



گروه و جبر لی (۱)

(کارشناسی ارشد رشته ریاضی)

دکتر قربانعلی حقیقت دوست بناب دکتر فیصل حسنی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

سیرده	پیشگفتار مؤلفان
۱	فصل اول: گروه‌های توپولوژیک
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۲	مقدمه
۴	۱-۱ مثال‌هایی از گروه‌های توپولوژیک
۸	خودآزمایی تشریحی فصل اول
۱۱	فصل دوم: گروه لی
۱۱	هدف کلی
۱۱	هدف‌های یادگیری
۱۱	مقدمه
۱۲	۱-۲ مثال‌هایی از گروه‌های لی
۱۴	۲-۲ زیرگروه لی
۱۸	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۲۱	فصل سوم: جبر لی
۲۱	هدف کلی
۲۱	هدف‌های یادگیری
۲۱	مقدمه
۲۲	۱-۳ مثال‌هایی از جبرهای لی
۲۴	۲-۳ ساختار جبرهای لی
۲۶	۳-۳ حقیقی‌سازی
۲۸	۴-۳ طبقه‌بندی جبرهای لی حقیقی از بعد متناهی
۲۹	خودآزمایی تشریحی فصل سوم

۳۳	فصل چهارم: گروه‌ها و جبرهای لی
۳۳	هدف کلی
۳۳	هدف‌های یادگیری
۳۳	مقدمه
۳۴	۱-۴ میدان برداری پایای چپ
۳۷	۲-۴ محاسبه ثابت‌های ساختاری جبر لی - روش اول
۳۸	۳-۴ فرم‌های پایای چپ
۳۹	۴-۴ معادلات ساختاری کارتان
۳۹	۵-۴ میدان‌های برداری کامل
۴۰	۶-۴ محاسبه ثابت‌های ساختاری جبر لی - روش دوم
۴۲	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۴۵	فصل پنجم: نگاشت‌نمایی و گروه‌های لی موضعی
۴۵	هدف کلی
۴۵	هدف‌های یادگیری
۴۵	مقدمه
۴۶	۱-۵ زیرگروه‌های ۱- پارامتری و نگاشت‌نمایی
۴۷	۲-۵ روش یافتن گروه لی موضعی از یک جبر لی
۵۰	۳-۵ زیرگروه‌های مجازی
۵۰	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۵۵	فصل ششم: همومورفیسم‌ها و اتومورفیسم‌ها
۵۵	هدف کلی
۵۵	هدف‌های یادگیری
۵۵	مقدمه
۵۶	۱-۶ همومورفیسم گروه‌های لی
۶۰	۲-۶ اتومورفیسم‌ها
۶۱	۳-۶ اتومورفیسم‌های داخلی
۶۴	خودآزمایی تشریحی فصل ششم
۶۷	فصل هفتم: گروه لی خارج قسمتی، ضرب مستقیم و نیمه‌مستقیم گروه‌های لی
۶۷	هدف کلی
۶۷	هدف‌های یادگیری
۶۷	۱-۷ گروه لی خارج قسمتی
۶۸	۲-۷ ضرب مستقیم گروه‌های لی
۶۹	۳-۷ ضرب نیمه‌مستقیم گروه‌های لی
۷۰	۴-۷ مثال‌ها
۷۲	خودآزمایی تشریحی فصل هفتم

