



دانشگاه سیام نور
پی

ریاضیات کاربردی

(رشته علم اطلاعات و دانش‌شناسی)

حمیده اسکندری

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

نه	پیشگفتار مؤلف
۱	فصل اول: ریاضیات پایه
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۱	مقدمه
۲	۱-۱ ماتریس
۲	۱-۱-۱ ماتریس‌های خاص
۳	۱-۱-۲ اعمال جبری روی مجموعه‌ها
۵	۱-۱-۳ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
۷	۲-۱ دستگاه معادلات خطی
۸	۱-۲-۱ حل دستگاه معادلات خطی به روش ماتریس‌ها
۹	۲-۲-۱ حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی
۱۰	۳-۱ حد و پیوستگی
۱۲	۱-۳-۱ قضیه‌های حد
۱۶	۲-۳-۱ حدهای بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
۱۸	۳-۳-۱ پیوستگی
۲۰	۴-۱ مشتق
۲۰	۱-۴-۱ قضیه‌های مشتق
۲۲	۲-۴-۱ مشتق توابع مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی
۲۴	۳-۴-۱ مشتق مرتبه‌های بالاتر
۲۵	۴-۴-۱ مشتق‌های جزئی
۲۶	۵-۱ انتگرال
۲۷	۱-۵-۱ قضیه‌های انتگرال‌گیری

۳۲	۱-۵-۲ روش های انتگرال گیری
۳۹	۱-۵-۳ انتگرال معین
۴۱	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل اول
۴۶	سؤالات تشریحی فصل اول
۵۳	فصل دوم: دنباله و سری
۵۳	هدف کلی
۵۳	هدف های یادگیری
۵۳	مقدمه
۵۴	۲-۱ دنباله
۵۵	۲-۱-۱ تعریف ها
۵۸	۲-۱-۲ قضیه ها
۵۹	۲-۲ سری
۶۰	۲-۲-۱ هم گرایی و واگرایی
۶۲	۲-۲-۲ آزمون های هم گرایی
۶۵	۲-۳ سری توان
۶۷	۲-۳-۱ پیوستگی، مشتق و انتگرال سری توان
۷۰	۲-۳-۲ سری تیلور و ماکلورن
۷۲	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل دوم
۷۷	سؤالات تشریحی فصل دوم
۸۱	فصل سوم: سری فوریه
۸۱	هدف کلی
۸۱	هدف های یادگیری
۸۱	مقدمه
۸۲	۳-۱ یادآوری
۸۸	۳-۲ سری فوریه
۸۹	۳-۳ محاسبه ضرایب سری فوریه
۹۳	۳-۴ حالت های خاص سری فوریه
۹۳	۳-۴-۱ سری فوریه برای توابع با دوره تناوب 2π
۹۵	۳-۴-۲ سری فوریه کسینوسی
۹۷	۳-۴-۳ سری فوریه سینوسی
۱۰۴	خودآزمایی چهارگزینه ای فصل سوم
۱۰۷	سؤالات تشریحی فصل سوم
۱۰۹	فصل چهارم: معادلات دیفرانسیل
۱۰۹	هدف کلی

۱۰۹	هدف‌های یادگیری
۱۱۰	مقدمه
۱۱۰	۱-۴ تعریف
۱۱۳	۲-۴ معادله دیفرانسیل مرتبه اول
۱۱۳	۱-۲-۴ معادله دیفرانسیل جداشدنی
۱۱۶	۲-۲-۴ معادله دیفرانسیل همگن
۱۲۱	۳-۲-۴ معادله دیفرانسیل کامل
۱۲۵	۴-۲-۴ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول
۱۲۶	۳-۴ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم
۱۲۶	۱-۳-۴ کاهش مرتبه معادله فاقد y
۱۲۸	۲-۳-۴ کاهش مرتبه معادله فاقد x
۱۳۲	۳-۳-۴ معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت
۱۳۵	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۱۳۹	سؤالات تشریحی فصل چهارم
۱۴۳	فصل پنجم: دستگاه معادلات دیفرانسیل
۱۴۳	هدف کلی
۱۴۳	هدف‌های یادگیری
۱۴۳	مقدمه
۱۴۴	۱-۵ تعریف
۱۴۴	۲-۵ روش حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی
۱۴۷	۱-۲-۵ روش حذفی
۱۵۰	۲-۲-۵ روش عملگرها
۱۵۵	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم
۱۵۷	سؤالات تشریحی فصل پنجم
۱۵۹	پاسخنامه
۱۶۱	منابع

