



مبانی ترکیبیات

(رشته ریاضی)

دکتر شهریار فرهمندراد

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

یازده	مقدمه
۱	فصل اول: دوره‌ی سریع مفاهیم مجموعه‌ها و منطق گزاره‌ها
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۱	۱-۱ بشماریم
۲	۲-۱ مجموعه‌ها
۸	۳-۱ رشته‌ها
۹	۴-۱ تابع
۱۰	۵-۱ مختصری از منطق ریاضی و استدلال
۱۳	۶-۱ الگوریتم و مدل‌سازی
۱۷	فصل دوم: جبر بول
۱۷	هدف کلی
۱۷	هدف‌های یادگیری
۱۹	۱-۲ مثال
۱۹	۲-۲ مثال
۲۰	۳-۲ مثال
۲۰	۴-۲ دوگان
۲۰	۵-۲ قوانین جبر بول
۲۱	۶-۲ قضیه
۲۲	۷-۲ تمرین
۲۲	۸-۲ یادآوری رابطه‌ها
۳۰	۹-۲ جبرهای بول به‌عنوان شبکه‌ها
۳۶	۱۰-۲ نمایش اعضای جبر بول

۴۳	فصل سوم: شمارش
۴۳	هدف کلی
۴۳	هدف‌های یادگیری
۴۴	۱-۳ مفاهیم اصلی
۴۶	۲-۳ نماد فاکتوریل
۴۶	۳-۳ تبدیل و جایگشت
۴۸	۴-۳ تبدیل n شیء با تکرار (جایگشت n شیء با تکرار)
۵۰	۵-۳ ترتیب
۵۳	۶-۳ ترکیب
۶۲	۷-۳ دوجمله‌ای نیوتن
۷۴	۸-۳ جایگشت‌های حلقه‌ای
۷۷	۹-۳ ادامه‌ی بسط دوجمله‌ای و تعمیم آن
۸۰	۱۰-۳ معادله‌های خطی با ضریب واحد
۸۳	۱۱-۳ ترکیب‌های با تکرار
۸۹	۱۲-۳ بعضی از اعداد خاص
۹۲	۱۳-۳ اعداد استرلینگ نوع اول
۹۵	۱۴-۳ اعداد استرلینگ نوع دوم
۹۹	۱۵-۳ اعداد بل
۱۰۱	۱۶-۳ افرازهای مرتب اعداد طبیعی
۱۰۳	۱۷-۳ مسئله‌ی توزیع (نتیجه)
۱۰۵	۱۸-۳ اصل غربال یا اصل شمول و طرد (= عدم شمول، استثنا، حذف و...)
۱۰۹	۱۹-۳ قضیه‌ی شمول و طرد در حالت کلی
۱۱۹	۲۱-۳ اصل لانه کبوتری
۱۲۵	فصل چهارم: روابط بازگشتی
۱۲۵	هدف کلی
۱۲۵	هدف‌های یادگیری
۱۲۶	۱-۴ تعریف رابطه‌ی بازگشتی
۱۲۸	۲-۴ تشکیل رابطه‌ی بازگشتی
۱۳۰	۳-۴ روش‌های حل روابط بازگشتی خطی همگن
۱۳۸	۴-۴ روابط بازگشتی خطی غیرهمگن
۱۴۱	۵-۴ روابط بازگشتی غیرخطی با ضرایب غیرثابت
۱۴۵	فصل پنجم: توابع مولد
۱۴۵	هدف کلی
۱۴۵	هدف‌های یادگیری
۱۴۸	۱-۵ مثال
۱۴۸	۲-۵ مثال
۱۴۹	۳-۵ تعریف تابع مولد

۱۴۹	۴-۵ تذکر
۱۴۹	۵-۵ تذکر
۱۴۹	۶-۵ مثال
۱۴۹	۷-۵ مثال
۱۵۰	۸-۵ تذکر
۱۵۰	۹-۵ مثال
۱۵۰	۱۰-۵ مثال
۱۵۰	۱۱-۵ مثال
۱۵۲	۱۲-۵ مثال
۱۵۲	۱۳-۵ قضیه
۱۵۳	۱۴-۵ مثال
۱۵۵	۱۵-۵ ساخت توابع مولد جدید
۱۵۸	۱۶-۵ توابع مولد نمایی
۱۶۲	۱۷-۵ روابط بازگشتی و تابع مولد

