



ریاضیات مهندسی

(رشته مهندسی کامپیوتر)

دکتر مسعود ساروی دکتر مسعود شفیعی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

فصل اول: اعداد مختلط

۱	مقدمه
۲	۱-۱ مفاهیم و تعاریف اولیه
۶	۲-۱ نمایش اعداد مختلط
۱۱	۳-۱ توان‌ها و ریشه‌ها
۱۶	خلاصه فصل ۱
۱۶	تمرین‌ها

فصل دوم: متغیرهای مختلط

۲۱	مقدمه
۲۱	۱-۲ برخی از مفاهیم توپولوژی در صفحه مختلط
۲۴	۲-۲ متغیر و تابع مختلط
۲۶	۳-۲ حد و پیوستگی
۲۸	۴-۲ مشتق
۲۹	۵-۲ معادلات کوشی - ریمان
۳۲	۶-۲ توابع تحلیلی - توابع همساز
۳۴	۷-۲ عملگرها
۳۷	خلاصه فصل ۲

فصل سوم: توابع غیر مقدماتی جبری

۴۱	مقدمه
۴۳	۳-۱ تابع نمایی
۴۳	۳-۲ توابع مثلثاتی
۴۵	۳-۳ توابع هذلولوی (هیپربولیک)
۴۷	۳-۴ تابع لگاریتمی
۵۱	۳-۵ تابع نمایی مختلط
۵۲	۳-۶ توابع مثلثاتی و هذلولوی وارون
۵۳	۳-۷ نگاشت به وسیله‌ی توابع مقدماتی
۶۰	خلاصه فصل ۳
۶۱	تمرین‌ها

فصل چهارم: انتگرال‌گیری در صفحات مختلط

۶۵	مقدمه
۶۵	۴-۱ انتگرال خط
۶۹	قضیه گرین
۷۰	۴-۲ قضیه کوشی
۷۳	قضیه ۱ (کوشی - گورسا)
۷۳	۴-۳ چند نتیجه از قضیه کوشی - گورسا
۷۷	۴-۴ فرمول انتگرال کوشی و تعمیم آن
۸۰	پیامد ۱ (قضیه مورآ Morea)
۸۰	پیامد ۲ (نامساوی کوشی)
۸۱	پیامد ۳ (قضیه لیوویل Liouville)
۸۲	پیامد ۴ (قضیه مقدار میانگین گوس)
۸۴	خلاصه فصل ۴
۸۴	تمرین‌ها

فصل پنجم: سری مختلط، قضیه مانده‌ها و کاربرد آنها در حل انتگرال‌ها

۸۹	مقدمه
۹۰	۵-۱ دنباله‌ها و سری‌ها

۹۳	آزمون نسبت
۹۳	آزمون ریشه
۹۳	آزمون رابه
۹۳	آزمون مقایسه
۹۴	۵-۲ سری های تیلور و لوران
۱۰۱	۵-۳ تکین ها و مانده
۱۰۵	۵-۴ کاربرد قضیه مانده ها در حل انتگرال های حقیقی
۱۱۳	خلاصه فصل ۵
۱۱۳	تمرین ها

فصل ششم: نگاشت همدیس و کاربردهای آن

۱۲۱	مقدمه
۱۲۲	۶-۱ نگاشت همدیس
۱۲۵	۶-۲ نگاشت دوخطی
۱۲۸	۶-۳ نگاشت های کسری خطی خاص
۱۳۰	۶-۴ کاربردهای نگاشت همدیس
۱۳۰	(۱) مسئله دریکله
۱۳۲	(۲) کاربرد در هیدرودینامیک
۱۳۴	(۳) کاربرد در نظریه الاستیسیته
۱۳۵	(۴) نگاشت ژوکوفسکی
۱۳۷	خلاصه فصل ۶
	تمرین ها

فصل هفتم: سری فوریه

۱۴۵	مقدمه
۱۴۵	۷-۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۱۴۸	۷-۲ سری فوریه
۱۵۳	۷-۳ قضایای مربوط به سری فوریه
۱۶۰	۷-۴ بسط نیم دامنه ای
۱۶۲	۷-۵ سری فوریه نمایی
۱۶۳	۷-۶ خواص سری فوریه
۱۶۳	خطی بودن

