



مبانی آنالیز ریاضی

(رشته علوم کامپیوتر و ریاضیات و کاربردها)

دکتر فیصل حسنی دکتر علی عبادیان دکتر حمید شجاعی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار.....	نه
فصل اول. آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی.....	۱
هدف‌های کلی.....	۱
هدف‌های یادگیری.....	۱
مقدمه.....	۱
۱-۱ نظریه مجموعه‌ها.....	۲
۲-۱ اعداد حقیقی.....	۹
۳-۱ استقراء.....	۱۱
۴-۱ کاربردی از قضیه وجودی اعداد حقیقی.....	۲۲
تمرین.....	۲۹
فصل دوم. دنباله‌ها.....	۳۱
هدف‌های کلی.....	۳۱
هدف‌های یادگیری.....	۳۱
مقدمه.....	۳۱
۱-۲ مفاهیم اولیه و تعاریف.....	۳۲
۲-۲ دنباله‌های یکنوا.....	۳۷
۳-۲ زیردنباله‌ها.....	۴۹
تمرین.....	۵۷

فصل سوم. فضاهاى متریک.....	۵۹
هدف‌هاى کلی.....	۵۹
هدف‌هاى یادگیرى.....	۵۹
۱-۳ فضاى متریک.....	۵۹
۲-۳ مجموعه‌هاى باز و بسته.....	۶۴
۳-۳ همگرایی و واگرایی دنباله‌ها در یک فضاى متریک.....	۷۳
۴-۳ دنباله‌هاى کوشى و فضاهاى کامل.....	۷۴
۵-۳ فشردگى.....	۷۹
۶-۳ همبندى.....	۹۱
تمرین.....	۹۲
فصل چهارم. توابع.....	۹۵
هدف‌هاى کلی.....	۹۵
هدف‌هاى یادگیرى.....	۹۵
مقدمه.....	۹۵
۱-۴ تابع.....	۹۶
۲-۴ حد توابع در فضاى متریک.....	۹۶
۳-۴ قضایای حد.....	۱۰۳
۴-۴ حد چپ و راست.....	۱۱۱
۵-۴ حدود نامتناهى.....	۱۱۷
۶-۴ حد در بینهایت.....	۱۲۰
۷-۴ توابع پیوسته.....	۱۲۲
۸-۴ پیوستگى و فشردگى.....	۱۲۷
۹-۴ پیوستگى یکنواخت.....	۱۲۹
۱۰-۴ پیوستگى و همبندى.....	۱۳۲
۱۱-۴ توابع یکنوا.....	۱۳۴
تمرین.....	۱۳۷
فصل پنجم. مشتق.....	۱۳۹
هدف‌هاى کلی.....	۱۳۹
هدف‌هاى یادگیرى.....	۱۳۹
مقدمه.....	۱۳۹
۱-۵ تعریف و قضایای مشتق.....	۱۴۰
۲-۵ اعمال جبرى مشتق.....	۱۴۴
۳-۵ قضایای رل و مقدار میانگین.....	۱۵۳

۴-۵	توابع یکنوا.....	۱۶۱
۵-۵	قاعده هوییتال.....	۱۶۳
۶-۵	قضیه تیلور.....	۱۶۶
۷-۵	توابع وارون.....	۱۷۱
تمرین		۱۷۲
فصل ششم. انتگرال ریمان.....		۱۷۵
هدف‌های کلی.....		۱۷۵
هدف‌های یادگیری.....		۱۷۵
۱-۶ تعاریف.....		۱۷۵
۲-۶ انتگرال ریمان.....		۱۸۲
۳-۶ خواص انتگرال ریمان.....		۱۸۶
۴-۶ قضایای خطی انتگرال ریمان.....		۱۹۴
۵-۶ انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری.....		۲۰۰
تمرین		۲۰۸
فصل هفتم. دنباله و سری توابع.....		۲۱۳
هدف‌های کلی.....		۲۱۳
هدف‌های یادگیری.....		۲۱۳
۱-۷ همگرانی نقطه به نقطه.....		۲۱۳
۲-۷ همگرایی یکنواخت.....		۲۱۸
۳-۷ خواص توابع همگرایی یکنواخت.....		۲۲۲
۴-۷ همگرایی یکنواخت و پیوستگی.....		۲۲۳
۵-۷ همگرایی یکنواخت و مشتق‌پذیری.....		۲۲۶
۶-۷ همگرایی یکنواخت و انتگرال.....		۲۲۹
۷-۷ همگرایی سری‌های توابع.....		۲۳۵
۸-۷ آزمون‌های همگرایی یکنواخت.....		۲۳۸
تمرین		۲۴۵
منابع.....		۲۵۱