فصل ششم: نظریه ی گراف

۱۶۷	هدف کلی
۱۶۷	هدف های یادگیری
۱۶۹	۱-۶ تعریف گراف
۱۷۰	۲-۶ تعریف طوقه
۱۷۰	۳-۶ گراف ساده
۱۷۲	۴-۶ تعریف زیرگراف
۱۷۲	۵-۶ گراف جهت دار
۱۷۲	۶-۶ گراف مکمل
۱۷۳	۷-۶ مرتبه ی گراف
۱۷۳	۸-۶ اندازه ی گراف
۱۷۳	۹-۶ درجه یک رأس
۱۷۴	۱۰-۶ قضیه
۱۷۵	۱۱-۶ ماکزیمم و مینیموم درجه
۱۷۷	۱۲-۶ برابری گراف ها
۱۷۸	۱۳-۶ گراف های یک ریخت
۱۸۲	۱۴-۶ گراف بازه ای
۱۸۴	۱۵-۶ دنباله گرافیکی
۱۹۰	۱۶-۶ گراف منتظم
۱۹۲	۱۷-۶ گراف کامل
۱۹۳	۱۸-۶ گشت، گذر، مسیر
۱۹۴	۱۹-۶ نکته

۱۹۴	۲۰-۶ قضیه
۱۹۸	۲۱-۶ گراف همبند
۲۰۲	۲۲-۶ فاصله بین دو رأس
۲۰۳	۲۳-۶ تعریف خروج از مرکز، قطر و شعاع
۲۰۵	۲۴-۶ مؤلفه گراف
۲۱۳	۲۵-۶ گراف اویلری
۲۱۸	۲۶-۶ گراف‌های دوبخشی
۲۲۳	۲۷-۶ دو مسئله‌ی باز (حل نشده)
۲۲۵	۲۸-۶ درجه ورودی و درجه خروجی در گراف‌های جهت‌دار
۲۲۶	۲۹-۶ تورنمنت
۲۲۹	۳۰-۶ تعریف
۲۳۱	۳۱-۶ گراف هامیلتونی
۲۴۰	۳۲-۶ درخت
۲۵۰	۳۳-۶ گراف‌ها و ماتریس آنها
۲۵۵	۳۴-۶ تطابق‌های کامل و ماکسیمال
۲۶۴	۳۵-۶ رنگ‌آمیزی گراف‌ها و چندجمله‌ای رنگی
۲۷۲	۳۶-۶ عدد رنگی یالی

۲۷۵	فصل هفتم: ماتریس‌ها و انواع مهم آنها از لحاظ ترکیبیاتی
۲۷۵	هدف کلی
۲۷۵	هدف‌های یادگیری
۲۷۶	۱-۷ مثال
۲۷۷	۲-۷ تعریف
۲۷۸	۳-۷ مثال
۲۷۸	۴-۷ قضیه
۲۷۹	۵-۷ قضیه
۲۸۰	۶-۷ مثال
۲۸۰	۷-۷ تمرین
۲۸۱	۸-۷ توان‌های ماتریس‌ها
۲۸۲	۹-۷ تمرین
۲۸۲	۱۰-۷ مثال
۲۸۲	۱۱-۷ قضیه
۲۸۳	۱۲-۷ مثال
۲۸۴	۱۳-۷ مثال
۲۸۴	۱۴-۷ مثال
۲۸۵	۱۵-۷ ماتریس‌های دوری
۲۸۷	۱۶-۷ ماتریس‌های (۱, ۰)
۲۸۸	۱۷-۷ ماتریس‌های آدامار
۲۹۰	۱۸-۷ دترمینان