تقدیم به استاد بزرگوارم پروفسور بهمن مهری

پیشگفتار مؤلف

درس ریاضیات کاربردی برای رشته علم اطلاعات و دانش‌شناسی، یک درس دوواحدی است که در این کتاب تلاش شده، اکثر سرفصل‌های مصوب و تعیین‌شده از طرف وزارت علوم در آن رعایت شود. پیش‌نیاز این درس، ریاضی عمومی است ولی سعی شده که قبل از شروع مبحث اصلی درس، مقدمه‌ای به‌طور خلاصه از موضوعات لازم برای درس، ارائه شود.

سرفصل‌های تعیین‌شده برای رشته علم اطلاعات و دانش‌شناسی شامل معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، سری‌های فوریه، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و احتمالات است.

مباحث کتاب، شامل این مطالب است، فصل اول مقدمه‌ای برای یادآوری ریاضیات عمومی است و درواقع آشنایی با حساب دیفرانسیل و انتگرال است که با عنوان ریاضیات پایه معرفی شده‌است. در این فصل، ماتریس‌ها و اعمال جبری روی آن‌ها، دستگاه معادله خطی، حد، مشتق و انتگرال به صورت خلاصه و به زبان بسیار ساده بیان شده‌است. فصل دوم به تعریف دنباله، سری و سری توان می‌پردازد. در این فصل به چگونگی یافتن بسط تیلور یک تابع و بسط ماکلورن یک تابع اشاره شده‌است. تعریف سری فوریه و طرز یافتن آن در فصل سه به آن اشاره شده‌است. فصل چهار

درباره معادلات دیفرانسیل و انواع آن است. در این فصل از چند نوع معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی نام برده شده و روش حل آن‌ها بیان شده است و در آخر، در فصل پنجم مختصری از دستگاه معادلات دیفرانسیل و حل آن‌ها صحبت شده است.

بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر شهریار فرهنگ راد برای ویراستار علمی کتاب و راهنمایی‌های ارزنده‌شان تشکر کنم. و همچنین از جناب آقای دکتر علی حبیبی مؤخر برای تدریس آزمایشی مباحث این کتاب، قبل از چاپ کتاب و یادآوری اشکالات کتاب به اینجانب، قدردانی کنم.

به‌طورحتم، این کتاب دارای اشکالاتی است بنابراین از همه استادان و همکاران ارجمند، دانشجویان عزیز و خوانندگان محترم خواهشمند است نظرات، راهنمایی‌ها، انتقادهای و پیشنهادهای سازنده خود را در ارتباط با مطالب کتاب به آدرس h_eskandari@pnu.ac.ir ارسال فرمایند.

حمیده اسکندری

عضو هیئت علمی دانشگاه پیام‌نور

تابستان ۱۳۹۷

فصل اول

ریاضیات پایه

هدف کلی

هدف این فصل یادآوری پیش نیازهای ریاضی برای یادگیری بهتر فصل های آتی است.

هدف های یادگیری

- در پایان این فصل انتظار می رود دانشجو با مفهوم مطالب زیر آشنا شده باشد.
۱. ماتریس و اعمال جبری روی آن ها را بداند.
 ۲. دستگاه معادله خطی و طرز یافتن جواب دستگاه معادلات خطی را شرح دهد.
 ۳. مفهوم حد یک تابع را بتواند توضیح دهد.
 ۴. مشتق و طرز پیدا کردن مشتق تابع را بداند.
 ۵. بتواند مشتق مراتب بالاتر و مشتقات جزئی یک تابع را به دست آورد.
 ۶. با انتگرال و روش به دست آوردن انتگرال تابع آشنا باشد.