پیشگفتار

این کتاب حاصل تجربه چندین سال تدریس مؤلفان در مباحث متفاوت آنالیز در مقاطع مختلف است و بر اساس سرفصل‌های مبانی آنالیز ریاضی مصوب شورای برنامه‌ریزی تألیف شده است. مؤلفان از اعضای هیئت علمی دانشگاه پیام نور بوده و در تألیف این کتاب سعی کرده‌اند با توجه به سیاست‌ها و اصول دانشگاه پیام نور که کتاب‌محور است، کتاب را به صورت خودآموز تدوین کنند تا خواننده به راحتی بتواند مطالب را درک و فقط به راهنمایی استاد در این زمینه اکتفا نماید. بنابراین در هر بخش مثال‌های مختلفی مطرح و تمرینات ساده‌ای مربوط به هر بخش آورده شده است. البته از حل این مسائل خودداری شده است تا خواننده بتواند توانمندی خود را آزمایش کند.

فصل اول این کتاب با نظریه مجموعه‌ها و اعداد آغاز می‌شود و سپس دستگاه اعداد حقیقی به عنوان یک میدان مرتب در نظر گرفته می‌شود که با تعاریف کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه اصل استقراء و اصل خوش‌ترتیبی اعداد معرفی شده و خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل دوم به بررسی دنباله اعداد پرداخته و خواص آن مورد بررسی قرار می‌گیرد تا بتوانیم در فصل سوم که به فضاهای متریک اختصاص دارد. فضاهای متریک کامل را تعریف و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم نگاه عمیقی به فضاهای متریک داریم و خواص کامل این فضاها را بررسی می‌کنیم چرا که شاید برای اولین بار باشد که خواننده به این مفهوم پی می‌برد. در ادامه قضایای مهمی مانند قضیه بولتزانو-وایرشتراس، قضیه اشتراکی کانتور و قضیه پوششی لیندلف را بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم، به بررسی توابع به‌طور کامل پرداخته شده و مفهوم حد و پیوستگی را که خواننده قبلاً در ریاضی عمومی با آنها آشنا شده بود، روی فضاهای متریک دلخواه مورد بررسی قرار می‌دهیم و فضاهای فشرده را به صورت کامل بیان می‌کنیم. البته به حدود در بی‌نهایت به‌طور مختصر اشاره می‌شود، چرا که خواننده با این مفهوم در ریاضی عمومی آشنا شده است. نهایتاً روابط بین پیوستگی توابع و فشردگی و همبندی بررسی و به توابع یکنوا اشاره می‌شود.

در فصل پنجم، مشتق توابع مورد مطالعه قرار می‌گیرد و قضایای رل، مقدار میانگین و قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته را بررسی می‌شود. قضیه تیلور و قضیه تابع وارون نیز بیان و ثابت می‌شوند.

در فصل ششم، به تعریف انتگرال ریمان پرداخته و خواص آن بررسی می‌شود و انتگرالگیری، مشتق‌گیری و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بحث قرار می‌گیرد.

در فصل هفتم، مفهوم دنباله توابع بیان شده است و همگرایی نقطه‌به‌نقطه و همگرایی یکنواخت تعریف و خواص آن ثابت می‌شود. در ادامه و در بخش آخر سری توابع مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل اول

آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی

هدف‌های کلی

- آشنایی با نظریه مقدماتی مجموعه‌ها
- آشنایی با اعداد حقیقی

هدف‌های یادگیری

- از خواننده انتظار می‌رود، پس از مطالعه این فصل بتواند:
- با مجموعه‌ها و اعمال روی آن‌ها آشنا شود.
- اصل موضوع گسترش و تصریح را بداند.
- با مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا و ناشمارا و خواص آن‌ها آشنا شود.
- با مفهوم میدان آشنا شود و میدان اعداد حقیقی را بداند.
- با چگونگی ساخته شدن اعداد آشنا شود.
- رابطه ترتیب و خواص آن را روی اعداد بداند.

مقدمه

مجموعه از مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌هاست و همان‌طور که می‌دانیم تعریفی جامع و کلی برای مجموعه آورده نمی‌شود. همچنین مفهوم عضویت نیز از مفاهیم اولیه است. چنان‌چه x متعلق به A باشد (x عنصری از A باشد، A شامل x باشد) می‌نویسیم $x \in A$ و چنان‌چه x عنصری از A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$. برای مثال، مجموعه دانشجویان

سال اول دانشگاه، مصداقی از مفهوم مجموعه است و گزاره «علی دانشجوی سال اول دانشگاه است»، عضویت علی را در این مجموعه بیان می‌کند. یکی از روابط ممکن میان مجموعه‌ها، تساوی است. تساوی دو مجموعه A و B را همیشه با علامت $A = B$ نمایش می‌دهیم و در صورتی که A و B با هم مساوی نباشد، می‌نویسیم $A \neq B$. رابطه عضویت با تساوی اساسی‌ترین اصل نظریه مجموعه‌هاست، که به صورت زیر بیان می‌کنیم:

اصل موضوع گسترش: دو مجموعه با هم مساویند اگر و تنها اگر دارای عناصر یکسان باشند.