فصل هشتم: مربع‌های لاتین و لاتین متعامد

- ۲۹۹ هدف کلی
 ۲۹۹ هدف‌های یادگیری
 ۲۹۹ ۱-۸ مربع‌های وقتی (یا جادویی)
 ۳۰۰ ۲-۸ مثال
 ۳۰۱ ۳-۸ تمرین
 ۳۰۱ ۴-۸ مسئله‌ی باز
 ۳۰۱ ۵-۸ مثال
 ۳۰۱ ۶-۸ روش ساخت مربع‌های وقتی $n \times n$ با n فرد (روش ترانس)
 ۳۰۲ ۷-۸ روش ساده برای ساخت مربع‌های وقتی 4×4
 ۳۰۲ ۸-۸ ساخت بعضی از مربع‌های وقتی مرتبه‌ی زوج
 ۳۰۴ ۹-۸ مربع‌های لاتین
 ۳۰۴ ۱۰-۸ مربع‌های لاتین استاندارد
 ۳۰۵ ۱۱-۸ تلفیق مربع‌های لاتین
 ۳۰۶ ۱۲-۸ مربع‌های لاتین متعامد
 ۳۱۳ ۱۳-۸ قضیه هال: (قضیه ازدواج)
 ۳۱۳ ۱۴-۸ صورت مجموعه‌ای قضیه‌ی هال
 ۳۱۸ ۱۵-۸ روش ساخت مربع‌های وقتی از روی مربع‌های لاتین

فصل نهم: مقدمه‌ای بر طرح‌ها و صفحات تصویری

- ۳۲۳ هدف کلی
 ۳۲۳ هدف‌های یادگیری
 ۳۲۴ ۱-۹ مثال
 ۳۲۴ ۲-۹ تعریف
 ۳۲۵ ۳-۹ قضیه
 ۳۲۶ ۴-۹ تذکر
 ۳۲۶ ۵-۹ مثال
 ۳۲۷ ۶-۹ تعریف
 ۳۲۹ ۷-۹ نمایش ماتریسی طرح‌های بلوکی
 ۳۳۱ ۸-۹ قضیه (نامساوی فیشر)
 ۳۳۲ ۹-۹ تذکر
 ۳۳۳ ۱۰-۹ طرح‌های متمم
 ۳۳۴ ۱۱-۹ صفحات تصویری متناهی

مقدمه

در شاخه‌های مختلف ریاضیات، به بررسی مسائلی شامل ترکیب‌های مختلف حروف، اعداد و اشیاء می‌پردازیم. اعداد مشخصی که در ریختن دو مکعب به‌دست می‌آید، محصولات مختلفی که در مزرعه‌ها کشت و برداشت می‌شود و درس‌های مختلفی که در ساعت‌ها و روزهای هفته توسط مسئول آموزش یک دانشکده پخش می‌شود همه مواردی شامل همین ترکیب‌ها و حالت‌های مختلف هستند.

شاخه‌ای از ریاضیات که ترکیب‌ها، تعداد و حالات قرار گرفتن اشیاء مختلف را مطالعه و بررسی می‌کند ترکیبیات نامیده می‌شود.

از شاخه‌های ترکیبیات که هم اکنون بسیار فعال و رو به گسترش است نظریه‌ی گراف می‌باشد.

به‌طور کلی ترکیبیات و مسائل آن شامل چند بخش عمده است:

۱. مسئله‌ی وجودی

در این بحث وجود مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌طور مثال آیا مثلثی با مساحت $S \in \mathbb{N}$ و طول اضلاع گویا وجود دارد؟ یا نتایجی وجودی مانند قضایای هال و رمزی.

۲. مسئله‌ی شمردن

شاید بتوان گفت مهم‌ترین بحث ترکیبیات شمارش می‌باشد و به دو شکل مهم صورت می‌گیرد:

الف) تشکیل فهرست همه حالات ممکن (که در مسائل بزرگ عملی نیست)،
ب) شمردن بدون شمردن (یعنی با روش‌هایی نظیر برقرار تناظری یک به یک
بین مسئله و مسئله‌ی دیگری با جواب معلوم و یا افزاز مسئله به مسئله‌های کوچک‌تر).
این بخش شامل مباحثی نظیر توابع مولد، انعکاس و حساب تفاضلات متناهی
است.

۳. بهینه‌سازی و بهینه‌یابی

منظور بهینه مسائل گسسته است. به‌طور مثال بهینه‌یابی در مسئله‌ی زمانبندی و شبکه‌ها
و شامل راه‌حل‌هایی مانند شاخه، کران و روش‌های ابتکاری.

۴. تئوری مرتبه

بخش تئوری مرتبه خود از مجموعه‌های جم متناهی و شبکه‌ها و ماتروئیدها تشکیل
می‌گردد.