مقدمه

در فصل اول ابتدا به مفهوم ماتریس و کاربرد آن در حل دستگاه معادلات خطی می پردازیم و سپس به سراغ مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال می رویم. مفهوم حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال از مفاهیم اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند که در این فصل تعریف آن ها را با زبان ساده بیان می کنیم و این تعاریف را با بیان بسیار ساده ریاضی به همراه چند مثال توضیح می دهیم. برای توضیحات بیشتر درباره حساب دیفرانسیل و انتگرال می توانید به کتاب های [۱] و [۳] مراجعه کنید.

۱-۱ ماتریس

به آرایشی منظم از اعداد، یک ماتریس^۱ گوئیم. این آرایش منظم، ممکن است به صورت مربعی یا مستطیلی باشد. به عنوان مثال، آرایش زیر از اعداد یک ماتریس است و هر یک از اعداد این ماتریس را یک درایه ماتریس گوئیم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۵ & ۷ \\ ۶ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

به طور معمول هر ماتریس را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهیم. شکل کلی یک ماتریس را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

که در آن m تعداد سطرها و n تعداد ستون های ماتریس است و با نماد $A_{m \times n}$ نشان داده می شود. ماتریس A را یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ (m در n) می خوانیم.

۱-۱-۱ ماتریس های خاص

ماتریس صفر: ماتریسی که همه درایه های آن صفر باشد را ماتریس صفر گوئیم و آن را با نماد O نمایش می دهیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی: به ماتریس با n سطر و n ستون ماتریس

همانی^۲ (یکه یا واحد) از مرتبه n گوئیم و آن را با نماد I_n نمایش می دهیم.

بردار ستونی و بردار سطری: به ماتریس با یک ستون، بردار ستونی^۳ و ماتریسی با یک سطر، بردار سطری^۴ گوئیم.

1. Matrix
2. Identity Matrix
3. Column Vector
4. Row Vector

ماتریس مربعی: در صورتی که تعداد سطرها و تعداد ستون‌های یک ماتریس برابر باشند ماتریس را ماتریس مربعی گوئیم.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر باشند را یک ماتریس قطری^۱ گوئیم.

تساوی دوماتریس: دوماتریس باهم مساویند اگر هم‌مرتبه بوده و درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم مساوی باشند. به‌عنوان مثال دوماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۰ \\ -۵ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۰ \\ -۵ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ با یکدیگر مساوی هستند ولی دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ نامساوی هستند.

۱-۲ اعمال جبری روی مجموعه‌ها

جمع دوماتریس: دوماتریس دارای یک‌مرتبه را می‌توان با یکدیگر جمع کرد. در این صورت درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس با هم جمع می‌شوند. به‌عنوان مثال

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۳ & -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۲ \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۵ \\ -۵ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در ماتریس: برای ضرب یک عدد در ماتریس، کافی است تمام درایه‌های ماتریس را در آن عدد ضرب کنیم. به‌عنوان مثال

$$۳ \begin{bmatrix} -۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ & -۳ & ۰ \\ ۹ & ۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

قرینه ماتریس: اگر $A_{m \times n}$ یک ماتریس باشد، به حاصل $(-1)A_{m \times n}$ قرینه ماتریس A گوئیم و با نماد $-A$ نمایش می‌دهیم.

