



کاربرد کامپیوتر در فیزیک

(رشته فیزیک)

ترجمه و تدوین:

دکتر عبدالرسول قرائتی جهرمی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار	نه
فصل اول: مقدمه	۱
۱-۱. رئوس کلی	۱
۲-۱. جبر پایه و حل معادلات	۱۱
۳-۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال	۱۷
۴-۱. معادلات دیفرانسیل	۲۱
۱-۴-۱. جواب دقیق	۲۲
۱-۲-۴-۱. توابع خاص	۲۴
۱-۳-۴-۱. جواب‌های عددی	۲۶
۵-۱. بردارها و ماتریس‌ها	۳۱
۶-۱. خلاصه	۴۷
تمرین	۴۷
فصل دوم: حرکت نوسانی	۵۱
۱-۲. نوسانگر هماهنگ ساده	۵۱
۲-۲. نوسان میرا	۵۶
۱-۲-۲. تند میرایی	۵۷
۲-۲-۲. کند میرایی	۵۹
۳-۲-۲. میرای بحرانی	۶۱
۳-۲. نوسانگر سینوسی رانشی	۶۳
۴-۲. فضای فاز	۷۶
تمرین	۸۳
فصل سوم: الکتروستاتیک	۸۷
۱-۳. قانون کولن	۸۷

۹۲	۲-۳. مختصات منحنی الخط
۹۴	۱-۲-۳. مختصات کروی
۹۹	۲-۲-۳. مختصات استوانه‌ای
۱۰۲	۳-۳. حساب دیفرانسیل برداری
۱۰۳	۴-۳. پتانسیل الکتریکی
۱۱۰	۱-۴-۳. دستگاه کاوندیش برای قانون عکس مجذوری
۱۱۶	۲-۴-۳. بسط چندقطبی
۱۲۶	۵-۳. میدان الکتریکی و سطوح هم‌پتانسیل
۱۳۱	تمرین

۱۳۵	فصل چهارم: امواج
۱۳۶	۱-۴. معادله موج
۱۴۲	۲-۴. ریسمان مرتعش
۱۴۷	۳-۴. امواج سینوسی در ترکیب‌های خطی
۱۴۷	۱-۳-۴. نمادگذاری مختلط
۱۴۸	۲-۳-۴. انتگرال‌های فوریه
۱۴۹	۳-۳-۴. اصل عدم قطعیت
۱۵۶	۴-۴. بسته موج گوسی
۱۶۲	۵-۴. غشاء دایره‌ای دو بعدی
۱۶۸	۶-۴. امواج الکترومغناطیسی
۱۷۰	۱-۶-۴. تابش دوقطبی الکتریکی
۱۷۸	۲-۶-۴. تابش سینکروترون
۱۸۲	تمرین

۱۸۷	فصل پنجم: نورشناسی فیزیکی
۱۸۷	۱-۵. نور به عنوان یک موج الکترومغناطیسی
۱۸۸	۱-۱-۵. قطبش
۱۹۲	۲-۵. ریاضیات تداخل
۱۹۷	۳-۵. تداخل
۱۹۷	۱-۳-۵. تداخل دوشکافه
۱۹۹	۲-۳-۵. تداخل چندشکافه
۲۰۴	۴-۵. پراش
۲۰۶	۱-۴-۵. تفکیک شکاف‌های یگانه و گشودگی‌های دایره‌ای
۲۱۲	۵-۵. توری پراش
۲۱۵	۶-۵. طیف‌سنجی تبدیل فوریه
۲۲۰	۷-۵. پراش فرنل
۲۲۴	تمرین

۲۲۹	فصل ششم: معادله شرودینگر در یک بعد: حالت نامقید
۲۲۹	۱-۶. فرمول بندی مکانیک کوانتومی
۲۳۲	۲-۶. امواج تخت و پتانسیل صفر
۲۳۴	۳-۶. پله پتانسیل
۲۳۴	۱-۳-۶. پله پتانسیل $E > V_0$
۲۳۷	۲-۳-۶. پله پتانسیل $E < V_0$
۲۳۹	۴-۶. سد پتانسیل
۲۳۹	۱-۴-۶. سد پتانسیل $E > V_0$
۲۴۲	۲-۴-۶. سد پتانسیل $E < V_0$
۲۴۲	۵-۶. خلاصه ای از شرایط مانا
۲۴۷	۶-۶. بسته موج
۲۵۰	۱-۶-۶. انعکاس بسته موج
۲۵۸	تمرین
۲۶۱	منابع