۱۶۳	انتقال زمانی (تاخیر زمانی)
۱۶۳	وارون سازی زمانی
۱۶۳	ضرب دو سیگنال
۱۶۵	۷-۷ کاربرد سری فوریه
۱۶۷	۸-۷ سری فوریه دوگانه
۱۷۰	خلاصه فصل ۷
۱۷۱	تمرین ها

فصل هشتم: انتگرال فوریه

۱۷۵	مقدمه
۱۷۶	۸-۱ انتگرال فوریه
۱۸۰	۸-۲ تبدیل فوریه
۱۸۴	۸-۳ خواص تبدیل فوریه
۱۸۹	۸-۴ کاربرد تبدیل فوریه
۱۹۲	خلاصه فصل ۸
۱۹۲	تمرین ها

فصل نهم: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱۹۷	مقدمه
۱۹۸	۹-۱ مفاهیم اولیه
۱۹۹	۹-۲ حل تعدادی از معادلات دیفرانسیل جزئی ساده
۲۰۱	۹-۳ طبقه بندی معادلات خطی مرتبه دو و شکل متعارف آنها
۲۰۶	۹-۴ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش جداسازی متغیرها
۲۰۸	۹-۵ معادله موج
۲۱۴	۹-۶ معادلات پخش گرما
۲۲۰	۹-۷ معادلات غیرهمگن
۲۳۱	۹-۸ بررسی مسائل موج و پخش گرمایی برای طول نامتناهی
۲۲۷	۹-۹ کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۲۳۰	خلاصه فصل ۹
۲۳۰	تمرین ها
۲۳۶	خودآزمایی ها
۲۸۱	پیوست ها

تقدیم به همسر که چراغ مهر افروخت، تا این کار به فرجام
رسد و به فرزندانم تا در خاطر داشته باشند که هرگاه در گذر
عمر فروماندم قلم بدست گیرند و راهم را ادامه دهند.
مسعود شفیعی

تقدیم به مادرم که اسوه فداکاری بود،
و به همسر که سرمشق سینا و سایه است.
مسعود ساروی

پیشگفتار

حمد و سپاس بی‌پایان خداوند تبارک و تعالی را است که به انسان علم آموخت و با
انزال کتب آسمانی توسط پیامبران خود و به‌خصوص قرآن کریم توسط خاتم‌النبین
(ص) راه سعادت را برای نوع بشر مکتوب فرمود. در این کتاب ضمن معرفی اصول و
تعاریف، جنبه‌های کاربردی و مباحث مختلف این علم مورد توجه قرار می‌گیرد.
مطالب کتاب، با توجه به برنامه‌های مصوب این درس برای دانشجویان دوره
کارشناسی، به‌گونه‌ای تنظیم شده‌اند که تمام و یا بخش‌هایی از آن بتواند مورد استفاده
دانشجویان و متخصصین رشته‌های مهندسی قرار گیرد.

در تدوین مطالب کتاب، هدف دستیابی به متنی خودآموز بوده است. از این رو
سعی شده است که مطالب هر فصل پیش‌نیاز فصل‌های بعدی باشد. محتوای هر فصل
بر مبنای «هدف کلی» و «هدف‌های رفتاری» تنظیم شده‌اند. هدف‌ها را می‌توان تغییراتی
که پس از مطالعه متن کتاب در دانسته‌ها و مهارت‌های فراگیر به‌وجود می‌آیند، تعریف
کرد. در واقع هدف‌ها، انتظارات نویسندگان کتاب از خوانندگان است. هدف‌ها همچنین
سطح فراگیری مطالب را مشخص می‌کنند.

در بازنگری و تدوین جدید کتاب ابتدا اشکالات چاپی در حد امکان رفع گردیده است. همچنین بدون اینکه آسیبی به چهارچوب کتاب وارد شود تغییراتی در متن صورت گرفته است. از جمله تمرین‌های جدیدی به آخر هر فصل اضافه شده، آزمون‌های چهارجوابی از انتهای هر فصل حذف گردیده و در انتهای کتاب ۲۷۰ تست تحت عنوان خودآزمایی‌ها اضافه شده است. این سؤال‌ها، که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و مسائل است، مشابه سؤالاتی است که در ارزشیابی نهایی این درس، دانشجو با آن روبه‌رو خواهد شد. یکی از شرایط فراگیری این درس، پاسخ‌دادن به سؤالات و حل مسائل با توجه به جواب آنهاست.