دانستن این مطلب اهمیت دارد که اصل موضوع گسترش صرفاً خاصیتی نیست که در مورد تساوی ضرورت منطقی داشته باشد، بلکه حکم غیربدیهی درباره تعلق است.

۱-۱ نظریه مجموعه‌ها

۱-۱-۱ تعریف. هرگاه A و B دو مجموعه باشند و هر عضو A ، عضوی از B باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است یا B شامل A است و می‌نویسیم:

$$A \subseteq B \text{ (یا } B \supseteq A \text{)}$$

بنا به اصل گسترش بدیهی است اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آن‌گاه $A = B$. همچنین هر مجموعه، زیرمجموعه‌ای از خودش است؛ یعنی $(A \subseteq A)$. چنانچه $A \subseteq B$ و $A \neq B$ می‌نویسیم $A \subset B$.

متناظر با هر مجموعه A و هر خاصیت P ، مجموعه‌ای مانند B موجود است که اعضای آن دقیقاً، x هایی از A هستند که شرط $P(x)$ برای آن‌ها صادق باشد. به عبارت دیگر:

$$B = \{x \in A : P(x)\}$$

۱-۱-۲ مثال. اگر $A = \mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی است) و P خاصیت زوج بودن اعداد باشد، آن‌گاه $B = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ که همان مجموعه اعداد زوج است. به عبارت دیگر:

$$B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی ۳

سؤالی که مطرح می‌شود، این است که آیا مجموعه‌ای وجود دارد که هر شیئی به آن تعلق داشته باشد؟ یا به عبارت دیگر مجموعه جهانی وجود دارد؟ البته که جواب منفی است زیرا اگر A یک مجموعه از مجموعه‌های دلخواه باشد و $B = \{x \in A: x \notin x\}$ ، آن‌گاه برای هر y داریم:

$$y \in B \text{ اگر و تنها اگر } y \notin y \quad (*)$$

آیا ممکن است $B \in A$ ؟ جواب منفی است. در واقع اگر $B \subset A$ آن‌گاه یا $B \in B$ که در این صورت از $(*)$ نتیجه می‌شود که $B \notin B$ و $B \in A$ که در تناقض است و اگر $B \notin A$ از $(*)$ نتیجه می‌شود $B \in B$ که باز هم در تناقض است و این نشان می‌دهد که مجموعه جهانی وجود ندارد. اما در هر بحثی ما یک مجموعه خاص را در نظر می‌گیریم که می‌توان آن را مجموعه مرجع نامگذاری کنیم. برای مثال در نظریه اعداد مجموعه مرجع را همان مجموعه اعداد صحیح در نظر می‌گیریم.

با توجه به مطلب فوق اگر مجموعه $B = \{x \in A: x \notin x\}$ را در نظر بگیریم آن‌گاه این مجموعه دارای هیچ عنصری نخواهد بود که در آن صورت به این مجموعه تهی می‌گوییم و آن را با نماد $\emptyset$ نمایش می‌دهیم. با توجه به اصل گسترش مجموعه تهی منحصر به فرد است، یعنی فقط یک مجموعه تهی وجود دارد. حال اعمال زیر را روی مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم.

۱-۳-۱ تعریف.

الف) اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cup B$ نمایش می‌دهیم و بدین گونه تعریف می‌کنیم:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

ب) اشتراک در مجموعه A و B ، مجموعه $A \cap B$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \cap B = \{x: x \in A, x \in B\}$$

ج) متمم B نسبت به A را به صورت $A - B$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم:

$$A - B = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

اگر $A \cap B = \emptyset$ آن گاه دو مجموعه را جدا از هم می نامیم. اجتماع و اشتراک را می توان به گردایه ای از مجموعه ها توسعه داد.

۱-۱-۴ تعریف. اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ گردایه ای از مجموعه ها باشد، اجتماع آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x: \exists i \in I, x \in A_i\}$$

و اشتراک آنها با

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x: \forall i \in I, x \in A_i\}$$

تعریف می شود.

در این قسمت به طور مختصر مجموعه ها را از نظر تعداد اعضایشان مورد بررسی قرار می دهیم.

۱-۱-۵ تعریف.

الف) به ازای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ و آن را قطعه ای از اعداد طبیعی می گوئیم.

ب) دو مجموعه A و B را هم عدد می گوئیم هرگاه تناظری یک به یک بین A و B برقرار باشد به عبارت دیگر، تابع $f: A \rightarrow B$ موجود باشد که یک به یک و برو باشد و در این صورت می نویسیم $A \cong B$.

خاصیت هم عدد بودن خاصیتی هم ارزی است؛ یعنی سه ویژگی انعکاسی، تقارنی و تعدی بودن را دارد.