پیشگفتار

فیزیک با قوانین ساده آموزش داده شده است، اما بسیاری از موضوعات فیزیکی، به سبب فراوانی ریاضیات، مبهم هستند. میپل یک نرم افزار مفید در محاسبات جبری است که می تواند اساتید و دانشجویان را در غلبه بر موانع ریاضی یاری رساند. هدف این کتاب معرفی میپل برای تدریس و همچنین یادگیری فیزیک به کمک ریاضی است. میپل بر کاربرد اصول معادلات، به جای جزئیات تکنیکی حل آنها، تمرکز می کند. و بعضی ضعف ها و کمبودها در روش های سنتی را بهبود می بخشد. با استفاده از میپل می توان با معادلات روبرو شد و از عملیات کسل کننده روی کاغذ، که توجه شخص را از تمرکز اصلی در یادگیری فیزیک منحرف می کنند کاست. میپل، به ویژه، در مسائلی که نیاز به محاسبات گسترده دارند مفید است؛ از جمله مسائلی که شامل محاسبه قاعده زنجیره ای، تغییر متغیر و انتگرال جز به جز هستند. میپل شامل هزاران دستور و عملکرد، از ابتدایی ترین تا پیچیده ترین، است. افراد کمی در همه جنبه های این نرم افزار متبحر هستند. هدف این کتاب استفاده از دستورهای بنیادی در میپل است تا شخص از خود نرم افزار نترسد و ثابت کند که می تواند آن را به خوبی به کار برد.

این کتاب برای اشخاصی که در جستجوی کشف فرمان های گوناگون میپل هستند در نظر گرفته نشده است؛ برعکس، ما خودمان را به فرمان های بنیادی محدود می کنیم. هدف این کتاب توانا کردن دانشجویان در محاسبات جبری مسائل فیزیکی است. بسیاری از این مسائل بین سطح آموزشی متوسط و پیشرفته قرار می گیرند، یعنی دانشجویی که دوره های فیزیک عمومی و محاسباتی را می گذراند. با حل مسائل توسط

میپل، علم فیزیک افراد تقویت می‌شود و مهارت‌های کامپیوتری را می‌آموزد.

مطالب کتاب به گونه‌ای است که استاد می‌تواند آن را در یک ترم تدریس کند. بخشی از مطالب آن از کتاب فیزیک با میپل مرجع یک برگرفته شده است. بسیاری از تمرینات پایان فصل پیچیده هستند. آنها اطلاعات اضافی در متن‌های اصلی را به دست می‌دهند و اشتیاق دانشجو را برای موضوعات پیشرفته برمی‌انگیزند. دانشجو نباید انتظار داشته باشد که بتواند همه آنها را حل کند؛ با این همه، باید ایده‌های اصلی را بفهمد.

فصل اول به تنهایی شامل یک مقدمه جامع از محاسبات است. فصل دوم، برای دانشجویانی مناسب است که دوره مقدماتی فیزیک را کامل می‌کنند. این بخش مهارت‌های کلیدی برای حل معادلات دیفرانسیل، معادلات مثلثاتی، محاسبه اعداد مختلط و رسم نمودارهای کامپیوتری را نشان می‌دهد. فصل سوم برای دانشجویانی مناسب است که یا در حال مطالعه الکترومغناطیس در حد ریتز میلفورد هستند یا آن را تمام کرده‌اند. در این فصل، از ویژگی‌های میپل در توابع خاص و از محاسبات برداری در مسائلی که نیاز به محاسبات گسترده دارند، استفاده می‌کنیم. فصل چهارم، مطالبی در باب امواج، در حد فیزیک پایه ۳ است. فصل پنجم برای دانشجویانی مناسب است که یا در حال مطالعه درس نورشناسی فولز در دوره کارشناسی هستند یا آن را به طور کامل مطالعه کرده‌اند. فصل ششم برای دانشجویانی مناسب است که یا در حال مطالعه مکانیک کوانتومی در حد گاسیورویچ هستند یا آن را تمام کرده‌اند. در این فصل، از توانایی گسترده میپل در معادلات دیفرانسیل، توابع خاص و کارهای گرافیکی استفاده می‌کنیم و با استفاده از میپل مسائل متعارف مکانیک موجی را حل می‌کنیم.

این کتاب، مطابق برنامه مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم تحقیقات و فناوری، برای درس کاربرد کامپیوتر در فیزیک رشته فیزیک تهیه شده است. پیش‌نیاز این درس فیزیک عمومی و ریاضیات پایه است اما دروس الکترومغناطیس ۱، مکانیک کوانتومی ۱ و نورشناسی نیز کمک خوبی در فهم آن خواهد کرد.

در اینجا لازم می‌دانم از همه کسانی که زحمت چاپ کتاب را بر عهده داشته‌اند، به ویژه ویراستار محترم، تشکر کنم. همچنین، از همکاران محترم گروه فیزیک و مدیریت محترم تولید محتوا و تجهیزات آموزشی دانشگاه نیز صمیمانه سپاسگزارم.

امید است مطالب کتاب مورد استفاده دانشجویان عزیز قرار گیرد. بی تردید، مطالب کتاب خالی از اشکال نیست. از خوانندگان محترم تقاضا می‌شود، چنانچه با کاستی‌هایی روبرو شوند، نظرات اصلاحی خود را، از طریق آدرس ذیل، به مؤلف ارسال نمایند.

عبدالرسول قرائتی

عضو هیئت علمی دانشگاه پیام‌نور

agharaati@pnu.ac.ir

فصل ۱

مقدمه

اهداف کلی

در این فصل، مقدمه مختصری از میپل و کاربردهای آن در فیزیک را ارائه می‌کنیم. امکانات میپل را در انجام دادن مهارت‌های جبری، نمودارها و حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان می‌دهیم. از اصول پایه در مکانیک برای معادلات و از میپل برای حل مسائل فیزیکی استفاده می‌کنیم. روش ما، یادگیری فرمان‌های میپل، به‌طور مستقیم، به کمک مثال‌های حل شده است.