۵. پیکربندی‌ها

شامل طرح‌ها، گروه‌های جایگشت و تئوری کدگذاری
بسیاری فکر می‌کنند اولین و شاید تنها درس دانشگاهی حساب دیفرانسیل و
انتگرال است! هر چند این صحیح است که حوزه بسیار مهم ریاضیات که ابزاری مهم
در توفیق کاربرد ریاضی است، حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد؛ ولی حساب
دیفرانسیل و انتگرال یا آنالیز ریاضی درسی تکنیکی است و انسان نیاز به سال‌ها مطالعه
دارد تا بتواند در روش‌های کاربردی‌اش ماهر شود.

اگر شما بخواهید یک ریاضیدان یا دانشمند کامپیوتر شوید توسعه تفکر بالا
الزامی است. مفاهیمی وجود دارند که در آنها روش‌های ریاضی مفیدند و ریاضیدان‌ها
روی آنها کار می‌کنند و البته در حوزه‌های دیگر فکری نیز مطرح می‌شوند.

پژوهش‌های موفقیت‌آمیزی در ریاضیات کاربردی خارج از حوزه حساب
دیفرانسیل و انتگرال وجود دارند. یکی از مهم‌ترین آنها فعالیت‌های اخیر و جالبی است
که در رمز صورت می‌گیرد به‌علاوه می‌توانیم از برنامه‌ریزی خطی، تئوری کدگذاری و

نظریه محاسبات هم نام ببریم. ریاضیات کاربردی در این حوزه‌ها به‌طور عام ریاضیات گسسته نامیده می‌شود. بنا نداریم در این کتاب «ریاضیات گسسته» را به‌طور عمیق پوشش دهیم، بلکه مطابق سرفصل‌های مصوب، تعدادی از نتایج و روش‌های ترکیبیات، نظریه گراف و هندسه‌ی ترکیبیاتی را بررسی خواهیم نمود. پس از هر مطلب درسی و تعاریف و قضایا، با مثال‌های ساده شروع کرده و هدف از آن آموزش و ارائه تجزیه و تحلیل‌های لازم می‌باشد. سپس مسئله‌های پیچیده‌تری مطرح می‌شوند. کتاب سرشار از مثال‌ها و تمرین‌های مختلف است و مطالعه و دست و پنجه نرم کردن با آن‌ها به‌همه‌ی دانشجویان محترم توصیه می‌گردد. گاهی قضیه‌ای تحت عنوان مثال یا تمرین گفته شده تا حوصله خواننده از خواندن و کارکرد پی‌درپی قضایا سر نرود و علاوه بر آن خود شاید راه حلی ارائه دهد که با برهان اصلی قضیه اختلاف آشکاری داشته باشد. بی‌شک ریاضیات با ایده‌های نو و مسائل حل نشده هنری پویا است.

فصل اول

دوره‌ی سریع مفاهیم مجموعه‌ها و منطق گزاره‌ها

هدف کلی

در این فصل دوره‌ی سریعی از مفاهیم مجموعه‌ها و منطق گزاره‌ها و الگوریتم و مدل‌سازی ارائه می‌گردد. هدف کلی آن است که خواننده ضمن یادآوری این مطالب مقدماتی، ابزار ابتدایی را برای مطالعه و یادگیری فصل‌های بعدی در دسترس داشته باشد.

هدف‌های یادگیری

- خواننده پس از مطالعه این فصل باید بتواند:
۱. مطالب مقدماتی نظریه‌ی مجموعه‌ها را بازگو کند.
 ۲. گزاره‌ها و ابزار ابتدایی منطق ریاضی را مورد استفاده قرار دهد و شیوه درست نوشتن و استدلال را به خاطر بیاورد.
 ۳. زمان اجرای الگوریتم‌های مقدماتی را فرمول‌بندی نماید.
 ۴. نماد او را تعریف و منظور از آن را بیان کند.

۱-۱ بشماریم

در یک میهمانی شش مرد با یکدیگر و میزبان دست می‌دهند، این عده در کل چندبار با یکدیگر دست داده‌اند؟

نفر اول می‌گوید: من با شش نفر دست داده‌ام و فکر می‌کنم هر نفر دیگر هم به همین صورت باشد.