۱-۱-۶ تعریف. مجموعه A را متناهی می گوئیم هرگاه تهی بوده و یا با قطعه ای از اعداد طبیعی هم عدد باشد. به عبارت دیگر عددی طبیعی مانند n موجود باشد به طوری که $A \cong \mathbb{N}_n$. اگر یک مجموعه متناهی نباشد آن را نامتناهی می گوئیم.

آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی ۵

اختلاف اصلی میان مجموعه‌های متناهی و نامتناهی این است که هر مجموعه نامتناهی با یک زیرمجموعه حقیقی (سره) خودش هم‌عدد است. برای مثال $\mathbb{Z}$ (مجموعه اعداد صحیح) با $\mathbb{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) هم‌عدد است در صورتی که $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. پس $\mathbb{Z}$ نامتناهی است. اما یک مجموعه متناهی نمی‌تواند با زیرمجموعه حقیقی خودش هم‌عدد باشد.

۷-۱-۱ تعریف. مجموعه A را شمارا گوئیم هرگاه با مجموعه اعداد طبیعی هم‌عدد باشد، به عبارت دیگر یک تابع یک‌به‌یک و برو مانند α از $\mathbb{N}$ به A موجود باشد. پس اگر $A \cong \{1, 2, 3, \dots\}$ آن‌گاه $A = \{\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots\}$. به جای $\alpha(k)$ می‌نویسیم α_k . بنابراین اگر A شمارا باشد، در این صورت $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$. یعنی هر مجموعه شمارش‌پذیر را می‌توان با اعداد صحیح مثبت، اندیس‌گذاری کرد. اگر مجموعه‌ای شمارا نباشد، آن را ناشمارا گوئیم.

در بعضی از کتاب‌ها مجموعه‌های متناهی را نیز به‌عنوان مجموعه شمارا تعریف می‌کنند. در کتاب حاضر به مجموعه‌های شمارا یا مجموعه متناهی، مجموعه شمارش‌پذیر می‌گوئیم.

۸-۱-۱ مثال. مجموعه اعداد صحیح شمارا می‌باشد.

اثبات. تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه‌ی

$$f(n) = \begin{cases} -k & n = 2k + 1, k \geq 1 \\ 0 & n = 1 \\ k & n = 2k, k \geq 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت به‌سادگی می‌بینیم این تابع، تابع خوش‌تعریف، یک‌به‌یک و پوشاست؛ پس $\mathbb{Z}$ شمارا است.

۹-۱-۱ مثال. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با $\mathbb{N}$ هم‌عدد است.

اثبات. تابع $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(m, n) = 2^{m-1}(2n + 1)$$

در این صورت f تابعی خوش تعریف است زیرا اگر $(m, n) = (m_1, n_1)$ آن گاه:

$$2n_1 = 2n + 1, 2^{m_1-1} = 2^{m-1}$$

پس

$$2^{m-1}(2n + 1) = 2^{m_1-1}(2n_1 + 1)$$

بنابراین

$$f(m, n) = f(m_1, m_1)$$

برای اثبات یک به یک بودن f فرض کنید، $f(m, n) = f(m_1, m_1)$ پس:

$$2^{m-1}(2n + 1) = 2^{m_1-1}(2n_1 + 1) \quad (*)$$

از این که $2^{m-1} | 2^{m_1-1}(2n_1 + 1)$ و $2n_1 + 1$ فرد است، پس $2^{m-1} | 2^{m_1-1}$. به همین ترتیب $2^{m_1-1} | 2^{m-1}$ ، بنابراین $2^{m_1-1} = 2^{m-1}$ و در نتیجه $m = m_1$ و از $(*)$ نتیجه می شود که $2n + 1 = 2n_1 + 1$ پس $n = n_1$ و بنابراین $(m, n) = (m_1, m_1)$. پس f یک به یک است.

برای اثبات پوشا بودن، فرض کنیم $k \in \mathbb{N}$ و l بزرگ ترین عدد صحیح نامنفی باشد که $2^l | k$ (ممکن است $l = 0$). در این صورت $k = 2^l \cdot p$ که p عدد فردی است. فرض کنیم $p = 2n - 1$ و همچنین فرض کنیم $m = l + 1$ آن گاه: $m, n \in \mathbb{N}$ و $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1) = 2^l p = k$ پس حکم ثابت می شود.

دیدیم که $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست. البته به استقراء می توان ثابت کرد $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{n \text{ بار}}$ نیز شمارا است. از این مطلب می توان استفاده کرد و نشان

داد که اعداد گویا نیز شمارا هستند. البته توجه داریم $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ پس $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. با این توضیح شمارا بودن اعداد گویا ساده است.

۱-۱-۱۰ مثال. مجموعه اعداد گویا شمارا است.