آزمون‌های چهارجوابی انتهای کتاب از کارشناسی ارشد رشته‌های مختلف مهندسی درج شده است تا دانشجویان با این سؤالات آشنا باشند و محکی باشد برای اینکه بدانند تا چه اندازه مطالب این کتاب را آموخته‌اند و اگر به مشکل عمده‌ای برخورد نموده‌اند با مراجعه مجدد به مطالب بخش مربوطه آن را رفع کنند. کتاب را به دو بخش آنالیز مختلط و آنالیز فوریه تقسیم نموده‌ایم تا اساتید محترم بتوانند بنا بر تجربه خویش هر کدام از بخش‌هایی را که مایل باشند برای شروع انتخاب نمایند.

برخود لازم می‌دانیم از کسانی که در مراحل مختلف چاپ کتاب ما را یاری نموده‌اند سپاسگزاری شود. از همه همکاران در مدیریت تدوین و مدیریت انتشارات، سرکار خانم زهرا حق‌شنو، خانم طهماسبی که زحمت حروفچینی و اصلاح آن را به عهده گرفتند، صمیمانه تشکر می‌شود.

در پایان از نظرات و پیشنهادات شما که در رفع کمبودهای این کتاب و بهبود آن در چاپ‌های بعدی می‌تواند بسیار ارزشمند و مفید باشد با کمال میل استقبال کرده و قبلاً به خاطر آن تشکر و قدردانی می‌کنیم.

مسعود شفیعی (استاد تمام)

مسعود ساروی (استادیار)

تابستان ۱۳۹۲

راهنمای مطالعه

قبل از شروع مطالعه، برای سهولت در امر یادگیری، دستیابی سریع‌تر به هدف‌های آموزشی و جلوگیری از اتلاف وقت لازم است موارد زیر را مورد توجه قرار دهید:

۱. در محیطی آرام و عاری از عوامل مخل تمرکز و توجه آغاز کنید.

۲. هدف‌های کلی و هدف‌های رفتاری هر فصل را برای اطلاع از نکته‌های مورد تأکید به دقت مطالعه کنید. آنگاه به دقت مطالب هر فصل را بخوانید و به خودآزمایی‌ها پاسخ دهید و سعی کنید هیچ سؤالی را بدون جواب و هیچ مسئله‌ای را حل نشده باقی نگذارید.

۳. حاصل آموخته‌های خود را با هدف‌های کلی و رفتاری همان فصل مقایسه کنید. در این مقایسه پیشرفت‌ها و نکات ضعف احتمالی خود را مشخص کنید. با پی‌بردن به نارسایی‌های مطالعاتی خود، با مطالعه و تلاش مجدد در صدد اصلاح و تکمیل معلومات خود باشید و پس از اطمینان از حصول هدف‌های درس و جبران نارسایی‌های مطالعاتی خود به مطالعه فصل بعد اقدام کنید.

۴. اگر در مورد بعضی از مفاهیم و یا مطالب کتاب اشکالی داشتید به کتاب‌های مرجع و یا به مربیان خود در مراکز آموزشی مراجعه کنید.

موفق باشید.

اعداد موهومی پرواز شگفت‌انگیز هستند که
از آن خداست. آنها دو سو دارند، سویی به
هستی و سویی به نیستی.

لایب‌نیتز

یک یادداشت تاریخی

در بین انسان‌های نخستین، دستگاه اعداد، فقط اعداد طبیعی را شامل می‌شد که برای
شمارش تعداد بچه‌ها، دام‌ها و ترکش‌های تیر و کمان به کار می‌رفت. چون اعداد
کسری هنوز شناخته شده نبودند، کسی از شمارش مانند دو بچه و نصفی یا سه و یک
چهارم گاوها خبر نداشت.

