



ریاضیات عمومی ۱

(رشته‌های شیمی، زمین‌شناسی و فیزیک)

جلیل واعظی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

پیشگفتار مؤلف.....	نه
راهنمای مطالعه.....	یازده

فصل اول رابطه و تابع.....	۱
هدف‌های آموزشی.....	۱
۱.۱ مفهوم زوج مرتب.....	۲
۲.۱ مفهوم رابطه.....	۲
۳.۱ تابع.....	۴
۴.۱ برابری دو تابع.....	۶
۵.۱ جبر توابع.....	۷
۶.۱ توابع خاص.....	۱۶
۷.۱ خود آزمایی.....	۲۷
۸.۱ پاسخ به سؤالات متن.....	۳۱
۹.۱ پاسخ خودآزمایی.....	۳۳

فصل دوم مختصات قطبی.....	۳۵
هدف‌های آموزشی.....	۳۵
۱.۲ دستگاه مختصات قطبی.....	۳۶
۲.۲ رابطه بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی.....	۳۹
۳.۲ نمودار معادلات قطبی.....	۴۲
۴.۲ خودآزمایی.....	۵۰
۵.۲ پاسخ به سؤالات متن.....	۵۱
۶.۲ پاسخ خودآزمایی.....	۵۵

فصل سوم اعداد مختلط.....	۵۷
هدف‌های آموزشی.....	۵۷
۱.۳ توسعه دستگاه اعداد حقیقی و تعریف عدد مختلط.....	۵۸
۲.۳ اعمال جبری روی مجموعه اعداد مختلط.....	۵۹

۶۰	۳.۳ عدد مختلط با قسمت موهومی صفر
۶۰	۴.۳ یک موهومی i
۶۱	۵.۳ نمایش عدد مختلط (a, b) با نماد $a + bi$
۶۱	۶.۳ توان‌های متوالی i
۶۱	۷.۳ مزدوج یک عدد مختلط
۶۲	۸.۳ نمایش هندسی اعداد مختلط
۶۵	۹.۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط
۶۸	۱۰.۳ دستور دموآور
۶۹	۱۱.۳ ریشه‌گیری از اعداد مختلط
۷۴	۱۲.۳ معادلات خط و دایره در صفحه مختلط
۷۶	۱۳.۳ خودآزمایی
۸۰	۱۴.۳ پاسخ به سؤالات متن
۸۳	۱۵.۳ پاسخ خودآزمایی

۸۵	فصل چهارم حد و پیوستگی
۸۵	هدف‌های آموزشی
۸۶	۱.۴ علامت $\sum$
۸۷	۲.۴ استقرای ریاضی
۸۸	۳.۴ همسایگی
۹۰	۴.۴ مفهوم حد
۹۴	۵.۴ قضایایی درباره حد توابع
۱۰۲	۶.۴ حدود یک طرفه (حد راست و حد چپ)
۱۰۷	۷.۴ حدود نامتناهی
۱۱۰	۸.۴ حدود بینهایت
۱۱۵	۹.۴ پیوستگی توابع
۱۲۲	۱۰.۴ قضیه مقدار میانی
۱۲۵	۱۱.۴ خودآزمایی
۱۳۳	۱۲.۴ پاسخ به سؤالات متن
۱۳۸	۱۳.۴ پاسخ خودآزمایی

۱۴۱	فصل پنجم مشتق
۱۴۱	هدف‌های آموزشی
۱۴۲	۱.۵ تعریف مشتق
۱۴۸	۲.۵ قضایای مشتق
۱۵۲	۳.۵ مشتق ترکیب توابع و تابع ضمنی
۱۵۵	۴.۵ مشتق توابع مثلثاتی
۱۵۶	۵.۵ مشتق وارون تابع
۱۶۰	۶.۵ توابع هیپربولیک و مشتق آنها
۱۶۳	۷.۵ مشتق مرتبه n ام
۱۶۵	۸.۵ دیفرانسیل
۱۶۹	۹.۵ خودآزمایی
۱۷۵	۱۰.۵ پاسخ به سؤالات متن