نفر دوم می‌گوید چون هفت نفریم $42 = 7 \times 6$ بار با هم دست داده‌ایم. نفر سوم استدلال می‌کند که به نظر می‌سد ۴۲ بار زیاد است. انگار وقتی دو نفر با هم دست داده‌اند دو بار عمل دست‌دادن اتفاق افتاده است که این البته نادرست است. نفر چهارم می‌گوید نکته همین جاست، هر دست دادنی دوبار شمرده شده است. ما باید عدد ۴۲ را به ۲ تقسیم کنیم تا پاسخ صحیح ۲۱ را برای سؤال مورد بحث به دست آوریم. هنگامی که این شش نفر برای نشستن دور میزی می‌روند، میزبان می‌گوید من در قسمت بالایی میز جلوی کیک جشن تولدم می‌نشینم و شما شش نفر هم در هر کجا که می‌نشینید تا پدیدار شدن یک صورت جدید هر نیم ساعت جای نشستن خود را دور میز تغییر دهید. این میهمانی چقدر طول می‌کشد؟ اگر جای میزبان ثابت باشد تعداد صورت‌های ممکن نشستن دور میز چندتا است؟

جاهای نشستن را یک به یک پر می‌کنیم. جای نشستن سمت راست میزبان را در نظر می‌گیریم این صندلی را می‌توانیم به شش طریق پر کنیم پس از استقرار یک نفر از میهمانان در این صندلی، صندلی بعدی به پنج طریق پر می‌شود $5 \times 6 = 30$ ، پس به این طریق می‌توان این دو صندلی را پر کرد.

به‌طور مشابه $4 \times 5 \times 6$ روش برای پر کردن اولین سه صندلی وجود دارد. با ادامه این روش کلاً $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ طریق برای نشستن میهمانان وجود خواهد داشت. اگر میهمانان هر نیم‌ساعت جای خود را عوض کنند ۱۵ روز یعنی ۳۶۰ ساعت نشستن به صورت‌های مختلف طول می‌کشد.

۲-۱ مجموعه‌ها

پاسخ به پرسش «مجموعه چیست؟» بسیار مشکل است. در حداحتیاجات و این کتاب مقدماتی وارد نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها نمی‌شویم و به پذیرفتن تعریف زیر اکتفا می‌کنیم: هر گردایه از اشیاء کاملاً مشخص و معین، که عضو نامیده می‌شوند، یک مجموعه است. به‌طور مثال در میهمانی ذکر شده مدعوین تشکیل مجموعه می‌دهند. در یک دانشگاه، تمام دانشجویان یک مجموعه می‌سازند.

در ریاضیات مجموعه‌های اعداد بسیار مهم‌اند. این مجموعه‌ها عبارتند از مجموعه همه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ ، مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ، مجموعه اعداد صحیح نامنفی $\mathbb{Z}^+$ و مجموعه اعداد صحیح مثبت $\mathbb{N}$. مجموعه تهی مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد و با ϕ نشان داده می‌شود.

حروف بزرگ را برای نمایش مجموعه‌ها و حروف کوچک را برای نمایش عضوهای مجموعه به کار می‌بریم. اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد می‌نویسیم $a \in A$ در غیر این صورت $a \notin A$. تعداد اعضای A با نماد $|A|$ بیان می‌شود به طور مثال $|\phi| = 0$.

گاهی مجموعه را با نماد آکولاد و خاصیت اعضایش بیان می‌کنیم به طور مثال

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \mathbb{Z}^+$$

می‌گوییم مجموعه‌ی A زیر مجموعه‌ی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد. اگر بپذیریم که A شامل همه‌ی اعضای B نیز باشد آنگاه $A=B$ می‌شود و اگر شامل هیچ‌یک از اعضای B نباشد $A=\phi$ می‌گردد. پس مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه است.

به طور مثال در مورد مجموعه اعداد داریم $\phi \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

در مجموعه‌های متناهی که فقط شامل تعدادی متناهی عضو هستند ترتیب خاصی در نوشتن عضوهای مجموعه رعایت نمی‌شود. به طور مثال $\{a,b,c\}$ یا $\{b,c,a\}$ یا $\{c,b,a\}$ هر سه یک مجموعه را نمایش می‌دهند. به علاوه چون عضوهای یک مجموعه، متمایز هستند به طور مثال $\{a,a,b\}$ نمایش مناسبی برای مجموعه $\{a,b\}$ نیست. باید توجه داشت a با $\{a\}$ متمایز است یعنی $a \neq \{a\}$ زیرا $\{a\}$ مجموعه است و تنها از عضو a تشکیل شده است در حالی که a عضو مجموعه $\{a\}$ می‌باشد.