با پیدایش کشاورزی، مردم نیاز پیدا کردند که اندازه کمیت‌های گوناگون، نظیر
درازی یک مزرعه، و وزن مقدار محصول را بدانند. پس دستگاه اعداد گسترش یافت و
اعداد کسری را دربر گرفت. مصری‌ها و بابلی‌های زمان باستان می‌دانستند که چگونه از
این اعداد استفاده کنند اما فیثاغورث^۱ کشف کرد که بعضی از اعداد (اندازه قطر یک
مربع به طول واحد) را نمی‌توان به صورت یک عدد کلی یا کسری بیان نمود.
فیثاغورث، که یک دانشمند شیفته اعداد بود و آنها را جوهر و اصل همه چیز در جهان
نگاه می‌کرد از کشف خود چنان ترسیده بود که همکارانش را سوگند داد رازش را نگه
دارند و مجازات مرگ را برای کسی که رازش را فاش کند در نظر گرفت. این اعداد در
زمان دکارت^۲ در دستگاه اعداد جای داده شده بودند و اکنون آنها را به نام اعداد گنگ
می‌شناسیم. به این ترتیب دستگاه اعداد کلی‌تر شد و شامل اعداد جدیدی که مجموعه
اعداد گنگ را هم در برداشت، شد. دستگاه جدید اعداد به نام اعداد حقیقی شناخته

1. Pythagoras
2. Descartes

شد. پذیرش این دستگاه متأسفانه حل معادلاتی نظیر $x^2 + 1 = 0$ را امکان‌پذیر نمی‌ساخت پس لازم بود تا نوع کاملاً متفاوتی از اعداد پیدا شود که مربع آن -1 باشد. خوشبختانه در زمان دکارت اعداد دیگری که امروزه موهومی (مختلط) نام دارند به عنوان بخشی از دستگاه اعداد پذیرفته شده بودند اما لئونارد اویلر^۱ ریاضیدان فرانسوی علامت i را برای نشان دادن $\sqrt{-1}$ به کار برد و بنابراین جواب‌های $\pm i$ به معادله $x^2 + 1 = 0$ نسبت داده شد.

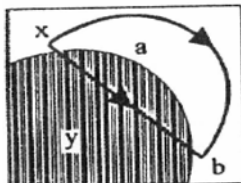
می‌دانیم $x = 4$ یک جواب از معادله $x^2 - 15x - 4 = 0$ است اما وقتی با استفاده از فرمول کاردانو^۲ این معادله بررسی شود جوابی به صورت $\sqrt{-121}$ را خواهیم داشت. کاردانو کوشید توصیفی برای وجود چنین عددی داشته باشد اما سرانجام تمام کار را به عنوان اینکه «چنان هوشمندانه است که به درد می‌خورد» رد کرد. یک نسل بعد، رافائل بامبلی^۳ (۱۵۷۳-۱۵۲۶) پس از پذیرفتن نتایج کاردانو، اعداد موهومی را به مثابه یک وسیله نقلیه ضروری دانست که ریاضیدان را از معادله درجه سوم حقیقی به جواب‌های درست می‌رساند. به عبارتی، در حالی کار خود را با اعداد حقیقی شروع و با آن پایان می‌دهیم که در این مسیر به نظر می‌رسد ناچاریم در دنیایی از موهومی‌ها حرکت کنیم تا سفر خود را به پایان برسانیم. برای ریاضیدانان آن زمان این امر به نحوی باورنکردنی شگفت‌انگیز بود. آنها هنوز نمی‌توانستند نظریه اعداد موهومی را به سبب اینکه راه حل درست یک معادله را حاصل می‌کردند به آسانی رد کنند. دو قرن طول کشید تا اهمیت اعداد مختلط در کارهای اویلر، گوس^۴ و کوشی^۵ آشکار شود.

در سال ۱۷۹۹ ریاضی‌دان آلمانی کارل فردریک گوس، در سن ۲۲ سالگی قضیه بنیادی جبر را ثابت کرد، با این عنوان که هر معادله جبری یک مجهولی ریشه‌ای به شکل عدد مختلط دارد. وی نشان داد که هر معادله جبری درجه n دقیقاً n ریشه دارد. همچنین گوس یکی از نخستین کسانی بود که محاسبه مرتبط از اعداد مختلط انجام داد و آنها را به عنوان نقاطی در یک صفحه مختلط تعبیر نمود. به علاوه او بود که اصطلاح

-
1. Euler
 2. Cardano
 3. Bombelli
 4. Gauss
 5. Couchy

اعداد مختلط را به کار برد و راه را برای استفاده عمومی و سیستماتیک از اعداد مختلط گشود. دستگاه اعداد یک بار دیگر گسترش و کلی تر شد تا اعداد موهومی را دربرگیرد. اعداد عادی (یا حقیقی) حالت خاصی از اعداد کلی (مختلط) هستند.