۱۱.۵ پاسخ خودآزمایی ۱۸۲

فصل ششم کاربردهای مشتق ۱۸۷

هدف‌های آموزشی ۱۸۷

۱.۶ ماکسیمم و مینیمم یک تابع ۱۸۸

۲.۶ چند کاربرد ماکسیمم و مینیمم ۱۹۷

۳.۶ قضایای رول و میانگین ۲۰۰

۴.۶ کاربرد قضایای رول و میانگین ۲۰۵

۵.۶ تقریر و تحدب و نقطه عطف ۲۰۷

۶.۶ کاربردهای مشتق در رسم نمودار توابع ۲۱۱

۷.۶ صورت‌های مبهم ۲۲۰

۸.۶ خودآزمایی ۲۲۸

۹.۶ پاسخ به سؤالات متن ۲۳۷

۱۰.۶ پاسخ خودآزمایی ۲۴۱

فصل هفتم انتگرال ۲۴۷

هدف‌های آموزشی ۲۴۷

۱.۷ انتگرال نامعین ۲۴۸

۲.۷ روش‌های انتگرال‌گیری ۲۵۲

۳.۷ انتگرال‌گیری به وسیله تغییر متغیر مثلثاتی ۲۶۰

۴.۷ انتگرال‌گیری به روش کسرهای ساده ۲۶۲

۵.۷ تغییر متغیرهای گوناگون ۲۷۰

۶.۷ تغییر متغیر هیپربولیک ۲۷۲

۷.۷ خودآزمایی ۲۷۶

۸.۷ پاسخ به سؤالات متن ۲۸۰

۹.۷ پاسخ خودآزمایی ۲۸۶

فصل هشتم انتگرال معین ۲۹۱

هدف‌های آموزشی ۲۹۱

۱.۸ مفهوم مساحت و تعریف انتگرال نامعین ۲۹۲

۲.۸ خواص انتگرال معین و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲۹۸

۳.۸ خودآزمایی ۳۱۱

۴.۸ پاسخ به سؤالات متن ۳۱۷

۵.۸ پاسخ خودآزمایی ۳۱۹

فصل نهم کاربردهای انتگرال معین ۳۲۱

هدف‌های آموزشی ۳۲۱

۱.۹ محاسبه مساحت نواحی مختلف ۳۲۲

۲.۹ حجم یک جسم دوار ۳۳۵

۳.۹ طول منحنی مسطح ۳۴۶

۴.۹ مساحت یک سطح دوار ۳۵۲

۵.۹ کار ۳۵۷

۳۵۹	۶.۹ مسافت پیموده شده توسط یک متحرک.....
۳۶۲	۷.۹ گشتاورها و مرکز جرم.....
۳۷۳	۸.۹ خودآزمایی.....
۳۷۹	۹.۹ پاسخ به سؤالات متن.....
۳۸۲	۱۰.۹ پاسخ خودآزمایی.....
۳۸۷	فصل دهم انتگرال ناسره
۳۸۷	هدف‌های آموزشی.....
۳۸۷	۱.۱۰ تعمیم انتگرال معین و تعریف انتگرال ناسره.....
۳۸۸	۲.۱۰ انتگرال‌های ناسره رده اول.....
۳۹۳	۳.۱۰ انتگرال‌های ناسره رده دوم.....
۳۹۸	۴.۱۰ تعیین نوع انتگرال ناسره.....
۴۰۱	۵.۱۰ خودآزمایی.....
۴۰۳	۶.۱۰ پاسخ به سؤالات متن.....
۴۰۴	۷.۱۰ پاسخ خودآزمایی.....
۴۰۵	۲۰۱ مسئله.....
۴۶۵	پیوست‌ها.....
۴۶۵	جدول الفبای یونانی.....
۴۶۶	جدول توابع نمایی و هذلولی.....
۴۷۴	جدول لگاریتم طبیعی.....
۴۷۵	جدول تابع مثلثاتی.....
۴۷۷	جدول مشتق‌ها.....
۴۷۸	جدول انتگرال‌ها.....
۴۸۳	بعضی اعداد مفید.....
۴۸۴	بعضی نمودارهای مورد نیاز.....
۴۹۲	منابع.....
۴۹۳	واژه‌نامه.....