اثبات. تابع $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ با ضابطه $f(m, n) = \frac{m}{n}$ یک تابع خوش تعریف، یک به یک و برو است.

آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی ۷

نکته‌ای که به آن اشاره کردیم این بود که هیچ مجموعه متناهی‌ای نمی‌تواند با زیرمجموعه‌ای سره از خودش هم‌عدد باشد. این مطلب را که به اصل لانه کبوتر معروف است در لم بعد نشان خواهیم داد.

۱-۱-۱۱ لم. هیچ قطعه‌ای از اعداد گویا با زیرمجموعه سره خوش هم‌عدد نیست. اثبات. از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

۱-۱-۱۲ لم. بازه $(0,1)$ هم‌عدد با $\mathbb{R}$ است.

اثبات. یکی از روش‌های اثبات این لم استفاده از توابع مثلثاتی است. تابع $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \tan \frac{(2x-1)}{2}$ تعریف را می‌کنیم. می‌دانیم که این یک تابع خوش‌تعریف است و بر $(0,1)$ یک‌به‌یک و همچنین بر $\mathbb{R}$ برو است و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۱-۱-۱۳ لم. بازه $(0,1)$ شمارا نیست.

اثبات. با برهان خلف این مطلب را نشان می‌دهیم. فرض کنید $(0,1)$ شمارا باشد و اعضای آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$t_1 = 0/a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots$$

$$t_2 = 0/a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots$$

$$t_3 = 0/a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

اگر مجموعه تمام بازه $(0,1)$ باشد که $0 \leq a_{ij} \leq 9$ عدد $t = 0/b_1b_2b_3b_4 \dots$

را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$b_i = \begin{cases} 0 & a_{ij} \neq 0 \\ 1 & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

در این صورت چون $b_1 = a_{11}$ پس $t_1 \neq t$ همچنین $a_{22} \neq b_2$ پس $t_2 \neq t$ و ... به همین ترتیب به ازای هر i , $t_i \neq t$. پس عددی مانند $t \in (0,1)$ علاوه بر $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ پیدا کردیم که خلاف فرض است. پس $(0,1)$ ناشمارا است. این روش به روش قطری کانتور معروف است.

۱-۱۴ نتیجه. $\mathbb{R}$ ناشمارا است.

۱-۱۵ نتیجه. $\mathbb{N}$ هم عدد با $\mathbb{R}$ نیست.

۱-۱۶ تعریف. اگر A یک مجموعه باشد، آن گاه $P(A) = \{B: B \subseteq A\}$ را مجموعه توانی می گوییم. می دانیم که $A \in P(A), \emptyset \in P(A)$.

۱-۱۷ قضیه. هیچ مجموعه ای با مجموعه توان خود هم عدد نیست. اثبات. فرض کنید $g: A \rightarrow P(A)$ یک تابع یک به یک باشد. (برهان خلف) اکنون فرض کنید $B = \{x \in A: x \notin g(m)\}$ آن گاه $B \subseteq A$. برای هر $x \in B \Leftrightarrow x \notin g(m)$ و $x \in A$ پس $g(x) \neq B$. بنابراین به ازای هر $x \in P(A)$ $g(x) \neq B$ و B هم عدد نیستند.

۱-۱۸ تمرین

۱. ثابت کنید که رابطه هم عدد بودن یک رابطه هم ارزی است.

۲. اگر $\{1,2,3,4, \dots, n\} \cong \{1,2,3,4, \dots, m\}$ ثابت کنید $m = n$.

۳. اگر A یک مجموعه نامتناهی باشد، ثابت کنید A دارای زیرمجموعه ای شمارا است.

۴. نشان دهید اجتماعی شمارا از مجموعه های شمارا، یک مجموعه شمارا است (یعنی اگر $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک خانواده شمارا باشد که هر A_i نیز شمارا باشد، آن گاه $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز شمارا است).

۵. نشان دهید که $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

۶. نشان دهید که $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

۹ آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی

$$۷. \text{ ثابت کنید که } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$۸. \text{ ثابت کنید که } 2^n \leq (n+1)!$$

$$۹. \text{ ثابت کنید که به ازای هر } n, 6 \text{ عاد می‌کند } n^3 + 5n$$

$$۱۰. \text{ ثابت کنید که } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

۱-۲ اعداد حقیقی

در ریاضی هر مفهومی که مورد مطالعه قرار می‌گیرد با اعداد حقیقی مربوط است، بنابراین بحث را با دستگاه اعداد حقیقی شروع می‌کنیم. برای معرفی اعداد حقیقی دو روش را می‌توان معرفی کرد. در روش اول، ابتدا، مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \dots\}$ را به عنوان مفهوم تعریف نشده (یک اصل) می‌پذیریم و از آن‌ها برای ساخت اعداد صحیح، اعداد گویا و سرانجام اعداد حقیقی بهره می‌گیریم. در روش دوم، مجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ متشکل از اشیایی که آن‌ها را اعداد حقیقی می‌نامیم، به همراه دو عمل، که در اصول موضوع خاصی که اصول موضوع میدان مرتب صدق کند را در نظر می‌گیریم و سپس زیر مجموعه‌های آن را می‌سازیم. برای شروع به چند تعریف اساسی می‌پردازیم.