اهداف یادگیری

- آشنایی دانشجویان با دستورات مقدماتی میپل.
- رسم نمودارهای چند گانه در یک شکل.
- حل مسائل ابتدایی در حد فیزیک پایه ۱ و ۲.
- آشنایی با بعضی بسته‌های نرم‌افزاری در میپل.

۱-۱. رئوس کلی

میپل یک نرم‌افزار برای محاسبات نمادین است. در نرم‌افزارهای متداول، محاسبات محدود به مقادیر عددی هستند؛ اما میپل می‌تواند عبارات نمادین را با مهارت انجام دهد. اساسی‌ترین کاربرد میپل یک ماشین حساب عددی؛ است همان‌طور که در مثال زیر دیده می‌شود. استفاده از میپل برای انجام محاسبات عددی سراسر است. بعد از

۲ کاربرد کامپیوتر در فیزیک

علامت > یک عبارت را وارد کنید و برای نمایش نتایج محاسبات، ورودی با یک ویرگول نقطه (;) به پایان می‌رسد. خواننده، با استفاده از کامپیوتر و امتحان کردن مثال‌ها، از این کتاب بسیار خواهد آموخت. باید برای فهمیدن معنی هر خط از فرمان‌ها، پیش از اجرای محاسبات کوشید.

کاربرگ ۱-۱

> $2 \cdot 3 + \frac{4}{2};$	8
> $\frac{2 \cdot (3 + 5)}{4};$	4
> $2^{100};$	1267650600228229401496703205376
> sqrt(179.0);	13.37908816
> $\frac{4}{5} + \frac{8}{15};$	$\frac{4}{3}$
> evalf(%);	1.333333333
> sqrt(-4);	2 I
> Pi;	π
> evalf(Pi, 20);	3.1415926535897932385
> exp(Pi);	e^{π}
> evalf(%);	23.14069264
> $\pi^{\exp(1)};$	π^e
> evalf(%);	22.45915771

نخستین محاسبه پیدا کردن ۲ برابر ۳ به اضافه ۴ تقسیم بر ۲ است، که نتیجه ۸ می‌باشد. اولویت عملیات حسابی، مانند ضرب قبل از جمع، از یک قرارداد پیروی

می‌کند؛ اما پرانتزها می‌توانند ترتیب عملیات را تغییر دهند؛ مانند مثال دوم:
 $2 * (3 + 5) / 4$. سومین محاسبه شامل یک علامت (^) است که نمادگذاری میپل برای
 به توان رساندن است. در این مورد، پیدا کردن ۲ به توان ۱۰۰ است که نتیجه با ۳۱ رقم
 نشان داده شده است. برای تسهیل در خواندن، از فضای خالی آزادانه می‌توان در یک
 فرمان ورودی استفاده کرد؛ البته نه در عدد و نام نویسی‌ها.

بیشتر فرمان‌های میپل بدیهی هستند. فرمان $\text{sqrt}(179.0)$ برای محاسبه ریشه
 میانگین مربعی ۱۷۹.۰ که ۱۳.۳۷۹ است به کار می‌رود. مؤثرترین راه برای یادگیری
 میپل، استفاده از ویژگی help است. برای احضار کردن فرمان help، علامت سؤال به
 اضافه نام فرمان (دستور؟) را تایپ کنید.

دستور؟

به عنوان مثال، می‌توان sqrt ? را تایپ کرد تا اطلاعات اضافی در مورد این فرمان
 را یافت. بنابراین، یک قانون کلی است که وقتی یک کاربرگ را که شامل فرمان‌های
 ناآشنا است امتحان می‌کنیم، می‌توان، به طور ساده، از help برای توضیح آن استفاده کرد.
 یک ویژگی مهم محاسبات جبری در زیر نشان داده شده است:

$$\frac{4}{5} + \frac{8}{15} = \frac{4}{3};$$

میپل می‌تواند این محاسبه را بدون تبدیل کسرها به اعشار انجام دهد و، به طور
 خودکار، نتایج کسرها را ساده کند. یک کسر یک مقدار دقیق است و این محاسبات
 توانایی میپل را برای انجام دادن محاسبات دقیق نشان می‌دهد. در به دست آوردن نتایج
 عددی تقریبی اعشاری، می‌توان از فرمان evalf استفاده کرد که از "arithmetic
 evaluate using floating-point"، به معنی «محاسبه با ممیز اعشاری»، گرفته شده است.
 فرمان evalf یک کسر را به طور تقریبی به شکل اعشاری تبدیل می‌کند. برای یادگیری
 بیشتر در مورد این فرمان evalf? را وارد کنید. علامت % عمل گر دیتو (ditto) را
 مشخص می‌کند که نتیجه قبل را فراخوانی می‌کند. بنابراین، مقدار تقریبی برای $4/3$ ،
 ۱.۳۳۳ است.