مزیت اعداد مختلط را می توان با توضیح فهمید. فرض کنید دو کشور همسایه X و Y باشند و بخواهیم از شهر a به شهر b برویم. کوتاه ترین راه از میان کشور Y می گذرد با وجود اینکه هر دو شهر در کشور X واقع اند. اگر بخواهیم می توانیم این مسافرت را از راه دیگر به پایان برسانیم که فقط از کشور X عبور می کند. اما راه دوم طولانی تر است. در ریاضیات هم ما موقعیتی مشابه با اعداد حقیقی (کشور X) و اعداد مختلط (کشور Y) داریم. تمام مشکلات دنیای حقیقی باید با اعداد حقیقی شروع شود، و تمام نتایج نهایی هم باید در اعداد حقیقی باشند. اما استخراج نتایج با استفاده از اعداد مختلط به عنوان یک حد واسطه به طور قابل ملاحظه ای ساده می شود. همچنین ممکن است تمام مسائل دنیای حقیقی را با روش دیگری حل کرد، یعنی تنها با روش استفاده از اعداد حقیقی، اما زحمت ما را بیهوده زیاد می کند.



فصل اول

اعداد مختلط

مقدمه

در این فصل اعداد مختلط را که تعمیمی از اعداد حقیقی است معرفی می‌کنیم و ضمن بیان چند کاربرد آنها، حل معادله $z^n + a = 0$ را که در آن a عددی مختلط است بررسی می‌کنیم.

هدف کلی

آشنایی با مفاهیم و تعاریف اولیه اعداد مختلط و خواص آنها.

هدف‌های رفتاری

پس از مطالعه این فصل باید بتوانید:

۱. مفاهیم و تعاریف اولیه اعداد مختلط را بدانید و بیان کنید.
۲. بتوانید آنها را در دستگاه مختصات دکارتی و قطبی نمایش دهید.
۳. توان‌ها و ریشه‌ها را با ذکر مثال‌های ساده توضیح دهید.
۴. کاربرد آنها را در اثبات برخی روابط جبری بدانید.
۵. حل معادله $z^n + a = 0$ را بدانید.

۱-۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

سیستم اعداد مختلط تعمیم سیستم اعداد حقیقی است به صورتی که حل معادلاتی نظیر $x^2 + 1 = 0$ را امکان پذیر می سازد. به کمک این سیستم می توان قضیه اساسی جبر یعنی «هر معادله چندجمله ای درجه n دقیقاً n ریشه دارد.» را به راحتی ثابت نمود. هرگاه از تعمیم سخن بگوییم باید چهار عمل اصلی را نیز در سیستم تعمیم یافته تعریف کنیم، اما قبل از آن به معرفی مفاهیم اولیه می پردازیم.

هر عدد مختلط که آن را با z نمایش می دهیم یک زوج مرتب (x, y) است که در آن $x, y \in R$ و به صورت زیر تعریف می شود:

$$z = (x, y) \quad (۱)$$

x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی عدد مختلط z می نامیم و می نویسیم:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z \quad (۲)$$

مجموعه اعداد مختلط را با C نمایش می دهیم. به این ترتیب $R \subset C$.

دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ را مساوی می گوییم اگر و تنها اگر قسمت های حقیقی برابر و قسمت های موهومی برابر داشته باشند. یعنی،

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \quad (۳)$$

روی مجموعه اعداد مختلط عمل جمع، ضرب و تقسیم را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (۴)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2) \quad (۵)$$

$$z_1 / z_2 = \left[\frac{x_2 x_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right], z_2 = (x_2, y_2) \neq (0, 0) \quad (۶)$$

ویژگی های زیر در مورد اعمال جبری فوق به سادگی قابل اثبات اند.

$$(i) \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{جابجایی در جمع})$$

$$(ii) \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{شرکت پذیری در جمع})$$

$$(iii) \quad z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad (\text{جابجایی در ضرب})$$

۳ اعداد مختلط

$$(iv) z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \quad (\text{شرکت پذیری در ضرب})$$

$$(v) z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (\text{توزیع پذیری})$$

عدد مختلط $(0, y)$ را عدد موهومی محض می نامیم و عدد مختلط $(0, 1)$ را با i نشان می دهیم.