۷۵	فصل هشتم: نمایش خطی
۷۵	هدف کلی
۷۵	هدف‌های یادگیری
۷۵	مقدمه
۷۶	۱-۸ نمایش گروه‌های لی
۷۷	۲-۸ زیرفضاهای G - پایا
۷۸	۳-۸ ساختن نمایش‌های جدید از روی نمایش‌های داده‌شده
۷۸	۱-۳-۸ جمع مستقیم و ضرب تانسوری نمایش‌ها
۷۸	۲-۳-۸ نمایش G روی دوگان فضای برداری
۷۹	۳-۳-۸ نمایش G روی فضای تانسوری
۸۰	۴-۸ مثال‌ها
۸۲	خودآزمایی تشریحی فصل هشتم
۸۵	فصل نهم: نمایش الحاقی
۸۵	هدف کلی
۸۵	هدف‌های یادگیری
۸۵	مقدمه
۸۶	۱-۹ نمایش الحاقی
۸۶	۱-۱-۹ نمایش الحاقی جبر لی g روی g
۸۷	۲-۹ رتبه جبر لی
۸۸	۳-۹ چند مثال
۸۹	خودآزمایی تشریحی فصل نهم
۹۱	فصل دهم: گروه پوششی
۹۱	هدف کلی
۹۱	هدف‌های یادگیری
۹۱	۱-۱۰ گروه پوششی
۹۲	لم ۲-۱۰ گروه اساسی
۹۳	خودآزمایی تشریحی فصل دهم
۹۵	فصل یازدهم: فرم کیلینگ
۹۵	هدف کلی
۹۵	هدف‌های یادگیری
۹۵	مقدمه
۹۶	۱-۱۱ فرم کیلینگ
۹۶	۱-۱-۱۱ - برخی خواص و ویژگی‌ها
۹۷	۲-۱۱ متریک کیلینگ
۹۸	خودآزمایی تشریحی فصل یازدهم

۹۹	فصل دوازدهم: انواع جبر لی
۹۹	هدف کلی
۹۹	هدف‌های یادگیری
۹۹	مقدمه
۱۰۰	۱-۱۲ جبر لی حل‌پذیر
۱۰۱	۲-۱۲ جبر لی پوچ‌توان
۱۰۲	۳-۱۲ جبرهای لی ساده و نیمه‌ساده
۱۰۲	۴-۱۲ گروه‌های لی حل‌پذیر و پوچ‌توان
۱۰۶	خودآزمایی تشریحی فصل دوازدهم
۱۰۷	فصل سیزدهم: تبدیلات گروه‌های لی
۱۰۷	هدف کلی
۱۰۷	هدف‌های یادگیری
۱۰۷	۱-۱۳ عمل یک گروه لی روی چندگونای هموار
۱۰۸	۲-۱۳ عمل مؤثر، متعدی و آزاد
۱۰۸	تعریف ۵-۱۳
۱۰۹	تعریف ۶-۱۳
۱۰۹	۳-۱۳ عملگرهای تبدیلات گروه لی
۱۱۲	خودآزمایی تشریحی فصل سیزدهم
۱۱۵	فصل چهاردهم: فضاهاى همگن
۱۱۵	هدف کلی
۱۱۵	هدف‌های یادگیری
۱۱۵	مقدمه
۱۱۶	۱-۱۴ G - فضای همگن
۱۱۷	۲-۱۴ مورفیزم
۱۱۷	خودآزمایی تشریحی فصل چهاردهم
۱۱۹	فصل پانزدهم: مدارات، ناورداها و چندگونای ناوردا
۱۱۹	هدف کلی
۱۱۹	هدف‌های یادگیری
۱۱۹	۱-۱۵ روش یافتن مدارات و عملگرهای گروه لی
۱۲۰	۲-۱۵ ناوردا و چندگونای ناوردا
۱۲۱	۳-۱۵ مثال‌ها
۱۲۵	خودآزمایی تشریحی فصل پانزدهم
۱۲۷	پیوست الف: مسائل حل‌شده
۱۶۲	پیوست ب: مبانی چندگوناها
۱۷۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

۱۷۹

۱۸۱

۱۸۳

نمادها

منابع

نمایه

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های پیام‌نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشی، فرادرسی و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب‌های درسی، ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که بر اساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود. متن آزمایشی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای علمی و آزمایشی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و کمک‌درسی (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

پیشگفتار مؤلفان

نظریه گروه‌ها در عصر حاضر یکی از وسیع‌ترین حوزه‌های ریاضیات جدید می‌باشد که دارای زیرشاخه‌ها و گرایش‌های متعددی با کاربردهای مختلف است. کتاب حاضر با هدف آشنایی اولیه با موضوع گروه‌های لی و جبرهای لی تهیه و تدوین شده است. به‌خصوص مطالب کتاب برای دانشجویان کارشناسی ارشد و دکتری و همچنین برای متخصصین در این حوزه، کسانی که از نقطه نظر روش‌های کاربردی به موضوع علاقمند می‌باشند، مفید و مؤثر واقع خواهد شد.