ضرب دوماتریس: برای ضرب دوماتریس در یکدیگر باید تعداد سطرهاى ماتریس اول با تعداد ستون‌های ماتریس دوم برابر باشد. برای توضیح ضرب دوماتریس از مثال زیر استفاده می‌کنیم.

$$\text{مثال ۱-۱. حاصل ضرب } \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \text{ را به دست آورید.}$$

حل: حاصل ضرب این دو ماتریس به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 1 + (-1) \times 2 \\ 3 \times 1 + (-2) \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال ۱-۲. حاصل $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + (-1) \times 0 + 0 \times 3 & 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + 0 \times (-2) \\ 3 \times 4 + (-2) \times 0 + 1 \times 3 & 3 \times (-1) + (-2) \times 1 + 1 \times (-2) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 15 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وارون ماتریس^۱: برای دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B در صورتی که $AB = BA = I$ باشد ماتریس B را ماتریس وارون (معکوس) ماتریس A می نامیم و آن را با نماد A^{-1} نمایش می دهیم.

برای یک ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از مرتبه ۲ نشان می دهند

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

در محاسبه وارون ماتریس A ، به مقدار $ad-bc$ ، دترمینان ماتریس A می گوئیم و آن را با نماد $\det A$ نمایش می دهیم.

بنابراین اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ و $\det A = 1$ است.

۱-۳-۱-۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقدار λ ، مقدار ویژه^۱ ماتریس A است هرگاه بردار غیرصفر X در $AX = \lambda X$ صدق کند. در این صورت به بردار X بردار ویژه^۲ نظیر λ گوئیم.

برای یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بدین روش عمل می‌کنیم. ابتدا کافی است ریشه‌های معادله $\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$ را به‌عنوان مقادیر ویژه به‌دست آوریم و سپس درایه‌ها یا مؤلفه‌های بردار ویژه را پیدا می‌کنیم.

به معادله حاصل از $\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$ که یک چندجمله‌ای است چندجمله‌ای مشخصه گوئیم.

مثال ۱-۳. مقادیر و بردارهای ویژه هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

حل: برای هر ماتریس ابتدا چندجمله‌ای مشخصه را پیدا کرده و سپس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را می‌یابیم.

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ (الف) برای یافتن مقادیر ویژه کافی است ریشه‌های}$$

را بیابیم. حاصل این دترمینان که همان چندجمله‌ای مشخصه ماتریس است $0 = (-1-\lambda)(5-\lambda) - (-2)(4)$ می‌شود. پس داریم

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 + 8 = 0$$

پس از ساده‌کردن به چندجمله‌ای مشخصه $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ می‌رسیم و

بنابراین ریشه‌ها عبارت‌اند از $\lambda = 1$ و $\lambda = 3$. این دو ریشه مقادیر ویژه ماتریس A

هستند. برای یافتن بردارهای ویژه از $AX = \lambda X$ استفاده می‌کنیم. اگر بردار غیرصفر

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ باشد داریم}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با ضرب ماتریس‌ها در یکدیگر می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

پس داریم $-x_1 + 4x_2 = \lambda x_1$ و $-2x_1 + 5x_2 = \lambda x_2$ ، که به‌ازای $\lambda = 1$ و $\lambda = 3$ مقادیر مجهول را به‌دست می‌آوریم.

اگر $\lambda = 1$ باشد به $-x_1 + 4x_2 = x_1$ و $-2x_1 + 5x_2 = x_2$ می‌رسیم که از اینجا

$$X = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می‌شود. یعنی بردار ویژه نظیر } \lambda = 1, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می‌شود.}$$

اگر $\lambda = 3$ باشد به $-x_1 + 4x_2 = 3x_1$ و $-2x_1 + 5x_2 = 3x_2$ می‌رسیم که از

$$\text{اینجا } X = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می‌شود. یعنی بردار ویژه نظیر } \lambda = 3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می‌شود.}$$

پس برای مقدار ویژه $\lambda = 1$ بردار ویژه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و برای مقدار ویژه نظیر $\lambda = 3$

بردار ویژه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را داریم.