بنابراین

$$z = (x, y) = x + iy \quad (v)$$

که از آن با توجه به تعریف عمل ضرب داریم

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

همان طوری که مشاهده می شود معادله $x^2 + 1 = 0$ در دستگاه اعداد مختلط جواب های $\pm i$ دارد.

مثال ۱. نشان دهید

$$(i) \operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2,$$

$$(ii) \operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2$$

حل. با استفاده از رابطه (۵) داریم:

$$(i) \operatorname{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2,$$

همچنین با توجه به همان رابطه می توان نوشت:

$$(ii) \operatorname{Im}(z_1 z_2) = z_1 y_2 + y_1 x_2 = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Re} z_2 \operatorname{Im} z_1 \quad \blacksquare$$

مثال ۲. نشان دهید اگر $z \neq (0, 0)$ ، آنگاه عدد مختلطی مانند s وجود دارد به گونه ای

که $sz = (1, 0)$. در این صورت s را وارون ضربی عدد z گویند.

حل. فرض می کنیم $s = (u, v)$. بنابراین با توجه به تعریف عمل ضرب داریم:

$$sz = (u, v)(x, y) = (xu - yv, uy + xv) = (1, 0)$$

که از آن $uy + xv = 0$ ، $ux - yv = 1$. از حل این دو معادله u و v به ترتیب برابرند

$$\text{با } u = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ و } v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ پس } s = \left[\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right] \text{ چون } x \neq 0, y \neq 0$$

وجود چنین عددی ثابت می شود. $\blacksquare$

مثال ۳. نشان دهید عدد مختلطی مانند s وجود دارد به گونه‌ای که $sz = (x^2 + y^2, 0)$.
 s را مزدوج عدد z نامند.

حل. دوباره فرض می‌کنیم $s = (u, v)$ و تعریف عمل ضرب را به کار می‌بریم، خواهیم داشت

$$sz = (xu - yv, uy + xv) = (x^2 + y^2, 0)$$

که از آن $xu - yv = x^2 + y^2$ و $uy + xv = 0$. از حل این دستگاه معادلات $u = x$ و $v = -y$. در نتیجه داریم $s = (x, -y)$ این عدد را با نماد $\bar{z}$ به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\bar{z} = x - iy \quad (۸)$$

به این ترتیب

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \blacksquare \quad (۹)$$

ویژگی‌های زیر در مورد مزدوج اعداد مختلط برقرارند

$$(i) \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(ii) \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$(iii) \overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

با توجه به (۷) و (۸) می‌توان x و y را برحسب z و $\bar{z}$ چنین نوشت

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (۱۰)$$

با استفاده از این روابط هر معادله داده شده را می‌شود برحسب z و $\bar{z}$ نوشت. مثلاً معادله هر خط نظیر $Ax + By + C = 0$ چنین می‌شود:

$$Ax + By + C = A \left[\frac{z + \bar{z}}{2} \right] + B \left[\frac{z - \bar{z}}{2i} \right] + C = 0$$

با مرتب نمودن معادله فوق برحسب z و $\bar{z}$ می‌گیریم

$$\left[\frac{A}{2} + \frac{B}{2i} \right] z + \left[\frac{A}{2} - \frac{B}{2i} \right] \bar{z} + C = 0$$

با فرض $E = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i}$ خواهیم داشت

$$\bar{E}z + E\bar{z} + C = 0 \quad (11)$$

که معادله خط در شکل مختلط است.

مثال ۴. معادله یک دایره را در شکل مختلط بنویسید و شرایط دایره بودن آن را توضیح دهید.

حل. شکل عمومی معادله یک دایره به صورت $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ است که باید $A \neq 0$ اختیار شود در غیر این صورت معادله یک خط را خواهیم داشت. با جایگزینی (x, y) از (۱۰) در معادله‌ی فوق خواهیم داشت.

$$Az\bar{z} + \left[\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right]z + \left[\frac{A}{2} - \frac{B}{2i}\right]\bar{z} + C = 0$$

که با ساده کردن آن و فرض اینکه $E = \frac{B}{2} - \frac{C}{2i}$ داریم

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$$

در اینجا هم باید $A \neq 0$ باشد.