جهت آشنایی و مطالعه عمیق موضوع می‌توان به منابع تخصصی دیگر مراجعه کرد که در فهرست منابع آورده شده است. نوشته حاضر، حاصل چندین سال تدریس درس گروه‌های لی و جبرهای لی در کلاس‌های کارشناسی ارشد ریاضی در دانشگاه شهید مدنی آذربایجان می‌باشد و نتیجه پرسش و پاسخ‌های دانشجویان گرامی گروه ریاضی است. بخش‌های قابل توجهی از کتاب، عمدتاً تألیف و هر بخش از آن شامل مقدمات نظری و همچنین مثال‌های مفیدی مربوط به موضوع می‌باشد. (چندین سال کتاب حاضر به‌صورت جزوه درسی تهیه و تدریس می‌شد).

کتاب‌های زیادی در زمینه گروه‌های لی و جبرهای لی موجود می‌باشد و برای این موضوع از بعد نظری منابع بسیار زیادی وجود دارد. این کتاب، بیشتر برای کسانی مفید خواهد بود که علاقمند به به‌کارگیری موضوعات گروه‌های لی و جبرهای لی در حوزه‌های هندسه دیفرانسیل، نظریه معادلات دیفرانسیل، مکانیک، فیزیک نظری و ... می‌باشند.

گروه‌های لی را از نقطه نظر کاربردی، قبل از هر چیز می‌توان به عنوان گروه تقارن (اتومورفیسم‌های) ساختارهای مختلف روی چندگونا‌های هموار در نظر گرفت؛ لذا در بخش‌های مختلف کتاب سعی می‌شود و به این موضوع با استفاده از مثال‌های متعدد تأکید شود.

با توجه به اینکه درس گروه‌های لی و جبرهای لی (۱) معمولاً در ترم دوم دوره کارشناسی ارشد برای دانشجویان ارائه می‌شود، درس‌های نظریه گروه از دوره کارشناسی و درس هندسه چندگونا‌ها از دوره کارشناسی ارشد برای فهمیدن عمیق موضوع بسیار مورد نیاز خواهد بود و جزو پیش‌نیازهای اصلی هستند. البته دروسی مانند جبر خطی و توپولوژی عمومی و همچنین هندسه دیفرانسیل موضوعی از جمله دروسی می‌باشند که از آنها به نوعی استفاده می‌شود. کتاب حاضر شامل پانزده بخش (که با عنوان فصل) مطرح شده‌اند، تهیه و تنظیم شده‌است.

فصل اول کتاب، به معرفی گروه‌های توپولوژیکی و مثال‌های مهم اختصاص یافته، در فصل دوم مفهوم گروه لی و جبر لی مورد بحث قرار گرفته‌است. جبر لی مستقلاً در فصل سوم به صورت مفصل بررسی شده و همچنین به موضوع طبقه‌بندی جبرهای لی به کمک ثابت‌های ساختاری اشاره شده و طبقه‌بندی جبرهای لی سه‌بعدی و نه حالت جبر لی سه بعدی در این فصل ارائه شده‌است. در فصل چهارم جبر لی مربوط به گروه لی تعریف شده و برای یک گروه لی دلخواه جبر لی آن معرفی و طریقه ساختن آن به‌طور مفصل مورد بحث قرار گرفته و مثال‌های متعددی ارائه شده‌است.

بعد از ارائه روش‌های یافتن جبر لی یک گروه لی معلوم در فصل چهارم، سؤال اساسی که مطرح می‌شود این است که آیا به هر جبر لی مجرد معلوم می‌توان یک گروه لی وابسته کرد؟ این سؤال در فصل پنجم مورد بحث قرار گرفته و سعی شده که به نوعی پاسخی به این سؤال داده شود.

روابط بین گروه‌های لی و جبرهای لی آن‌ها به کمک همومورفیسم‌ها و اتومورفیسم‌های گروه‌های لی در فصل ششم به صورت مختصر مورد بحث قرار گرفته‌است.

در فصل هفتم روش‌های ساختن گروه‌های لی و جبرهای لی جدید به کمک خارج قسمت و ضرب‌های مستقیم و نیمه‌مستقیم به‌همراه مثال مورد بحث قرار گرفته‌است.