پیشگفتار

کتابی که در دست دارید شامل ده فصل است. در سراسر این فصول فرض این است که دانشجویان با ریاضیات پیش دانشگاهی آشنایی دارند ولی برحسب ضرورت بعضی از مفاهیم را بیان کرده‌ایم.

فصل اول مفاهیم رابطه و تابع، انواع تابع، عملیات جبری روی توابع و وارون تابع را بررسی کرده‌ایم.

فصل دوم با دستگاه مختصات جدیدی به نام مختصات قطبی آشنا خواهیم شد و ویژگی‌های این دستگاه، رابطه آن با دستگاه مختصات دکارتی، معادلات و توابع قطبی را بیان کرده‌ایم این فصل با رسم نمودارهای قطبی به پایان می‌رسد.

در فصل سوم مجموعه اعداد مختلط که گسترشی از مجموعه اعداد حقیقی است معرفی شده است. اعمال جبری، نمایش‌های هندسی، برداری، مثلثاتی این اعداد و معادلات خط و دایره در این دستگاه قسمت‌های بعدی این فصل را تشکیل می‌دهند.

در فصل چهارم به معرفی مفهوم حد توابع و قضایای مهم آن اختصاص دارد. قسمت آخر این فصل با مفهوم پیوستگی و مسایل مربوط به آن تمام می‌شود.

در فصل پنجم مفهوم پراهمیت مشتق را از طریق دو مسئله مماس بر یک منحنی و سرعت یک جسم متحرک بررسی می‌کند، خواص توابع مشتق‌پذیر و قضایای آن این بخش را به پایان می‌برد.

در فصل ششم کاربردهای گوناگون مشتق از جمله مسائل ماکسیمم و مینیمم و رسم منحنی‌ها را آورده‌ایم.

در فصل هفتم انتگرال نامعین معرفی شده است، روش‌های انتگرال‌گیری که یکی

از مهمترین قسمت‌های محاسبه‌ای حساب دیفرانسیل و انتگرال است در این فصل بیان شده است. در فصل هشتم مفهوم انتگرال معین با استفاده از مساحت یک ناحیه معرفی شده است، خواص انتگرال‌های معین و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال قسمت‌های دیگر این فصل است.

در فصل نهم، کاربردهای انتگرال معین در محاسبه سطح، حجم، طول، کار، مسافت، گشتاور و مرکز جرم را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

در فصل دهم انتگرال‌های ناسره رده اول و رده دوم را معرفی و همگرایی و واگرایی آنها و آزمون مقایسه را بیان کرده‌ایم.

به منظور دست‌یابی مدرسان محترم به تست‌ها و سؤالات استاندارد امتحانی و مطالعه بیشتر دانشجویان علاقه‌مند ۲۰۱ مسئله حل شده از نوع کاربردی - مفهومی - نظری و محاسبه‌ای بعد از فصل دهم آورده شده است.

جداولی از توابع مثلثاتی، نمایی، هیپربولیک، لگاریتم طبیعی، مشتق‌ها، انتگرال‌ها، الفبای یونانی، بعضی اعداد مفید و نمودار توابعی که در کتاب با آنها سر و کار داریم، ضمیمه کتاب است.

همانگونه که در راهنمای مطالعه خواهد آمد پاسخ دادن به سؤالات و حل مسائل متن و خودآزمایی‌هایی که در پایان هر فصل آمده است نقش مهمی در یادگیری این درس دارند، بنابراین لازم است که با دقت و حوصله کافی نسبت به حل آنها اقدام گردد و در نهایت جهت کنترل پاسخ خود و برای اطمینان از درستی آن به قسمت پاسخ‌ها مراجعه کنید.

موجب امتنان خواهد بود اگر اساتید محترم و دانشجویان عزیز در صورت مواجه شدن با اشکالات و نواقصی که نیازمند توجه مؤلف برای رفع آنها در چاپ بعدی است، آنها را از طرق مراکز آموزشی به گروه ریاضی ارسال فرمایند.