اشتراک دو مجموعه از عضوهای مشترک آن دو تشکیل می‌گردد. برای مجموعه‌های A و B اشتراک A و B با نماد $A \cap B$ نشان داده می‌شود. مجموعه‌هایی که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند جدا از هم گفته می‌شوند.

اجتماع مجموعه‌های A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود مجموعه‌ی همه اعضایی است که در A یا در B یا در هر دو باشند. به‌طور مثال اگر $A = \{1, 5, 2\}$ و $B = \{1, 10, 20\}$ باشد، داریم $A \cup B = \{1, 2, 5, 10, 20\}$ تفاضل A و B یعنی $A - B$ مجموعه همه عضوهایی است که در A هست ولی در B نیست.

۱-۲-۱ تمرین:

۱. در مجموعه‌های عددی داریم $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. چند رابطه‌ی به این فرم می‌توان بین مجموعه‌های $\phi, \mathbb{N}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ بنا ساخت؟
 ۲. آیا عضوی از یک مجموعه حالت خاصی از زیرمجموعه‌ی یک مجموعه است؟ چرا؟

۳. همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ را بنویسید.

۴. همه‌ی زیرمجموعه‌هایی از $\{a, b, c, d, e\}$ را که شامل عضو b نیستند فهرست کنید.

۵. مجموعه‌ای را بنویسید که در آن هر دوی $\{-1, 0, 1\}$ و $\{30, 20, 10\}$ زیرمجموعه باشند. اگر فرض کنیم این مجموعه با برقراری شرط ذکر شده کوچک‌ترین ممکن باشد چگونه نوشته می‌شود؟

۶. تعریفی از اجتماع بی‌شمار مجموعه بنویسید.

۷. مجموعه‌ای با پنج عضو و مجموعه‌ای با ۹ عضو را در نظر می‌گیریم. کدام یک از اعداد ۲۰، ۱۴، ۱۰، ۹، ۶، ۴ می‌تواند تعداد اعضای اجتماع این دو مجموعه باشد؟

۸. اگر اجتماع دو مجموعه n عضوی و m عضوی را در نظر بگیریم در مورد تعداد اعضای اجتماع و اشتراک آن دو چه نتیجه‌ای می‌توانیم بگیریم؟ چرا؟

۹. اشتراک مجموعه اعداد اول و مجموعه اعداد زوج چیست؟

۱۰. نشان دهید $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

۱۱. تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B مجموعه همه عضوهایی است که دقیقاً و فقط به یکی از آنها تعلق دارد.

الف) تفاضل متقارن مجموعه‌های $\mathbb{Z}^+$ و مجموعه اعداد صحیح زوج مثبت یا منفی یا صفر را به‌دست آورید.

ب) اگر تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B را C بنامیم، تفاضل متقارن C و A را به‌دست آورید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲-۲-۱ تعداد زیرمجموعه‌ها: در اینجا اولین مسئله‌ی ترکیباتی خود را مطرح

می‌کنیم: مجموعه‌ای n عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

با حالات کوچک که شروع کنیم ϕ تنها یک زیرمجموعه دارد (خودش). مجموعه $\{a\}$ زیرمجموعه‌هایش خودش و ϕ هستند. زیرمجموعه‌ی $\{a, b\}$ عبارتند از $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

در مجموعه‌ی سه عضوی $\{a, b, c\}$ با کمی دشواری زیرمجموعه‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

حال می‌توان جدولی کوچکی به صورت زیر بنا ساخت:

تعداد اعضا	۰	۱	۲	۳
تعداد زیرمجموعه‌ها	۱	۲	۴	۸

مشاهده می‌شود که تعداد زیرمجموعه‌ها یعنی سطر دوم دقیقاً توان‌های ۲ هستند. فرض کنید A مجموعه‌ای n عضوی و شامل اعضای $a_1, a_2, \dots, a_n$ است. در مورد بودن یا نبودن a_1 در زیرمجموعه‌ای از A که می‌خواهیم تشکیل دهیم دو تصمیم بیشتر موجود نیست، بله یا خیر. مهم نیست که در مورد a_1 چه تصمیمی گرفته‌ایم، در مورد a_2 نیز می‌توانیم به همان صورت تصمیم‌گیری نماییم پس تعداد روش‌هایی که می‌توانیم در مورد a_2, a_1 تصمیم‌گیری کنیم $2 \times 2 = 4$ است. مهم نیست که در مورد a_2, a_1 چه تصمیمی گرفته‌ایم، در مورد a_3 هم می‌توانیم بودن یا نبودنش را در زیرمجموعه مورد نظرمان به دو شکل تصمیم‌گیری کنیم. هریک از این روش‌ها می‌تواند با هریک از چهار تصمیمی که در مورد a_2, a_1 گرفته‌ایم ترکیب شده و به این ترتیب $4 \times 2 = 8$ حالت ممکن برای تصمیم‌گیری در مورد a_1, a_2, a_3 به دست آید. به طریق مشابه می‌توانیم در مورد اولین k عضو A و در نهایت در مورد همه‌ی n عضو مجموعه تصمیم‌گیری کنیم و می‌بینیم که در مورد هر عضو جدید تعداد حالات ممکن قبلی دو برابر می‌شود. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم:

۲-۲-۱ قضیه: اگر $|A| = n$ باشد تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر 2^n است.

می‌توانیم برهان دیگری از قضیه بالا ارائه دهیم. می‌خواهیم با برچسب‌گذاری زیرمجموعه‌ها با $0, 1, 2, \dots$ آنها را بشماریم در این صورت می‌توانیم با مرتب کردن زیرمجموعه‌ها در یک فهرست به‌طور مثال راجع به صدمین زیرمجموعه صحبت کنیم. برای مرتب کردن زیرمجموعه یک راه نسبتاً طبیعی آن است که با $\emptyset$ شروع کنیم سپس زیرمجموعه‌های یک عضوی را فهرست کنیم، بعد دو عضوی‌ها را بنویسیم و می‌توانیم زیرمجموعه‌ها را مثل یک دفترچه تلفن مرتب کنیم.

یعنی زیرمجموعه‌ها را بدون "کروشه" و "و" بنویسیم به‌طور مثال در مورد زیرمجموعه‌های $\{a, b, c\}$ فهرست زیر به‌دست می‌آید:

$$\emptyset, a, ab, abc, ac, b, bc, c.$$

اما اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ باشد و از شما بخواهند که بدون نوشتن به‌طور مثال بیست و سومین زیرمجموعه از فهرست را بگویید چه خواهید کرد؟ آیا روشی برای ساده‌سازی این آلگوریتم وجود دارد؟

روش دیگری از نمایش زیرمجموعه‌ها را بیان می‌کنیم. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ ، اعضا را یک‌به‌یک در نظر گرفته و اگر عضو در زیرمجموعه بود عدد ۱ و در حالتی که نبود ۰ می‌نویسیم. بنابراین برای زیرمجموعه‌ی $\{a, c\}$ چون a در زیرمجموعه است، b نیست و c هست می‌نویسیم ۱۰۱.

با این روش هر زیرمجموعه از $A = \{a, b, c\}$ با رشته‌ای به طول سه از صفرها و یک‌ها کدگذاری می‌شود، برعکس رشته‌ای به طول سه از صفرها و یک‌ها مثل ۱۰۱ به زیرمجموعه‌ای مانند $\{b\}$ متناظر می‌شود. چنین رشته‌ای از صفرها و یک‌ها، بیان دوتایی اعداد صحیح (به عبارت دیگر مبنای دو) را به خاطر می‌آورد. اگر فرم دوتایی اعداد ۰ تا ۱۰ را بنویسیم:

$$0 = 0_2$$

$$1 = 1_2$$

$$2 = 10_2$$

$$3 = 2 + 1 = 11_2$$

$$4 = 100_2$$

$$5 = 4 + 1 = 101_2$$

$$6 = 4 + 2 = 110_2$$

$$7 = 4 + 2 + 1 = 111_2$$

$$8 = 1000_2$$

$$9 = 8 + 1 = 1001_2$$

$$10 = 8 + 2 = 1010_2$$

با افزودن رقم صفر به مواردی که سه رقمی نیستند داریم:

$$0 \Leftrightarrow 0_2 \Leftrightarrow 000 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$1 \Leftrightarrow 1_2 \Leftrightarrow 001 \Leftrightarrow \{c\}$$