۱-۲-۱ تعریف. مجموعه‌ای مانند A ، به همراه یک رابطه $<$ در آن، که در شرایط زیر صدق کند را یک مجموعه مرتب گوییم.

الف) به ازای هر $x, y \in A$ دقیقاً یکی از روابط زیر برقرار باشد:

$$x < y \quad \text{یا} \quad x = y \quad \text{یا} \quad y < x$$

ب) اگر $x < y$ و $y < z$ آن‌گاه $x < z$.

به عبارت دقیق‌تر $(A, <)$ یک مجموعه مرتب است. به جای $(x < y \text{ یا } x = y)$

می‌نویسیم $y \leq x$ وقتی $x \leq y$ می‌نویسیم $y \geq x$.

۱-۲-۲ تعریف. فرض کنید A یک مجموعه مرتب باشد و $E \subseteq A$.

(الف) اگر عضوی مانند $b \in A$ موجود باشد که برای هر $x \in E$ داشته باشیم $x \leq b$ ، آن‌گاه می‌گوییم E از بالا کران‌دار است و b را یک کران بالای E می‌گوییم.

(ب) اگر عضوی مانند $c \in A$ موجود باشد که برای هر $x \in E$ داشته باشیم $x \geq c$ ، آن‌گاه می‌گوییم E از پایین کران‌دار است و c یک کران پایین E است.

(ج) اگر کران بالایی مانند b_0 از E موجود باشد به‌طوری‌که برای هر کران بالای b از E داشته باشیم $b_0 \leq b$ ، آن‌گاه b_0 را کوچک‌ترین کران بالا یا سوپریوم E می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\sup E = b$$

(د) اگر کران پایینی مانند c_0 از E موجود باشد به‌طوری‌که برای هر کران بالای c از E داشته باشیم $c_0 \geq c$ ، آن‌گاه c_0 را کوچک‌ترین کران بالا یا اینفیموم E می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\inf E = c$$

وقتی مجموعه E هم از بالا و هم از پایین کران‌دار باشد، می‌گوییم که E کران‌دار است. سوپریوم و اینفیموم یک مجموعه، در صورت وجود منحصر به فرد هستند و همچنین ممکن است $\sup E \notin E$ یا $\inf E \notin E$.

۳-۲-۱ تعریف. اگر $\sup E \in E$ آن‌گاه آن را با $\max E$ نمایش می‌دهیم و آن را ماکزیمم (بهین) E می‌نامیم و همچنین اگر $\inf E \in E$ آن را با $\min E$ نمایش داده و آن را مینیمم (کمین) می‌گوییم.

۴-۲-۱ مثال. هر مجموعه متناهی از اعداد حقیقی $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ کران‌دار است که سوپریوم آن بزرگ‌ترین عضو E است، یعنی $\sup E = \max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ و اینفیموم آن کوچک‌ترین عضو E است، یعنی $\inf E = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. به عبارت دیگر هم سوپریوم و اینفیموم یک مجموعه متناهی عضو آن مجموعه است.

۵-۲-۱ مثال. فرض کنید $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. در این صورت $\sup E = 1$ ، که عضو E بوده و $\inf E = 0$ که عضو E نیست.

آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی ۱۱

۱-۲-۶ مثال. اگر $E = (0,1)$ در نظر بگیریم در این صورت $\inf(0,1) = 0$ و $\sup(0,1) = 1$ در این حالت نه $\sup E$ و نه $\inf E$ عضو E نیستند.

۱-۲-۷ تعریف. می‌گوییم مجموعه A دارای خاصیت کوچک‌ترین کران بالا است هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی $E \subseteq A$ که از بالا کران‌دار باشد، دارای کوچک‌ترین کران بالا در A باشد؛ به عبارت دیگر $\sup E$ در A موجود باشد. این خاصیت را خاصیت تمامیت (یا خاصیت تمامیت ددکینند) می‌نامیم.

۳-۱ استقراء

مجموعه اعداد طبیعی به طور شهودی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \dots\}$$

و با $\mathbb{N}$ نمایش داده می‌شود. همان طوری که می‌بینیم عنصری که آن را ۱ نامیدیم، یک عدد طبیعی است و اگر n عدد طبیعی باشد، $n+1$ که تالی n بوده و آن را با $S(n)$ نمایش می‌دهیم نیز عدد طبیعی است.