میپل می‌تواند از اعداد مختلط نیز استفاده کند. در مثال $\text{sqrt}(-4)$ ، میپل $2i$ را
 گزارش می‌دهد. نماد i یک علامت پیش فرض در میپل است که ریشه مربعی عدد منفی
 که $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد را مشخص می‌کند. میپل ثابت‌های ریاضی استاندارد مانند π

برای نسبت محیط دایره بر قطر آن و e را برای مبنای لگاریتم طبیعی تعریف می‌کند. بعضی حروف‌ها و اعداد در میپل ذخیره شده‌اند. چون آنها از ابتدا معنی مشخص و معینی برای دستگاه دارند. برای مثال، حرف I را فقط برای مشخص کردن $\sqrt{-1}$ می‌بینیم یا Pi نماینده‌ای برای π است. ما این را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم که با تایپ کردن Pi ? اطلاعات بیشتری در مورد کلمات ذخیره شده میپل پیدا کند. چون میپل، یک نرم‌افزار حساس است باید در نوشتن با حروف بزرگ صحیح، وقتی این ثابت‌ها را فراخوانی می‌کنیم، مطمئن باشیم. در مورد حروف ذخیره شده مانند $evalf$ و Pi ، که معنی مخصوصی دارند، باید از استفاده آنها برای دیگر اهداف خودداری کنیم. مانند هر کسر π یک مقدار دقیق است؛ برای پیدا کردن مقدار تقریبی یک عدد مشخص مانند ۲۰، که در مثال نشان داده شده، فرمان $evalf$ را به‌کار می‌بریم.

عبارت نمای e^x توسط تابع $\exp(x)$ در میپل نشان داده می‌شود. برای احضار کردن عدد e باید $\exp(1)$ یا $\exp(1.)$ را برای تقریب اعشاری تایپ کرد. محاسبات را برای تعیین اینکه کدام مقدار e^π یا π^e بزرگ‌تر است انجام داده‌ایم و خواننده می‌تواند به این سوال از روی خروجی میپل جواب دهد.

میپل می‌تواند بسیار بیشتر از محاسبات عددی بنیادی را انجام دهد. با مثال‌های بیشتر، محاسبات ساده و خواص نمودارها را نشان می‌دهیم.

کاربرگ ۱-۲

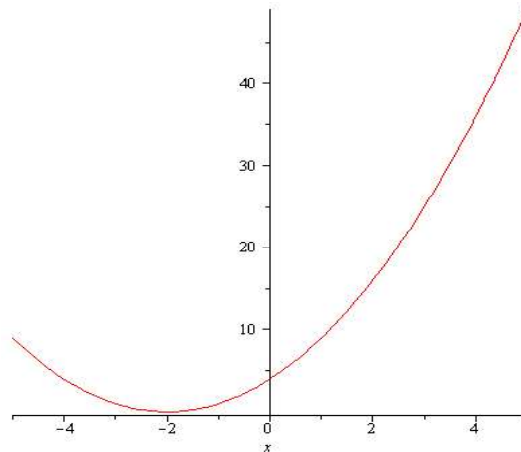
```
> restart
> g := (x + 1)^3;
                                g := (x + 1)^3
> g*(x + 3);
                                (x + 1)^3 (x + 3)
> expand(g);
                                x^3 + 3 x^2 + 3 x + 1
> expand(%);
                                x^4 + 6 x^3 + 12 x^2 + 10 x + 3
> Eq1 := a*x^2 + b*x + c
                                Eq1 := a x^2 + b x + c
> Eq2 := solve({Eq1}, {x});
```

$$Eq2 := \left\{ x = -\frac{1}{2} \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right\}, \left\{ x = -\frac{1}{2} \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right\}$$

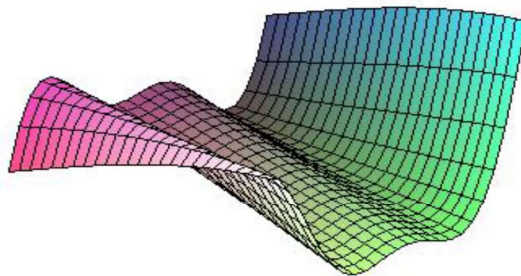
> solve({a1·x + b1·y = c1 , a2·x + b2·y = c2 } , {x , y });

$$\left\{ y = -\frac{-a1 c2 + a2 c1}{a1 b2 - a2 b1}, x = \frac{-b1 c2 + c1 b2}{a1 b2 - a2 b1} \right\}$$

> plot(x² + 4·x + 4, x = -5 ..5);



> plot3d(x²·sin(x - y) , x = -Pi ..Pi , y = 0 ..1);



در این کاربرد، با یک فرمان restart شروع کردیم که مطالب قبلی را از حافظه کامپیوتر پاک می‌کند. در برنامه بعدی، فرمان restart را از لیست حذف می‌کنیم. اما

اجرای آن مهم است تا از تداخل آن با محاسبات قبلی جلوگیری شود.
برای نسبت دادن یک عبارت به یک نام در میپل، از این ترکیب می‌توان استفاده کرد: عبارت = نام

در مثال $g:=(x+1)^3$ ، عبارت $(x+1)^3$ را به نماد g نسبت داده‌ایم که نامی برای نشان دادن این عبارت می‌شود. سپس می‌توانیم عبارت $(x+1)^3$ را با نمادگذاری مختصر g دست‌کاری کنیم، مانند ضرب کردن در یک عبارت دیگر یا بسط با استفاده از فرمان `expand`. برای بازخوانی دومین نتیجه قبلی علامت دوگانه عمل گر دیتو `%%` را به‌کار می‌بریم. در این مثال، به‌طور نمادین، عبارت $(x+1)^3(x+3)$ را بسط می‌دهیم.