ویرایش علمی کتاب به عهده آقای دکتر محمد چایچی بود که از ایشان صمیمانه سپاسگذارم.

جلیل واعظی

عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور

راهنمای مطالعه

کتاب ریاضی عمومی (۱) که هم‌اکنون در اختیار شماست و آماده مطالعه و فراگیری آن هستید برای اکثر رشته‌های دانشگاهی که با ریاضیات سر و کار دارند تألیف شده است. علیرغم اینکه این درس نیاز به بحث و تبادل نظر و رفع اشکال توسط اساتید محترم دانشگاه دارد اما کوشش شده است تا به صورت کتابی خودآموز تدوین گردد و نیاز به حضور در کلاس رفع اشکال به حداقل برسد.

آگاهی از نحوه نگارش و دانستن روش مطالعه مطلوب برای یادگیری مطالب آن ضروری است بر این اساس از شما دانشجوی عزیز تقاضا می‌شود با توجه به نکات زیر مطالعه خود را آغاز کنید:

۱. مطالعه این کتاب را در محیطی آرام صورت دهید.
 ۲. مطالب این کتاب باید به طور منظم و با تعمق و فراگیری هر قسمت به ترتیب شماره‌گذاری کتاب صورت گیرد بنابراین قبل از فراگیری یک قسمت به قسمت دیگر نروید.
 ۳. در ابتدای هر فصل هدف‌های آموزشی فصل تنظیم شده است مرور آن قبل از شروع به مطالعه هر فصل اطلاعات کلی آن فصل را در اختیار شما خواهد گذاشت.
 ۴. در نگارش این کتاب قبل از بیان یک قضیه یا تعریف ابتدا توضیح داده شده است پس از توضیح، مطلب با مثال روش‌تر شده است. سپس قضیه یا تعریف مطرح و در صورت لزوم، قضیه اثبات شده است.
- به دنبال تعریف یا قضیه مثال‌های گوناگون و کاربردی آورده شده است تا مطلب کاملاً برای شما روشن شود، آخر سر یک یا چند تمرین ارائه شده است که شما باید

خودتان آن را حل کنید و پاسخ خود را با پاسخی که در پایان هر فصل آمده است مقایسه کنید. به دنبال آن، مطلب جدید ارائه شده است.

۵. دقت نمایید که در اولین فرصت اشکال شما برطرف گردد تا با سرعت کافی به ادامه مطالعه بپردازید.

۶. در پایان هر فصل تعدادی سؤال پاسخ‌گزینی و پاسخ‌نگاری به عنوان خودآزمایی آمده است این سؤالات مشتمل بر خلاصه‌ای از درس، نکات دقیق تعاریف و قضایا را یادآوری می‌کنند از طرف دیگر شاخصی برای ارزیابی فراگرفته‌های شما است بنابراین پس از مطالعه هر فصل، فراگرفته‌های خود را با این سؤالات بیازمایید. پاسخ خودآزمایی‌ها در پایان فصل آمده است.

۷. از مطالعه مجدد هر فصل یا هر قسمت، نگران نباشید، فراگیری کامل، موجب سرعت در فراگیری مطالب بعدی خواهد شد.

۸. تماس مستمر با استاد و مدرس درس و حضور مرتب در کلاس‌های رفع اشکال ضروری است، مطالبی که در این کلاس‌ها بررسی می‌شود، موجب نگرش عمیق‌تر شما به مطالب این درس خواهد شد.

۹. در انتهای هر فصل زندگینامه یک یا دو ریاضیدان را آورده‌ایم، مطالعه آنها را توصیه می‌کنیم.

۱۰. در پایان امید است با مطالعه دقیق مطالب این کتاب بتوانید به هدف‌های آموزشی آن دست یابید.