یکی از مهم‌ترین مباحث در گروه‌ها، نظریه نمایش می‌باشد که به هر عنصر گروه یک تبدیل خطی یا به عبارتی یک ماتریس وابسته می‌کند. فصل هشتم به مبحث نمایش خطی می‌پردازد و مقدمات تعریف یکی از مهم‌ترین نمایش‌های گروه‌های لی که همان نمایش الحاقی است را فراهم می‌کند. بحث و بررسی در خصوص نمایش الحاقی و ارائه تعریف مناسب برای نمایش یک گروه لی روی جبر لی خودش و همچنین نمایش جبر لی روی خودش و ارائه مثال‌های مناسب در فصل نهم انجام می‌گیرد. تعریف کوتاهی از گروه‌های پوششی و اولین گروه اساسی جهت حفظ استقلال کتاب در فصل دهم ارائه شده‌است.

موضوع طبقه‌بندی انواع جبرهای لی و گروه‌های لی، یکی از اساسی‌ترین سؤالات مطرح در نظریه گروه است. یکی از روش‌های طبقه‌بندی، استفاده از فرمی به نام فرم کیلینگ است که معرفی و بررسی خواص آن، موضوع بحث فصل یازدهم می‌باشد. فصل دوازدهم به معرفی انواع جبرهای لی و بحث در مورد آنها می‌پردازد. عمل یک گروه لی روی یک چندگونای هموار که منجر به یافتن تبدیلات گروه‌های لی می‌شود، همچنین معرفی انواع عمل یک گروه لی روی چندگونا در فصل سیزدهم مطالعه می‌گردد. فضاهای همگن و ارائه مثال‌های جدیدی از فضاهای همگن، موضوع فصل چهاردهم قرار گرفته‌است. در فصل پانزدهم، آخرین فصل کتاب، روش یافتن مدارات و عملگرهای یک گروه لی و چندگوناهای ناوردای به‌همراه مثال‌های متعدد ارائه و مطالعه می‌گردد. ضمیمه‌ای مختصر از مقدمه‌ای بر هندسه چندگوناها برای حفظ استقلال کتاب آورده شده، که امیدواریم در مطالعه کتاب حاضر مفید واقع گردد.

قربانعلی حقیقت‌دوست بناب

(دانشیار دانشگاه شهید مدنی آذربایجان - تبریز)

فیصل حسنی بهار ۱۳۹۴

فصل اول

گروه‌های توپولوژیک

هدف کلی

معرفی گروه‌های توپولوژیکی و ارائه مثال‌های مهم، آشنایی با گروه‌های سیمپلیکتیک.

هدف‌های یادگیری

از دانشجو انتظار می‌رود پس از مطالعه و یادگیری این فصل:

۱. تعریف گروه توپولوژیکی را به‌خوبی فراگرفته باشد و بتواند گروه توپولوژیک‌بودن یک مجموعه داده‌شده را بررسی نماید. همچنین با برخی از گروه‌های توپولوژیکی شناخته‌شده، آشنایی داشته باشد و برخی خواص این گروه‌ها را تشریح نماید.
۲. با مفهوم زیرگروه توپولوژیک و برخی از خواص آن آشنایی پیدا کند.
۳. بتواند نمایش ماتریسی برخی فرم‌های دوخطی مانند فرم‌های دوخطی متقارن و ناتبه‌گون، نامتقارن و ناتبه‌گون، هرمیتی متقارن و ناتبه‌گون را به‌دست آورد. برخی گروه‌های ماتریسی نظیر گروه ماتریس‌های متعامد، یکانی و گروه‌های سیمپلیکتیک را تشریح نماید و به کمک مفهوم ایزومورفیسم، ایزومورف‌بودن برخی گروه‌ها را نشان دهد.

مقدمه

یک گروه توپولوژیکی از آمیختن دو ایده فضای توپولوژیکی و گروه حاصل می آید؛ بنابراین می توان آن را به عنوان یک فضای توپولوژیکی با ساختار گروهی و یا یک گروه با عملگرهای پیوسته در نظر گرفت. به صورت دقیق تر می توان تعریف زیر را ارائه داد:

تعریف ۱-۱ مجموعه G یک گروه توپولوژیکی نامیده می شود، هرگاه

الف) G یک گروه باشد.