اما در این قسمت به ساختن اعداد طبیعی خواهیم پرداخت و سپس اعداد صحیح و اعداد گویا را بنا می‌کنیم. در ادامه با نشان دادن مشکل اعداد گویا با تعریف میدان‌های مرتب، نشان می‌دهیم اعداد گویا، یک میدان مرتب است و سرانجام میدان مرتب اعداد حقیقی و خواص آن را بررسی می‌کنیم.

۱-۳-۱ تعریف. زیر مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}$ را استقرایی گوئیم هرگاه در خواص زیر صدق کند:

$$1 \in A \quad (\text{الف})$$

$$n \in A \text{ آن گاه } n+1 \in A \quad (\text{ب})$$

۱-۳-۲ مثال. مجموعه $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$ یک مجموعه استقرایی است.

۱-۳-۳ مثال. مجموعه $A = \{0, +1, +2, \dots\}$ یک مجموعه استقرایی است.

۱-۳-۴ قضیه و تعریف. کوچکترین مجموعه استقرایی وجود دارد. این مجموعه را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم و آن را مجموعه اعداد طبیعی می‌نامیم.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده تمام مجموعه‌های استقرایی باشد.

اولاً، $Z \in \mathcal{F}$ پس $\phi \neq \mathcal{F}$. فرض کنیم

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$$

در این صورت $\mathbb{N}$ استقرایی است. زیرا اگر $A \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $1 \in A$ در نتیجه

$$1 \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \mathbb{N}$$

ثانیاً، اگر $n \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \mathbb{N}$ پس به‌ازای هر $A \in \mathcal{F}$ ؛ $n \in A$ از این‌که $A \in \mathcal{F}$ (یعنی A استقرایی است) پس $n+1 \in A$ به‌ازای هر $A \in \mathcal{F}$ در نتیجه $n+1 \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \mathbb{N}$ و این نشان می‌دهد که $\mathbb{N}$ استقرایی است. همچنین اگر B استقرایی باشد در این صورت $B \in \mathcal{F}$ پس $B \supseteq \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \mathbb{N}$. بنابراین $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعه استقرایی است.

در زیر شکل دیگری از اصل استقراء ریاضی را بیان می‌کنیم.

۱-۳-۵ صورت دیگر اصل استقراء ریاضی

«اگر P یک خاصیت باشد به‌طوری‌که $P(1)$ و اگر $P(n)$ آن‌گاه $P(n+1)$ در این صورت تمام اعداد طبیعی دارای خاصیت P هستند و به عبارت دیگر $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ »

۱-۳-۶ قضیه. اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ استقرایی باشد، آن‌گاه $A = \mathbb{N}$.

اثبات. چون A استقرایی است، بنا به تعریف $\mathbb{N}$ ، داریم $\mathbb{N} \subseteq A$ پس $A = \mathbb{N}$.

قضیه زیر که به اصل خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی معروف است، نتیجه‌ای از اصل استقراء ریاضی است. البته می‌توان گفت که اصل استقراء و اصل خوش‌ترتیبی با هم معادلند، به عبارت دقیق‌تر اگر یکی از آن‌ها را اصل بگیریم، دیگری از روی آن ثابت می‌شود.

آشنایی با مجموعه‌ها و اعداد حقیقی ۱۳

۷-۳-۱ تعریف. عدد a را عضو اقل مجموعه A ، ($A \subseteq \mathbb{R}$) گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) $a \in A$

ب) به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $a \leq x$

۸-۳-۱ قضیه (اصل خوش‌ترتیبی). هر زیر مجموعه ناتهی $\mathbb{N}$ دارای عضو اقل است.

اثبات. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم A دارای عضو اقل نباشد و

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} : \text{اگر } r \in \mathbb{N} - A \text{ آنگاه } 1 \leq r \leq n \right\}$$

را تعریف می‌کنیم. در این صورت $B \subseteq \mathbb{N}$ ، چون A عضو اقل ندارد پس $1 \notin A$ ، در نتیجه $1 \in B$. حال فرض کنید $n \in B$ ولی $n+1 \notin B$ پس $n+1 \in A$ از این که A دارای عضو اقل نیست، پس عضو $a \in A$ موجود است که بنا به قضیه (قبل) $1 \leq a \leq n$. چون $n \in B$ پس $n \in \mathbb{N} - A$ که غیرممکن است. بنابراین $n+1 \in B$ پس B استقرایی است و $B = \mathbb{N}$. بنابراین باید $A \neq \emptyset$ که غیرممکن است و در نتیجه A دارای عضو اقل است.

مثالی از استقراء در زیر ارائه می‌کنیم:

۹-۳-۱ مثال. فرض کنید n و m عدد طبیعی باشند در این صورت:

الف) $n + m \in \mathbb{N}$

ب) $mn \in \mathbb{N}$

ج) همواره $m \geq 1$

د) اگر $m \geq \mathbb{N}$ آنگاه $m - n \in \mathbb{N}$

اثبات. الف) این را به استقراء ثابت می‌کنیم و فرض کنید $A = \{k : m + k \in \mathbb{N}\}$. اولاً چون $\mathbb{N}$ استقرایی است و $m \in \mathbb{N}$ پس $m+1 \in \mathbb{N}$ یعنی $1 \in A$.