(ب) برای یافتن مقادیر ویژه کافی است ریشه‌های $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$ را

بیابیم. حاصل این دترمینان که همان چندجمله‌ای مشخصه ماتریس است

$$= 0 \text{ می‌شود. پس چندجمله‌ای مشخصه عبارت‌اند از}$$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 - 8 = 0$$

پس از ساده‌کردن به چند جمله‌ای مشخصه $\lambda^2 - 9 = 0$ می‌رسیم و بنابراین

ریشه‌ها عبارت‌اند از $\lambda = 3$ و $\lambda = -3$. این دو ریشه مقادیر ویژه ماتریس B هستند.

برای یافتن بردارهای ویژه از $BX = \lambda X$ استفاده می‌کنیم. اگر بردار غیرصفر

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ باشد داریم}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با ضرب ماتریس‌ها در یکدیگر می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

پس داریم $x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$ و $4x_1 - x_2 = \lambda x_2$ ، که به ازای $\lambda = 3$ و $\lambda = -3$ مقادیر مجهول را به دست می‌آوریم.

اگر $\lambda = 3$ باشد به $x_1 + 2x_2 = 3x_1$ و $4x_1 - x_2 = 3x_2$ می‌رسیم که از اینجا

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می‌شود. یعنی بردار ویژه نظیر } \lambda = 3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می‌شود.}$$

اگر $\lambda = -3$ باشد به $x_1 + 2x_2 = -3x_1$ و $4x_1 - x_2 = -3x_2$ می‌رسیم که از اینجا

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ می‌شود. یعنی بردار ویژه نظیر } \lambda = -3, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ می‌شود.}$$

پس برای مقدار ویژه $\lambda = 3$ بردار ویژه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و برای مقدار ویژه نظیر $\lambda = -3$

بردار ویژه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ را داریم.

۲-۱ دستگاه معادلات خطی

به مجموعه چند معادله خطی، یک دستگاه معادلات خطی گوئیم. در حالت کلی یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

به این دستگاه معادلات خطی، یک دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول گوئیم. ولی ما در اینجا فقط به حل دستگاه دو معادله، دو مجهول بسنده می‌کنیم، یعنی می‌خواهیم راه حل دستگاه معادلات زیر را بیان کنیم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

حل یک دستگاه معادله روش‌های گوناگونی دارد که در این قسمت، دو روش برای حل این نوع دستگاه‌ها ارائه می‌دهیم.

۱-۲-۱ حل دستگاه معادلات خطی به روش ماتریس‌ها

دستگاه دو معادله و دو مجهول را به این صورت می‌نویسیم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

برای حل، می‌توان این دستگاه را با استفاده از تساوی ماتریس‌ها به صورت زیر

نوشت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

اگر در رابطه فوق $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ باشد، می‌توان

رابطه ماتریس $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ را نوشت. به ماتریس $\mathbf{A}$ ، ماتریس ضرایب و به بردار $\mathbf{b}$ ، بردار مقادیر سمت راست گوئیم.

برای یافتن بردار مجهول $\mathbf{X}$ کافی است داشته باشیم $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. پس با داشتن

وارون ماتریس $\mathbf{A}$ و ضرب آن در بردار $\mathbf{b}$ ، می‌توان مقادیر مجهول را محاسبه کرد.

مثال ۱-۴. جواب هریک از دستگاه معادلات خطی زیر را به روش ماتریس‌ها

به دست آورید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

حل: (الف) ابتدا شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی را می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس ضرایب $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ خواهد بود و بنابراین بردار

مجهولات عبارت‌اند از

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پس $x_1 = 2$ و $x_2 = -1$ می‌شود.

(ب) ابتدا شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی را می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس ضرایب $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ خواهد بود و بنابراین بردار

مجهولات عبارت‌اند از

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پس $x_1 = -3$ و $x_2 = 2$ می‌شود.