فصل اول

رابطه و تابع

هدف‌های آموزشی

پس از مطالعه و فراگیری این بخش باید بتوانید :

۱. زوج مرتب و رابطه را تعریف کنید.
۲. تابع را تعریف کنید و از میان رابطه‌های داده شده توابع را مشخص کنید.
۳. قلمرو یا دامنه توابع داده شده را به دست آورید.
۴. برابری دو تابع را تعریف کنید.
۵. با در اختیار داشتن دو تابع توابع جدیدی از مجموع، تفاضل، حاصلضرب، خارج قسمت و ترکیب آنها بسازید و دامنه آنها را مشخص کنید.
۶. تابع حقیقی، تابع ثابت، تابع همانی، تابع خطی، تابع فاکتوریل، تابع قدر مطلق و تابع جزء صحیح را تعریف کنید.
۷. تابع فرد و تابع زوج را تعریف کنید و برای هر یک مثالی بیاورید.
۸. تابع نمایی را تعریف کنید.
۹. لگاریتم یک عدد مثبت را تعریف کنید و از شش قضیه لگاریتم در حل مسائل استفاده نمایید.
۱۰. لگاریتم نپری را بیان کنید و رابطه‌ی آن را با لگاریتم اعشاری بنویسید.
۱۱. تابع مثلثاتی را تعریف کنید و اتحادهای مثلثاتی را بازخوانی نمایید و نمودار توابع مثلثاتی $y = \cot x$, $y = \tan x$, $y = \cos x$, $y = \sin x$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

۱۲. توابع یک به یک، توابع پوشا، توابع صعودی، توابع نزولی و توابع کراندار را تعریف کنید و برای هر یک مثالی بیاورید.

۱۳. با در اختیار داشتن توابع با ضابطه‌های معین، یک به یک و پوشا بودن آنها را مشخص کنید.

۱۴. وارون توابع داده شده را در صورت وجود به دست آورید.

۱۵. وارون توابع مثلثاتی را تعیین کنید و قلمرو و برد آنها را مشخص نمایید و نمودار آنها را رسم کنید.

۱. رابطه و تابع

۱.۱ مفهوم زوج مرتب

۱.۱.۱ مجموعه $\{a, b\}$ را در نظر می‌گیریم. چون در تعریف برابری مجموعه‌ها، ترتیب عناصر اهمیت ندارد، این مجموعه برابر مجموعه $\{b, a\}$ است. اما گاهی نیز لازم است مجموعه‌هایی با دو عنصر در نظر بگیریم که در آنها ترتیب اهمیت داشته باشد. مثلاً، در هندسه تحلیلی، مختصات (x, y) یک نقطه، نمایشگر زوج مرتبی از عددها است. نقطه $(1, 3)$ غیر از نقطه $(3, 1)$ است

۲.۱.۱ تعریف. دسته‌ای از اشیاء دوتایی با ترتیب معین را زوج مرتب می‌گوییم. در زوج مرتب (x, y) ، x را مختص اول (مؤلفه اول) و y را مختص دوم (مؤلفه دوم) می‌نامیم.

۳.۱.۱ تعریف. دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) را برابر می‌گوییم اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$.

۴.۱.۱ مجموعه $A = \{(2, 2), (2, 5), (3, 7)\}$ را در نظر بگیرید هر یک از زوج‌های مرتب $(2, 2)$ و $(2, 5)$ و $(3, 7)$ عضو این مجموعه است، یعنی $(3, 7) \in A$ و $(2, 2) \in A$ و $(2, 5) \in A$ ، اما بنابر تعریف برابری زوج‌های مرتب، هیچ یک از زوج‌های مرتب $(5, 2) \in A$ و $(7, 3) \in A$ عضو A نیست یعنی $(5, 2) \notin A$ ، $(7, 3) \notin A$.

۲.۱ مفهوم رابطه

۱.۲.۱ در ریاضیات مکرر به عبارت‌هایی نظیر عبارت‌های زیر بر می‌خوریم :

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ و } xy = 5 \text{ و } x < 2y$$

که هر یک از آنها مجموعه‌ی مشخصی از زوج‌های مرتب عددی حقیقی را معین می‌کند، یعنی مجموعه همه زوج‌های مرتبی مانند (x, y) که در آن عبارت صدق می‌نمایند. سه زوج مرتب متعلق به $x^2 + y^2 = 4$ عبارت‌اند از $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(1, \sqrt{3})$. مجموعه‌هایی که اعضا آنها زوج‌های مرتب هستند اهمیت خاصی دارند.