از طرفی معادله داده شده را می‌توانستیم به صورت زیر هم دوباره‌نویسی نماییم.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = \left[x + \frac{B}{2A}\right]^2 + \left[y + \frac{C}{2A}\right]^2 - \frac{B^2 + C^2}{4A^2} + \frac{D}{A} = 0$$

یعنی

$$\left[x + \frac{B}{2A}\right]^2 + \left[y + \frac{C}{2A}\right]^2 = \frac{B^2 + C^2}{4A^2} - \frac{D}{A}$$

چون سمت چپ تساوی مثبت است پس باید $\frac{B^2+C^2}{4A^2} - \frac{D}{A} \geq 0$ ، که از آن $B^2+C^2 \geq 4AD$. از طرفی داریم $EE = \frac{B^2+C^2}{4}$ ، پس $EE \geq AD$ که شرط دیگری برای دایره بودن می باشد. ■

مثال ۵. ثابت کنید نقاط z_1 و z_2 نسبت به خط $\bar{E}z + E\bar{z} + C = 0$ قرینه اند اگر و تنها اگر $\bar{E}z_1 + E\bar{z}_2 + C = 0$.

حل. نقطه z از خط مفروض را در نظر می گیریم.

الف) با فرض اینکه z_1 و z_2 نسبت به خط قرینه اند پس $z - z_1 = z_2 - z$ که از آن $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$. مقدار z را در معادله خط جایگذاری می کنیم.

$$\bar{E} \left[\frac{z_1 + z_2}{2} \right] + E \left[\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2} \right] + C = 0$$

در نتیجه داریم:

$$(\bar{E}z_1 + E\bar{z}_2 + C) + (\bar{E}z_2 + E\bar{z}_1 + C) = 0$$

چون عبارت داخل پرانتز دومی مزدوج عبارت در پرانتز اولی است پس

$$\bar{E}z_1 + E\bar{z}_2 + C = 0$$

ب) اثبات قسمت "تنها اگر" شبیه به قسمت الف به آسانی قابل انجام است. ■

۲-۱ نمایش اعداد مختلط

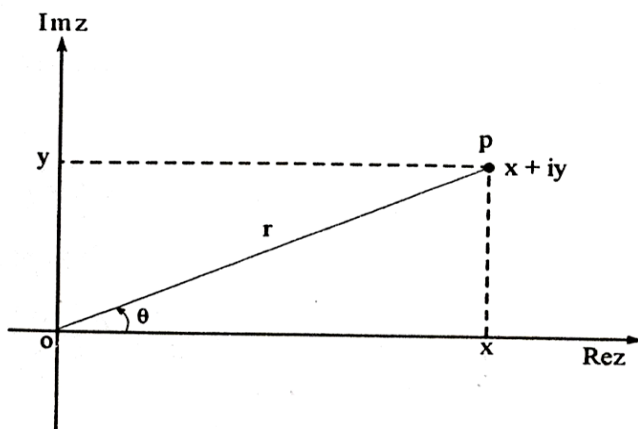
از آنجایی که هر عدد مختلط Z را با زوج مرتب (x, y) نشان داده ایم، می توانیم آن را در دستگاه مختصات دکارتی با نقطه ای مانند p به مختصات (x, y) نمایش دهیم (شکل ۱.۱). صفحه ای که شامل تمام اعداد مختلط نظیر z باشد را **صفحه مختلط** نامند که محور x ها محور حقیقی و محور y ها محور موهومی آن را تشکیل می دهند.

۷ اعداد مختلط

با توجه به شکل و اینکه $op = r$ و زاویه ای که op در جهت مثبت (عکس حرکت عقربه‌های ساعت) با محور x می‌سازد θ در نظر گرفته شده است، می‌توان عدد مختلط را بر حسب r و θ هم نوشت. داریم $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ پس

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (12)$$

که شکل قطبی عدد مختلط z است. با استفاده از شکل داریم $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، عدد مثبت r را قدر مطلق یا هنگ عدد مختلط z نامند و با نماد $|z|$ نمایش می‌دهند.



شکل ۱.۱

قدر مطلق‌ها دارای ویژگی‌های زیر هستند:

$$(i) |z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$(ii) |\bar{z}| = |z|$$

$$(iii) |z|^2 = z\bar{z}$$

$$(iv) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(v) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$(vi) |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

مثال ۶. درستی روابط (v) و (vi) را ثابت نمایید.