۱-۲-۲ حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی

در این روش با ضرب (تقسیم) طرفین هر معادله در عددی مناسب و سپس جمع طرفین معادله‌ها، یکی از مجهولات را حذف می‌کنیم و به یک معادله یک مجهولی می‌رسیم. با حل این معادله درجه اول یک مجهولی، مقدار یکی از مجهولات به‌دست آمده و با قراردادن این مقدار در یکی از معادلات دستگاه، مقدار مجهول دیگر را نیز به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱-۵. جواب هریک از دستگاه معادلات خطی زیر را به روش حذفی به‌دست آورید.

$$\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{(الف)} \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

حل: (الف) ابتدا تصمیم می‌گیریم که متغیر x را حذف کنیم. بنابراین با ضرب معادله دوم در عدد (-۶) و جمع معادله اول با معادله حاصل به دستگاه زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ -6x - 6y = -6 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ -6x - 6y = -6 \end{cases} \Rightarrow -y = 1$$

و بنابراین داریم $y = -1$. مقدار به‌دست آمده را در یکی از معادلات قرار می‌دهیم تا مقدار مجهول دیگر به‌دست آید. پس $6x + 5(-1) = 7$ و بنابراین $x = 2$. بنابراین $(x, y) = (2, -1)$ جواب دستگاه معادله خواهد بود.

(ب) ابتدا تصمیم می‌گیریم که متغیر x را حذف کنیم. بنابراین با ضرب معادله اول در عدد (-۳) و جمع معادله دوم با معادله حاصل به دستگاه زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 6y = -3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -3x - 6y = -3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow -y = -2$$

و بنابراین داریم $y = 2$. مقدار به‌دست آمده را در یکی از معادلات قرار می‌دهیم تا مقدار مجهول دیگر به‌دست آید. پس $x + 2(2) = 1$ و بنابراین $x = -3$. از این رو $(x, y) = (-3, 2)$ جواب دستگاه معادله خواهد بود.

۳-۱ حد و پیوستگی

یکی از مفاهیم اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال، حد است و در تعریف پیوستگی، مشتق و انتگرال استفاده می‌شود. می‌توان مفهوم حد را با یک مثال ساده به این صورت بیان کرد که اگر رشته اعداد $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ را در نظر بگیرید و همین‌طور این رشته اعداد را به همین حالت ادامه دهید، به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوید، ولی هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسید. در این صورت، در اصطلاح گوییم صفر حد این رشته اعداد است.

درحقیقت، حد^۱ به معنی بررسی رفتار یک تابع در اطراف و نزدیک به یک نقطه معین و نه به طور دقیق همان نقطه است. به بیان ریاضی، فرض کنید در تابع با ضابطه $y = f(x)$ ، متغیر x به یک عدد ثابت a میل می‌کند (یعنی به آن نزدیک می‌شود ولی به آن نمی‌رسد) آنگاه اگر مقدار تابع f ، به عدد ثابت L میل کند، L حد تابع f در نقطه a خواهد بود و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

مثال ۱-۶. رفتار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را در نزدیکی نقطه به طول ۲ و نیز خود نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

حل: برای بررسی رفتار تابع در $x = 2$ ، کافی است به جای تمام x ها، مقدار ۲ قرار دهیم که خواهیم داشت

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

این جواب تعریف نشده است.

حال رفتار تابع را نزدیک ۲ بررسی می کنیم. اگر برای بررسی از یک ماشین حساب استفاده کنیم، می توان نتایج به دست آمده را در جدول ۱-۱ نوشت.

جدول ۱-۱.

x	$f(x)$
۳	۵
۲/۵	۴/۵
۲/۱	۴/۱
۲/۰۱	۴/۰۱
۲/۰۰۱	۴/۰۰۱
...	...
۲	تعریف نشده
...	...
۱/۹۹۹	۳/۹۹۹
۱/۹۹	۳/۹۹
۱/۹	۳/۹
۱/۷	۳/۷
۱/۵	۳/۵
۱	۳

در جدول ۱-۱ مشاهده می شود که وقتی مقادیر x ، با مقادیر بیشتر از ۲ (سمت راست عدد ۲) به عدد ۲ نزدیک می شوند مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می شوند. در این حالت گوییم حد راست تابع f در نقطه ۲ برابر ۴ است و آن را با نماد $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ نشان می دهیم.