۲.۲.۱ تعریف. هر مجموعه از زوج‌های مرتب را یک رابطه دوتایی یا یک رابطه می‌نامیم. اگر R یک رابطه باشد و $(x, y) \in R$ ، آنگاه می‌نویسیم xRy و می‌خوانیم x رابطه R به y دارد یا بین x و y رابطه R برقرار است و یا x, R را به y نسبت می‌دهد.

۳.۲.۱ مثال. (الف) مجموعه $\{(انکارا و ترکیه) و (پاریس و فرانسه) و (تهران و ایران)\}$ $R =$ یک رابطه است و هر یک از زوج‌های مرتب داخل آکولاد یک عضو آن می‌باشد، مثلاً $R \in$ (پاریس و فرانسه) و یا پاریس R فرانسه، همچنین ایران رابطه R به تهران دارد و R ترکیه را به آنکارا نسبت می‌دهد

(ب) هر یک از مجموعه‌های زیر یک رابطه است :

$$۱. R = \{(a, b), (3, 4)\}, f = \{(x, y) | x, y \in R, y = 3x + 1\}$$

$$۳. g = \{(x, y) | x, y \in R, x^2 + y^2 = 9\}$$

۴.۲.۱ چون هر رابطه یک مجموعه است، می‌توان مفاهیم و احکام مربوط به مجموعه‌ها را در مورد رابطه به کار برد.

۵.۲.۱ به هر رابطه سه مجموعه مهم وابسته است که در زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم R یک رابطه باشد

(الف) مجموعه همه مختصات اول عناصر R را حوزه تعریف، قلمرو یا دامنه R

گفته و آن را با $\text{dom}R$ نشان می‌دهیم.

(ب) مجموعه همه مختصات دوم عناصر R را حوزه مقادیر یا برد R گفته و آن

را با $\text{Rang}R$ نشان می‌دهیم.

(پ) مجموعه همه مختصات اول و دوم عناصر R را میدان R گفته و آن را با

$\text{fld}R$ نشان می‌دهیم.

۶.۲.۱ مثال. فرض کنیم $R = \{(5, 4), (3, 1), (4, 7)\}$ داریم :

$$\text{dom}R = \{5, 3, 4\} \quad \text{Rang}R = \{4, 1, 7\} \quad \text{fld}R = \{3, 4, 5, 7, 1\}$$

۳.۱ تابع

۱.۳.۱ در این قسمت یک دسته خاص از رابطه‌ها را که تابع نامیده می‌شوند معرفی می‌کنیم. قبل از تعریف دقیق تابع مثالی می‌آوریم. در رابطه $R = \{(2,5), (2,6), (6,7)\}$ زوج‌های مرتب $(2,5) \in R$ و $(2,6) \in R$ دارای مختص اول یکسانند ولی مختصات دومشان متفاوت است اما رابطه $F = \{(2,5), (4,1), (2^2, 1), (0,5)\}$ دارای این خاصیت است که هر دو عضو آن که مختصات اولشان با هم برابرند مختصات دومشان نیز با هم برابرند به عبارت دیگر، اگر $(x,y) \in f$ و $(x,z) \in f$ ، آنگاه $y = z$. چنین رابطه‌ای را تابع گویند.

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم قلمرو رابطه f مجموعه A و برد آن مجموعه B باشد، رابطه f را یک تابع از A به B می‌گوییم اگر :

الف) برای هر عنصر $x \in A$ عنصری (منحصر به فرد) مانند $y \in B$ وجود داشته باشد به طوری که $(x,y) \in f$ ، به عبارت دیگر f باید هر یک از عناصر A را به عنصری (منحصر به فرد) از B نسبت دهد.