ب) G یک فضای توپولوژیکی باشد.

ج) عمل گروه، یعنی $f(a,b) = a.b$ ، $f: G \times G \rightarrow G$ و $S(a) = a^{-1}$ ، $S: G \rightarrow G$ توابع پیوسته باشد.

پیوستگی تابع f به این معنی است که اگر $a, b \in G$ ، آنگاه برای همسایگی W از $c = a.b$ همسایگی های U از a و V از b وجود دارند به طوری که $UV \subset W$ ، که در آن

$$UV = \{u.v \mid u \in U, v \in V\}$$

پیوستگی تابع S معادل است با اینکه به ازای هر $a^{-1} \in V$ وجود داشته باشد U

شامل a به طوری که $U^{-1} \subset V$ ، که در آن $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$.

تعریف ۲-۱

نگاشت $\varphi: G \rightarrow G'$ یک ایزومورفیسم گروه های توپولوژیکی نامیده می شود هرگاه:

الف) φ ایزومورفیسم گروهی باشد، یعنی نگاشتی دوسویی باشد و

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

ب) φ همئومورفیسمی از G به توی G' باشد.

تعریف ۳-۱ فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی و $a \in G$ ، تعریف می کنیم:

$$L_a: G \rightarrow G, \quad R_a: G \rightarrow G$$

$$L_a(x) = ax, \quad R_a(x) = ax$$

L_a و R_a را به ترتیب انتقالات چپ و راست در امتداد a گوئیم.

گروه‌های توپولوژیک ۳

تبصره ۱-۴ خواننده می‌تواند بررسی کند که توپولوژی گروه G به‌طور کامل توسط پایه‌ای از همسایگی‌های حول عضو همانی گروه، یعنی $\{U\}$ باز است. $\sum_e = \{U \mid U \ni e\}$ مشخص می‌گردد [۴]. می‌توان خواص زیر را بررسی نمود:

- (۱) $\forall U, V \in \sum_e, \exists W \in \sum_e, s.t. W \subset U \cap V$
- (۲) $\bigcap_{U \in \sum_e} U = \{e\}$
- (۳) $\forall U \in \sum_e, \exists V \in \sum_e, s.t. VV^{-1} \subset U$
- (۴) $\forall U \in \sum_e, \forall a \in U, \exists V \in \sum_e, s.t. aVa^{-1} \subset U$

همسایگی‌های اعضای دیگر گروه G مانند $a \in G$ به کمک انتقالات چپ و راست از اعضای $\sum_e$ به‌وجود می‌آیند. به‌طور کلی می‌توان پایه‌ای برای خود گروه به‌صورت زیر تعریف کرد که در آن M یک زیر مجموعه چگال در G می‌باشد:

$$\sum = \{aU \mid U \in \sum_e, a \in M\}$$

یک فضای توپولوژیک را هرگاه به‌صورت اجتماع دو مجموعه باز ناتهی و مجزای خود نباشد، همبند می‌نامیم. گروه توپولوژیک G را هرگاه G یک فضای توپولوژیک همبند باشد، همبند گوییم. زیرمجموعه A از G را همبند می‌گوییم هرگاه A با توپولوژی زیر فضایی، یک فضای توپولوژیک همبند باشد. گروه G را کاملاً ناهمبند می‌نامیم هرگاه تنها زیرمجموعه‌های همبند آن، تک‌عضوی‌ها باشند. دقت کنید چون همبندی یک خاصیت توپولوژیکی است، در صورت همبند بودن G ، هر فضای هم‌مورف با G نیز همبند خواهد بود. رابطه $\sim$ را برای هر $x, y \in G$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A \text{ که } A \text{ از } G \text{ موجود است به‌طوری که}$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است. بنابراین، این رابطه G را به رده‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. به هر یک از این رده‌های هم‌ارزی یک مؤلفه همبندی G می‌گوییم. به این‌صورت هر $x \in G$ به یکی از مؤلفه‌های همبندی G تعلق دارد [۶].

تعریف ۵-۱ (زیرگروه توپولوژیکی):

فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی باشد. مجموعه $H \subset G$ را زیرگروه توپولوژیکی گویند هرگاه،

الف) H زیرگروه جبری باشد، یعنی $HH^{-1} \subset H$.