ثانیاً فرض کنیم $k \in A$ ، در این صورت $m + (k+1) = (m+k) + 1$ بنا به فرض استقراء $m+k \in A$ پس $m+k \in \mathbb{N}$ ، چون $\mathbb{N}$ استقرایی است پس:

$$(m+k) + 1 \in \mathbb{N}$$

به عبارت دیگر $k + 1 \in A$. بنابراین A استقرایی است و $A \subseteq \mathbb{N}$ بنا به قضیه ۱-۳-۵، $A = \mathbb{N}$.

ب) مانند قسمت (الف) به استقراء ثابت می شود و مجموعه A را به صورت:

$$A = \{k: m + k \in \mathbb{N}\}$$

در نظر می گیریم. آن گاه $A \subseteq \mathbb{N}$ و همانند (الف) ثابت می کنیم A استقرایی است پس $A = \mathbb{N}$ و حکم ثابت می شود.

ج) برای نشان دادن این نامساوی فرض کنید $A = \{k \in \mathbb{N}: k \geq 1\}$. چون $1 \geq 1$ پس $1 \in A$. همچنین اگر $k \in A$ پس $k \geq 1$ بدیهی است که $k + 1 \geq 1$ پس $k + 1 \in A$. بنابراین k استقرایی و $k \subseteq \mathbb{N}$ پس $k = \mathbb{N}$.

د) اگر قرار دهیم:

$$A = \left\{ p \in \mathbb{N} : p \text{ موجود باشد, } p > k, \text{ آن گاه } p - k \in \mathbb{N} \right\}$$

در این صورت A استقرایی است. اثبات به عنوان تمرین بر عهده خواننده است.

بعضی از تعاریف را به صورت استقرایی تعریف می کنیم مانند تعریف توان های طبیعی یک عدد طبیعی.

۱-۳-۱۰ تعریف. فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، به ازای هر عدد طبیعی n ، a^n را به استقراء چنین تعریف می کنیم:

$$a^1 = a, a^{n+1} = a \cdot a^n \quad (n > 0)$$

حال به تعریف مجموعه اعداد صحیح و اعداد گویا می پردازیم. اول مجموعه $\bar{\mathbb{N}} = \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر می گیریم.

۱-۳-۱۱ تعریف. مجموعه اعداد صحیح با $\mathbb{Z}$ نمایش داده شده و چنین تعریف می شود:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \bar{\mathbb{N}}$$

بعضی از نویسندگان اعداد صحیح را با I نمایش می‌دهند.

۱-۳-۱۲ تعریف. مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

۱-۳-۱۳ لم. $\sqrt{2}$ گویا نیست.

اثبات. به برهان خلف، اگر $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ موجود باشد که $(m, n) = 1$ و $x^2 = 2$ آن‌گاه:

$$m^2 = 2n^2 \quad (*)$$

بنابراین m^2 بر ۲ بخش پذیر است، پس m بر ۲ بخش پذیر است. فرض کنیم $m = 2k$ از رابطه $(*)$ داریم، $4k^2 = 2n^2$ پس $2k^2 = n^2$. بنابراین n^2 بر ۲ بخش پذیر است به عبارت دیگر n بر ۲ بخش پذیر است. پس نتیجه می‌شود که $(m, n) = 1$ و این تناقض است.

در مثال زیر می‌بینیم که همه مجموعه‌های مرتب خاصیت کوچک‌ترین کران بالا را ندارند.

۱-۳-۱۴ مثال. مجموعه اعداد گویا دارای خاصیت کوچک‌ترین کران بالا نیست.

اثبات. اگر $E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ را در نظر بگیریم آن‌گاه $1 \in E$ پس E ناتهی است. ثانیاً E از بالا کران دار است. به عنوان مثال ۲ یک کران بالای آن است. فرض کنیم $p = \sup E$ و $p \in \mathbb{Q}$. بنا به مثال قبل $p^2 \neq 2$ پس دو حالت وجود دارد:

حالت ۱) $p^2 < 2$ ، در این صورت عدد q را به صورت $(*)$ $q = \frac{2(p+1)}{p+2}$ در نظر می‌گیریم. به وضوح $q \in \mathbb{Q}$ و $(**)$ $q^2 - 2 = \frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}$. چون $p^2 < 2$ ، پس $q^2 < 2$ و $q \in E$ در نتیجه $q \in E$ چون $p = \sup E$ ، پس باید $q \leq p$. اما از $(*)$ به سادگی می‌بینیم $p < q$ که تناقض است.