ب) اگر $(x,y) \in f$ و $(x,z) \in f$ آنگاه $y = z$. یعنی f هر یک از عناصر A را تنها به یک عنصر از B نسبت دهد. (قسمت ب نتیجه‌ای از واژه منحصر به فردی در الف است)

۳.۳.۱ قلمرو تابع f را با نماد D_f و برد آن را با نماد R_f نشان می‌دهیم در ۲.۳.۱ داریم:

$$D_f = A, R_f = B$$

۴.۳.۱ از تعریف تابع معلوم می‌شود که به ازای هر x از قلمرو f ، تنها یک عنصر مانند y هست که $(x,y) \in f$. معمولاً y را مقدار f در x می‌نامیم و به جای $(x,y) \in f$ می‌نویسیم: $y = f(x)$. x را متغیر و $f(x)$ را تصویر x توسط f می‌نامیم.

۵.۳.۱ یک تابع به وسیله رابطه f و قلمرو و برد آن مشخص می‌شود، معمولاً روش کلی مشخص کردن یک تابع این است که اولاً قلمرو تابع را مشخص می‌کنند، ثانیاً ضابطه‌ای برای تعیین مقدار تابع به ازای هر عضو قلمرو به دست می‌دهند. تابع $f = \{(x, 2x-1) \mid x \in R\} = \{(x,y) \mid x \in R, y = 2x-1\}$ را که قلمرو برد آن اعداد حقیقی است به صورت زیر نشان می‌دهیم: $f(x) = 2x-1, x \in R$.

تابع $f = \{(1,1)(2,4)(3,9), \dots, (n,n^2)\}$ را که قلمرو و برد آن اعداد طبیعی

رابطه و تابع ۵

است می توان به صورت زیر نشان داد: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$.

۶.۳.۱ مثال. فرض کنیم متغیر x طول‌هایی برابر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را اختیار کند و y مساحت مربع‌هایی به ضلع x باشد در این صورت ضابطه تابع برابر است با:

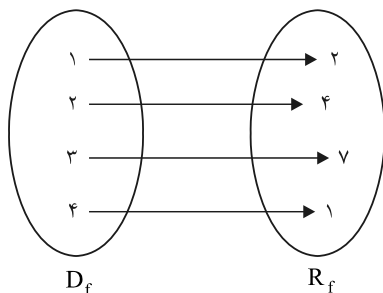
$$y = f(x) = x^2 \text{ و داریم: } f = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25)\}$$

۷.۳.۱ مثال. رابطه $f = \{(1,2), (2,4), (3,7), (4,1)\}$ را در نظر می‌گیریم روشن

است که: $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R_f = \{2, 4, 7, 1\}$.

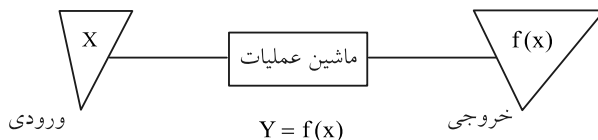
هر عنصر از مجموعه D_f فقط به یک عنصر از مجموعه R_f توسط f نسبت داده شده است، پس f یک تابع است. در این مثال، تابع بودن رابطه f با بررسی زوج‌های مرتب انجام گرفت. اما وقتی یک رابطه با ضابطه‌ای تعریف شده باشد، برای تشخیص اینکه آن رابطه تابع هست یا نه، به تعریف تابع متوسل می‌شویم. رابطه $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, 5x + 4y = 7\}$ را در نظر می‌گیریم. اولاً f در شرط الف تعریف تابع صدق می‌کند. ثانیاً فرض کنیم $(x, y) \in f$, $(x, z) \in f$ داریم: $5x + 4y = 7$ و $5x + 4z = 7$ یا $5x + 4z = 5x + 4y$ پس در نتیجه f در شرط ب تعریف تابع نیز صدق می‌کند یعنی f یک تابع است.

به نمودار پیکانی این رابطه که در زیر رسم شده است توجه کنید:



شکل ۱.۱

۸.۳.۱ گفتیم که هر تابع باید به هر عنصر از قلمرو عنصر یکتایی از برد را نسبت دهد لذا هر تابع را می‌توان به عنوان یک ماشین در نظر گرفت به طوری که ورودی این ماشین عناصر قلمرو تابع و خروجی آن اعضای برد تابع هستند.