همچنین، می‌توان یک نام برای معادله تعیین کرد. در این مثال‌ها، شکل رایج از یک معادله درجه دوم را به `Eq1` نسبت می‌دهیم؛ سپس یکی از مهم‌ترین فرمان‌های حل معادله را معرفی می‌کنیم. این فرمان حل یک معادله کلی است. این فرمان یک معادله یا یک سیستم از معادلات را می‌دهد و برای یک مجهول یا مجهولات مشخص مسئله را، به‌طور دقیق، حل می‌کند. برای حل یک معادله با یک مجهول، نحوه کار در کاربرگ نشان داده شده است. برای حل یک دستگاه از معادلات، آنها را در یک مجموعه درون آکولاد `{...}` که با کاما جدا شده نشان می‌دهیم و مجهولات را در یک مجموعه درون آکولاد `{...}` قرار می‌دهیم.

نمایش نموداری یک تابع ریاضی، به‌طور کلی، روشن‌ترین راه برای فهم ویژگی‌های آن تابع است. برای رسم یک معادله صریح با یک متغیر منفرد، عبارت و دامنه متناظر را با فرمان `plot` رسم می‌کنیم. در مثال بالا، معادله $y=x^2+4x+4$ را با دامنه x از -5 تا 5 رسم کرده‌ایم. این نمودار دو بعدی ابتدایی‌ترین شکل است. برای جزئیات بیشتر مانند نوع خط، عنوان، شرح علائم و اختصارات و غیره می‌توان با احضار کردن `plot[options]` اطلاعاتی را پیدا کرد. می‌توان معادله‌ای با دو متغیر به‌عنوان یک سطح در فضای سه بعدی با فرمان `plot3d` برای یک عبارت f که تابعی از x و y می‌باشد، رسم کرد. به‌عنوان مثال، معادله $z = x^2 \sin(x - y)$ را برای x از $-\pi$ تا π و y از 0 تا 1 رسم کردیم.

مسائل حل شده در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک کاربرد سودمند از میپل است. کاربرگ بعدی را برای نمایش قابلیت میپل در این موضوع دنبال کنید.

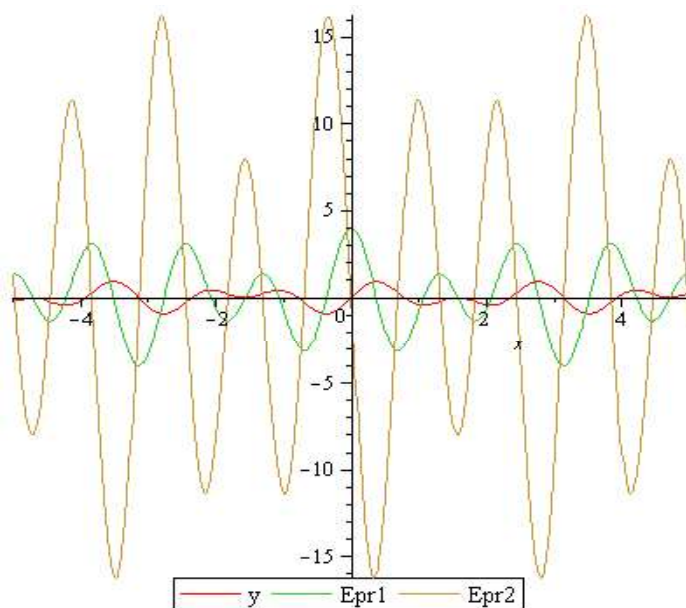
کاربرگ ۳-۱

> $y := \sin(4 \cdot x) \cdot \cos(x)$; $y := \sin(4x) \cos(x)$

> $Epr1 := \text{diff}(y, x)$; $Epr1 := 4 \cos(4x) \cos(x) - \sin(4x) \sin(x)$

> $Epr2 := \text{diff}(y, x\$2)$; $Epr2 := -17 \sin(4x) \cos(x) - 8 \cos(4x) \sin(x)$

> $\text{plot}([y, Epr1, Epr2], x = -5 .. 5, \text{legend} = ["y", "Epr1", "Epr2"]);$



> $\text{int}(a + b \cdot x + c \cdot x^2, x)$;

$$a x + \frac{1}{2} b x^2 + \frac{1}{3} c x^3$$

> $\text{int}(\csc(x), x)$;

$$-\ln(\csc(x) + \cot(x))$$

> $\text{Int}\left(\frac{1}{(a^2 + x^2)}, x\right)$;