ب) H به عنوان یک فضای توپولوژیکی زیرمجموعه بسته ای از G باشد.
از تعریف فوق استنباط می شود که توپولوژی H توپولوژی زیرفضایی است.

تعریف ۶-۱ (زیرگروه توپولوژیکی نرمال)

اگر N به عنوان زیرگروه جبری نرمال در G و به عنوان فضای توپولوژیکی، زیرمجموعه بسته ای از G باشد، آن را زیرگروه توپولوژیکی نرمال گوئیم.

تعریف ۷-۱ (مرکز گروه)

مرکز Z از گروه G عبارت است از تمام عناصری مانند $z \in G$ به طوری که به ازای هر $a \in G$ ، $az = za$.

مثال ۸-۱

مرکز گروه همواره یک زیرگروه توپولوژیکی نرمال از G است.

تعریف ۹-۱ (زیرگروه توپولوژیکی گسسته)

زیرگروه توپولوژیکی K در G را گسسته می نامیم، هرگاه توپولوژی زیرفضایی آن توپولوژی گسسته باشد.

مثال ۱۰-۱

$(\mathbb{Z}, +)$ یک زیرگروه توپولوژیکی گسسته $(\mathbb{R}, +)$ است.

۱-۱ مثال هایی از گروه های توپولوژیک

۱. فضای اعداد حقیقی $\mathbb{R}^1$ را با اعمال زیر در نظر بگیرید،

گروه‌های توپولوژیک ۵

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(a, b) = a + b \text{ و } S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; S(a) = -a$$

می‌توان به آسانی نشان داد که یک گروه توپولوژیکی است.

به صورت مشابه $(\mathbb{R}^n, +)$ و $(\mathbb{C}^n, +)$ نیز گروه‌های توپولوژیکی می‌باشند.

۲. فضای اعداد حقیقی به استثنای صفر، یعنی $\mathbb{R}_\circ = \mathbb{R} / \{0\}$ را با اعمال زیر در نظر بگیرید،

$f: \mathbb{R}_\circ \times \mathbb{R}_\circ \rightarrow \mathbb{R}_\circ : f(a, b) = a \times b$ و $S: \mathbb{R}_\circ \rightarrow \mathbb{R}_\circ ; S(a) = \frac{1}{a}$
 که در آن S تابعی گویا با مخرج مخالف صفر است؛ در این صورت $(\mathbb{R}_\circ, \times)$ یک گروه توپولوژیکی جابه‌جایی است.

$(\mathbb{C}_\circ, \times)$ با عمل ضرب مختلط گروه توپولوژیکی می‌باشد.

۳. فضای تمام ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ روی اعداد حقیقی، یعنی $G = GL(n, \mathbb{R})$ را با اعمال ضرب ماتریسی و وارون به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f: G \times G \rightarrow G ; f(A, B) = AB \text{ و } S: G \rightarrow G ; S(A) = \frac{Ad(A)}{\det A}$$

که در آن $Ad(A)$ ماتریس الحاقی A است. در این صورت $(G, \times)$ یک گروه توپولوژیکی ناجابه‌جایی است، مگر اینکه $n = 1$. همسایگی‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U(A, \varepsilon) = \left\{ X \in GL(n, \mathbb{R}) : \|X_\beta^\alpha - A_\beta^\alpha\| < \varepsilon \right\} \quad (*)$$

$$A = (A_\beta^\alpha) , X = (X_\beta^i)$$

$$(AB)_\beta^\alpha = f_\beta^\alpha(AB) = \sum_\sigma A_\sigma^\alpha B_\beta^\sigma$$

$$(A^{-1})_\beta^\alpha = S_\beta^\alpha(A) = \frac{Ad(A_\beta^\alpha)}{\det A}$$

به صورت مشابه $GL(n, \mathbb{C})$ و $GL(n, \mathbb{K})$ که $\mathbb{K}$ یک میدان است؛ گروه‌هایی توپولوژیکی می‌باشند. این گروه‌ها را گروه‌های توپولوژیکی خطی می‌نامند.

۴. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، $GL(V)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$GL(V) = \{ A: V \rightarrow V \mid \text{عملگری نامنفرد است} \}$$