}{v^{11}} dv \quad \text{ه)} \quad \int \sqrt[4]{t^9} dt \quad \text{د)}$$

۳. حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\int (x^{-\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{5}} + \frac{9}{v}) dx \quad \text{ب)} \quad \int (3x + \frac{4}{\sqrt{x}}) dx \quad \text{الف)}$$

$$\int \frac{t^5 - 4t^7}{t^2} dt \quad \text{د)} \quad \int (\frac{1}{x^4} - 5\sqrt{x} + \sqrt{x}) dx \quad \text{ج)}$$

$$\int (2 + e^{2+x}) dx \quad \text{و)} \quad \int z(z^3 - 1) dz \quad \text{ه)}$$

$$\int 2(\csc^2 x + 2 \sec x \tan x) dx \quad \text{ح)} \quad \int \sqrt{s}(s+1)^2 ds \quad \text{ز)}$$

$$\int \frac{1}{\sec x} dx \quad \text{ی)} \quad \int (\sin \theta - \sqrt{\sec^2 \theta}) d\theta \quad \text{ط)}$$

۴. با ذکر مثالی نشان دهید که رابطه‌های

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} \quad \text{و} \quad \int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx$$

لزوماً برقرار نیستند.

۵. پادمشتقی چون $G(x)$ برای تابع $f(x) = (x-2)^2$ بیابید که در شرط $G(1) = 0$ صدق کند.

۶. فرض کنیم تابع هزینه نهایی یک بنگاه تولیدی به صورت

$$MC(q) = 0.7q^2 - 6q + 20$$

و هزینه کل تولید برای ۱۰ قلم کالا برابر ۲۰۰ واحد باشد. تابع هزینه کل بنگاه را بیابید.

۷. فرض کنیم $P(t)$ تابع تولید کارخانه‌ای پس از t ساعت کار باشد و همچنین آهنگ لحظه‌ای تولید در لحظه‌ی t برابر $P'(t) = 60 + 2t - \frac{1}{4}t^2$ واحد در ساعت باشد. تابع تولید این کارخانه را بیابید.

۲-۱ روش تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

یکی از ساده‌ترین ترفندها در انتگرال‌گیری، استفاده از یک متغیر جدید به جای یک عبارت برحسب متغیر اولیه است، برای شروع به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱۰-۱

فرض کنید بخواهیم حاصل انتگرال $\int (1+x)^2 dx$ را بیابیم. در این صورت کافی است که اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای در مورد $(1+x)^2$ را به کار برده و آن را به صورت $1 + 2x + x^2$ بنویسیم، بنابراین بنابه قاعده‌ی جمع و فرمول توانی به راحتی می‌توان به محاسبه آن پرداخت :

$$\int (1+x)^2 dx = \int (1+2x+x^2) dx = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + C. \blacksquare$$

اکنون تصور کنید که بخواهیم حاصل انتگرال $\int (1+x)^{100} dx$ را محاسبه کنیم. بدیهی است با توجه به این که توان عبارت داخل پرانتز در این انتگرال به گونه‌ای نیست که بتوان از اتحاد خاصی استفاده کرد، پس بایستی به طریقی دیگر عمل نمود. روش کار بدین گونه است که متغیر جدید u را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$1+x=u$$

با دیفرانسیل‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم $d(1+x) = du$ یعنی $dx = du$. بنابراین :

$$\int (1+x)^{100} dx = \int u^{100} du = \frac{u^{101}}{101} + C = \frac{(1+x)^{101}}{101} + C. \blacksquare$$

مثال ۱۱-۱

در هر قسمت با توجه به تغییر متغیر پیشنهاد شده حاصل انتگرال را بیابید.