۹.۳.۱ تمرین. کدامیک از روابط زیر یک تابع است ؟ دلیل آن را بیان کنید.

$$1. f = \{(1, 2), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 3), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 4)\} \quad 2. g = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < 2y\}$$

$$3. h = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y^2 - x^2 = 9\} \quad 4. k = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = \frac{3}{x^2 + 4}\}$$

۱۰.۳.۱ گاهی پیش می آید که در تابع $y = f(x)$ نقش x را به متغیر دیگری محول کنیم، مثلاً وقتی می گوئیم $f(5x)$ یعنی $5x$ در نقش x است و وقتی عبارت $f(x, y)$ را به صورت $f(a, y)$ می نویسیم یعنی نقش x را به a محول کرده ایم.

۱۱.۳.۱ مثال. فرض کنیم $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ، می خواهیم مقادیر $f(0)$ ، $f(-x)$ و $f(x+1)$ را

تعیین کنیم

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{x+2}, \quad f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1, \quad f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}$$

۱۲.۳.۱ تمرین

۱. اگر $f(x) = x^2$ عبارت $\frac{f(x+2)-f(2)}{2}$ را حساب کنید.

۲. اگر $f(x) = x^3 - 1$ ، نشان دهید $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = b^2 + ab + a^2$.

۳. اگر $f(x) = \sqrt{x-4}$ مطلوبست محاسبه : $f(4)$ ، $f(x+4)$ ، $f(x^2+4)$ و $f(f(20))$.

۴.۱ برابری دو تابع

۱.۴.۱ دو تابع f و g را برابر می گوئیم اگر :

۱. قلمرو آنها برابر باشد، یعنی $D_f = D_g$.

۲. به ازای هر x از قلمرو مشترک آنها مقدار دو تابع برابر باشند یعنی $f(x) = g(x)$.

۲.۴.۱ مثال. توابع $f(x) = \frac{x^2-2x}{x}$ و $g(x) = x+2$ برابر نیستند زیرا $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R}$.

$D_g = \mathbb{R}$ یکی نیستند. اما توابع $f(x) = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)}$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)$ برابرند زیرا

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \quad \text{به علاوه به ازای هر } x \text{ از } \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)$$

۳.۴.۱ تمرین. در هر یک از تمرین های زیر دو تابع داده شده است. تعیین کنید آیا این

توابع مساوی هستند یا نه ؟

$$1. f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{x-2}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{2x^2-1} \quad x \in (1, 2), \quad f(x) = \frac{1}{2x-1} \quad x \in (1, 2) \quad ۲.$$

۵.۱ جبر توابع و انواع توابع

۱.۵.۱ تعریف. فرض کنیم f و g توابعی با قلمروهای D_f و D_g باشند توابع جدید

$f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به ترتیب مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت

f و g می نامیم و آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad , \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$$

۲.۵.۱ مثال. فرض کنیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$

$$D_g = \{x \mid 2-x \geq 0\} = (-\infty, 2] \quad , \quad D_f = \{x \mid x-1 \geq 0\} = [1, +\infty)$$

بنابراین قلمرو توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ عبارت است از :

$$D_f \cap D_g = [1, +\infty) \cap (-\infty, 2] = [1, 2]$$

برابر است با $[1, 2]$ داریم:

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x-1} \pm \sqrt{2-x} \quad x \in [1, 2]$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)} \quad x \in [1, 2]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \quad x \in [1, 2)$$

۳.۵.۱ تعریف. برای دو تابع f و g ، تابع مرکب، که با $f \circ g$ نمایش داده می شود، به

وسیله $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعریف می شود و قلمرو آن عبارت است از :

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۴.۵.۱ مثال. توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 1$ را در نظر بگیرید. توابع مرکب زیر

همچنین قلمرو آنها را به دست آورید.

الف) $g \circ f$

ب) $f \circ g$