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

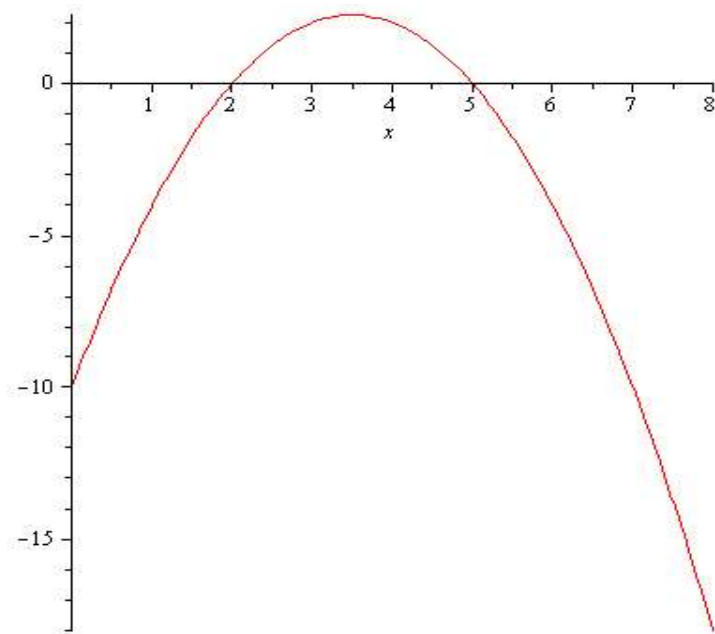
> $\text{value}(\%)$;

$$\frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a}$$

> $Epr3 := -x^2 + 7 \cdot x - 10;$

$$Epr3 := -x^2 + 7x - 10$$

> $plot(Epr3, x = 0..8);$



> $int(Epr3, x = 2..5);$

$$\frac{9}{2}$$

> $Eq4 := diff(u(t), t^2) + 5 \cdot diff(u(t), t) + 6 \cdot u(t) = 0;$

$$Eq4 := \frac{d^2}{dt^2} u(t) + 5 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + 6 u(t) = 0$$

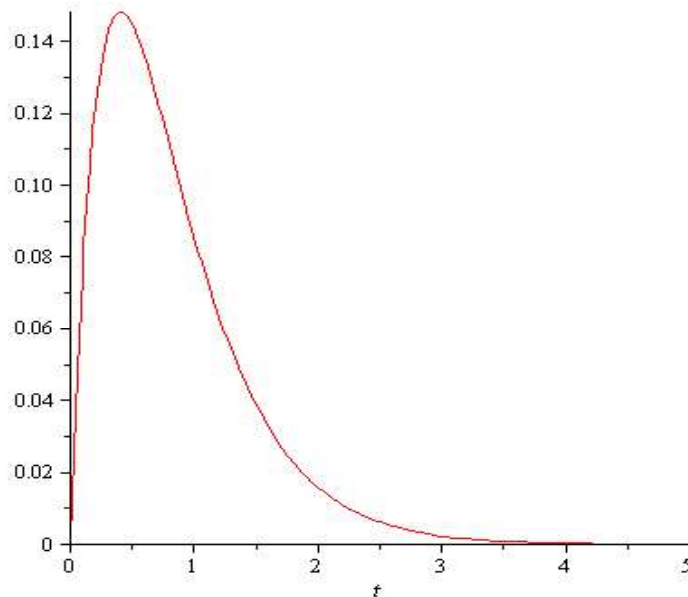
> $dsolve(\{Eq4, u(0) = 0, D(u)(0) = 1\}, \{u(t)\});$

$$u(t) = -e^{-3t} + e^{-2t}$$

> $soln := rhs(\%);$

$$soln := -e^{-3t} + e^{-2t}$$

> $plot(soln, t = 0..5);$



فرمان‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، به سهولت، از مثال‌های بالا قابل تشخیص هستند. فرمان پیدا کردن مشتق $\frac{d}{dx}f(x)$ ، در میپل `diff(f(x),x)` است. عمل گر متوالی \$ برای مشتق مرتبه بالا مفید است. برای مثال، برای پیدا کردن مشتق دوم $f(x)$ عبارت `diff(f(x), x$2)` را می‌نویسیم. نخست عبارت $\sin(4x)\cos(x)$ را به y نسبت می‌دهیم، سپس مشتق اول و دوم آن را با فرمان `diff` میپل به دست می‌آوریم.

$$\frac{d}{dx} \sin(4x) \cos(x) = 4 \cos(4x) \cos(x) - \sin(4x) \sin(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin(4x) \cos(x) = -17 \sin(4x) \cos(x) - 8 \cos(4x) \sin(x).$$

وقتی می‌خواهیم توابع چندگانه را، که با کاما درون کروشه جدا شده است، نشان دهیم، آنها را در یک نمودار رسم می‌کنیم. میپل چندین ساختار برای مجموعه داده‌ها فراهم می‌کند که شامل رشته، فهرست و مجموعه است. داده‌ها در یک رشته، به‌طور ساده، با کاما از هم جدا می‌شوند. چنین رشته‌ای درون کروشه [...], یک فهرست و درون آکولاد یک مجموعه را تشکیل می‌دهد. در بیشتر مواقع، یک فهرست و یک مجموعه عملاً قابل تعویض هستند، فرق بین این ساختارها این است که ترتیب و

تکرار در فهرست حفظ می‌شود، اما در یک مجموعه این طور نیست. برای فرمان‌های حل در کاربرگ قبلی، درجه معادلات تأثیری در جواب ندارد. بنابراین، از یک مجموعه استفاده می‌کنیم. یک علامت اختصاری برای هر منحنی در فرمان plot این کاربرگ مشخص می‌کنیم که درجه در آن اهمیت دارد و، بنابراین، از یک فهرست استفاده می‌کنیم.

فرمان محاسبه انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ در میپل $\text{int}(f(x), x)$ است. در دو فرمول مطابق با مثال‌های بالا روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int (a + bx + cx^2)dx = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3,$$

$$\int \csc(x)dx = -\ln[\csc(x) + \cot(x)].$$

اگر حرف I در Int را بزرگ بنویسیم، انتگرال محاسبه نمی‌شود؛ اما در یک شکل نمایشی صحیح آن را برمی‌گردانند. از فرمان value برای محاسبه انتگرال استفاده می‌کنیم. استفاده از Int و value با هم در تشخیص خطاهای چاپی، مانند عوضی گذاشتن پرانتزها، بسیار مفید است. در بقیه کتاب از Int، به دلیل محدودیت فضا، استفاده نمی‌کنیم؛ ولی خواننده می‌تواند به آسانی این فرمان را به کار برد. انتگرال معین نیز می‌تواند به راحتی اجرا شود. برای مثال:

$$\int_2^6 (-x^2 + 7x - 10)dx = \frac{9}{2}.$$

در دستورالعمل میپل، حدهای بالایی و پایینی به شکل برد روی متغیرهای انتگرالی مشخص شده‌اند. نتیجه به صورت یک کسر نشان داده شده است که دوباره با مثال روشن می‌شود که میپل، به صورت پیش فرض یک محاسبه دقیق بدون تقریب را انجام می‌دهد. میپل، همچنین، می‌تواند با فرمان dsolve معادلات دیفرانسیل را حل کند. برای معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + 5\frac{d}{dt}u(t) + 6u(t) = 0,$$

شرایط اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1.$$

کاربرد فرمان `dsolve` در کاربرگ نشان داده شده است. در یک روش مشابه با فرم `solve`، معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه را به عنوان یک مجموعه ارائه می کنیم. در معادله دیفرانسیل، تابع مجهول را به صورت $u(t)$ وارد می کنیم که u تابعی از t است. در شرایط اولیه می توانیم عمل گر دیفرانسیلی D را استفاده کنیم. معنی این آرگومان $D(f)(x) = \text{diff}(f(x), x)$ است. بنابراین، عبارت $D(f)(0)$ مشتق اول f را در نقطه صفر مشخص می کند. میپل این معادلات دیفرانسیل را مستقیماً حل می کند و جواب را به ما می دهد.

$$u(t) = -e^{-3t} + e^{-2t}.$$

از خروجی های میپل قسمت سمت راست حل را با فرمان `rhs` استخراج کرده و نمودار این عبارت را رسم می کنیم.

در این کاربرگ، آشنایی کوچکی با میپل پیدا کردیم و تعداد کمی از فرمان های میپل را یاد گرفتیم. با این فرمان ها می توان عبارات جبری را دست کاری و رسم کرد. عملیات حساب دیفرانسیل و انتگرال را انجام داد و معادلات دیفرانسیل را حل کرد. کاربرد مؤثر این فرمان های پایه می تواند مقدار زیادی بازدهی ما را بهبود ببخشد. در ادامه این فصل، میپل را برای حل مسائل فیزیکی به کار می بریم و کاربرد آن را با مثال شرح می دهیم. فرمان های بیشتر را وقتی معرفی می کنیم که با شرایطی مواجه می شویم که اجازه استفاده از آنها را داریم. معرفی می کنیم، به این ترتیب، زمینه ای از سودمندی آن برای خواننده مشخص شود.

۲-۱. جبر پایه و حل معادلات

فرمان `solve` میپل تا حد زیادی مفید است. در این بخش، به طور مستقیم، مسائل فیزیکی واقعی را حل می کنیم.

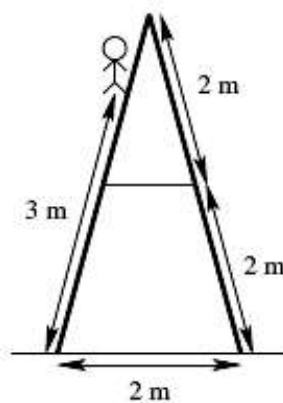
مثال ۱-۱، از مکانیک مقدماتی شرایط لازم برای تعادل استاتیک یک جسم این است که جمع برداری نیروها و گشتاورها در راستای هر محور صفر باشد:

$$\sum F = 0, \quad (1-1)$$

$$\sum N = 0. \quad (2-1)$$

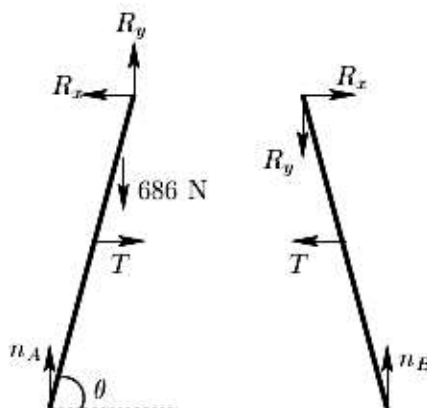
این نوع مسائل شامل حل هم زمان چندین معادله می شود. این قبیل کارها، مانند

کارهای دستی، خسته‌کننده‌اند؛ اما می‌تواند به آسانی آنها را انجام دهد. مسئله‌ای از کتاب درسی فیزیک پایه را بررسی می‌کنیم. یک نردبان متحرک با وزن ناچیز در شکل ۱-۱ رسم شده است. مردی با جرم ۷۰ کیلوگرم، ۳ متر پایین‌تر از جهت موازی با پایه نردبان ایستاده است. فرض کنید سطح زمین بدون اصطکاک است. کشش میله افقی، نیروی عمود برای هر پایه و مؤلفه‌های نیروی عکس‌العمل را در تک لولای بالا محاسبه کنید.



شکل ۱-۱. مرد روی نردبان

حل: بهتر است هر قسمت از نردبان را جداگانه مورد بررسی قرار دهیم. نمودار جسم آزاد در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.



شکل ۲-۱. نمودار جسم آزاد

مرد با جرم ۷۰ کیلوگرم نیروی $mg = (70.0\text{kg})(9.8\text{ms}^{-2})$ را اعمال می کند، زاویه θ که در زیر مشخص شده است، به شکل هندسی محاسبه می شود. برای نیمه چپ نردبان مؤلفه x نیروهای تعادل برابر است با:

$$\cos \theta = \frac{1.0}{4.0}.$$

$$\sum F_x = 0, \quad T - R_x = 0,$$

و مؤلفه y با

$$\sum F_y = 0, \quad R_y + n_A - 686 = 0.$$

داده می شود. نوک نردبان را به عنوان نقطه تکیه گاه انتخاب می کنیم و برای تعادل گشتاور روابط زیر را داریم:

$$\sum N_y = 0, \quad (686)(1.0)(\cos \theta) + (T)(2.0)(\sin \theta) - (n_A)(4.0)(\cos \theta) = 0.$$

برای نیمه راست نردبان، نیروهای تعادل در جهت y با رابطه زیر داده می شود

$$\sum F_y = 0, \quad n_B - R_y = 0,$$

و تعادل گشتاورها با برابر است با:

$$\sum N = 0, \quad (n_B)(4.0)(\cos \theta) - (T)(2.0)(\sin \theta) = 0.$$

چون ما پنج معادله و پنج مجهول n_A, n_B, R_x, R_y, T پیدا کردیم. می توانیم این پنج معادله را هم زمان حل کنیم.

کاربرگ ۴-۱

ابتدا محاسبه ساده $(70.0)(9.8)=686.0$ را انجام می دهیم. برای محاسبه θ از فرمان $\arccos$ استفاده می کنیم. پنج معادله بالا را وارد می کنیم و آنها را Eq1، Eq2، ...، Eq5 می نامیم. این پنج معادله را به عنوان یک مجموعه (که با کاما از هم جدا می شوند و در کروشه قرار دارند) برای حل در نظر می گیریم و مجهولات را محاسبه می کنیم.

> m := 70; g := 9.8;

m := 70

g := 9.8

> $m \cdot g$;

686.0

> $\theta := \arccos\left(\frac{1.0}{4.0}\right)$;

$\theta := 1.31811607$

> $Eq1 := Rx - T = 0$

$Eq1 := Rx - T = 0$

> $Eq2 := nA + Ry - m \cdot g = 0$;

$Eq2 := nA + Ry - 686.0 = 0$

> $Eq3 := m \cdot g \cdot 1.0 \cdot \cos(\theta) + T \cdot 2.0 \cdot \sin(\theta) - nA \cdot 4.0 \cdot \cos(\theta)$;

$Eq3 := 171.4999998 + 1.936491673T - 0.999999998nA$

> $Eq4 := nB - Ry = 0$

$Eq4 := nB - Ry = 0$

> $Eq5 := nB \cdot 4.0 \cdot \cos(\theta) - T \cdot 2.0 \sin(\theta) = 0$;

$Eq5 := 0.999999998nB - 1.936491673T = 0$

> $solve(\{Eq1, Eq2, Eq3, Eq4, Eq5\}, \{nA, nB, Rx, Ry, T\})$;

$\{Rx = 132.8433286, nB = 257.2500000, nA = 428.7500000, Ry = 257.2500000, T = 132.8433286\}$

کشش برابر است با:

$$T = 132.8N.$$

و نیروهای عمود در هر پایه به صورت زیر است:

$$n_A = 428.8N, \quad n_B = 257.3N,$$

و مؤلفه‌های x و y نیروهای عکس‌العمل در لولا برابر است با:

$$R_x = 132.8N, \quad R_y = 257.2N.$$