$$2 \Leftrightarrow 10_2 \Leftrightarrow 010 \Leftrightarrow \{b\}$$

$$3 \Leftrightarrow 11_2 \Leftrightarrow 011 \Leftrightarrow \{b, c\}$$

$$4 \Leftrightarrow 100_2 \Leftrightarrow 100 \Leftrightarrow \{a\}$$

$$5 \Leftrightarrow 101_2 \Leftrightarrow 101 \Leftrightarrow \{a, c\}$$

$$6 \Leftrightarrow 110_2 \Leftrightarrow 110 \Leftrightarrow \{a, b\}$$

$$7 \Leftrightarrow 111_2 \Leftrightarrow 111 \Leftrightarrow \{a, b, c\}$$

در نتیجه زیرمجموعه‌های $\{a, b, c\}$ به اعداد $0, 1, 2, \dots, 7$ متناظر می‌شوند. در حالت کلی می‌توانیم درست مانند بالا زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی n عضوی را با نظیر کردن به اعداد صحیح با صفر شروع کرده و به بزرگ‌ترین عدد صحیح که در سیستم دوتایی فقط n رقم دارد ختم کنیم (هر رقم در سیستم دوتایی بیت نامیده

می‌شود). چون کوچک‌ترین عدد با $n+1$ بیت 2^n است، زیرمجموعه‌های مورد نظر به اعداد $1-2^n, \dots, 2, 1, 0$ متناظر می‌شوند. بدیهی است تعداد این اعداد 2^n است پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر 2^n می‌شود.

۴-۲-۱ تمرین:

۱. تحت تناظر یک‌به‌یک برقرار شده در بالا بین اعداد و زیرمجموعه‌ها، چه عددی به زیرمجموعه‌های تک عضوی نظیر می‌شود؟ چرا؟
۲. شمار زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای n عضوی که حاوی یک عضو مشخص باشند چیست؟
۳. تعداد اعداد صحیح با الف) حداکثر n رقم ب) دقیقاً n رقم چندتا است؟
۴. عدد 2^{100} در صورتی که در مبنای دو نوشته شود چند بیت خواهد داشت؟
۵. برای تعداد رقم‌های 2^n فرمولی به دست آورید.

۳-۱ رشته‌ها

در بررسی‌های گذشته، کدگذاری زیرمجموعه‌ها را با رشته‌هایی (تعدادی) از صفر و یک دیدیم. می‌خواهیم شمار رشته‌های به طول n متشکل از صفر و یک و یا سایر علامت‌ها مانند a و b و c را به دست آوریم. برای اولین عضو از رشته می‌توانیم هر یک از a و b و c را در نظر بگیریم یعنی سه حالت خواهیم داشت. برای دومین عضو رشته هم سه انتخاب وجود دارد پس شمار روش‌های انتخاب اولین دو عضو $3^2 = 9$ می‌باشد، با همین استدلال شمار روش‌های انتخاب کل رشته 3^n می‌شود. در حالت کلی می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

۱-۳-۱ قضیه: تعداد رشته‌های به طول n متشکل از k عضو معلوم برابر k^n

است.

قضیه بالا را می‌توان تعمیم داد. در واقع اگر بخواهیم رشته‌ای به طول n بسازیم به‌طوری‌که بتوانیم هر یک از k_1 علامت را در اولین عضو رشته قرار دهیم و به همین ترتیب هر یک از k_2 علامت بتوانند دومین عضو رشته باشند و به همین ترتیب تا اینکه هر یک از k_n علامت داده شده بتوانند آخرین عضو رشته باشند تعداد کل چنین رشته‌ها برابر $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$ می‌باشد.

۲-۳-۱ تمرین:

۱. در یک فروشگاه پنج کت با رنگ‌های مختلف و چهار شلوار با رنگ‌های متفاوت و سه جوراب نیز با رنگ‌های متمایز وجود دارد. چند مجموعه لباس (شامل جوراب) متفاوت می‌توان با این موارد ساخت؟
۲. مکعبی را دو بار پرتاب می‌کنیم، چند پیشامد متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟
۳. تعداد بیست هدیه متفاوت داریم که می‌خواهیم به ۱۲ کودک بدهیم. هر کودک الزاماً هدیه نمی‌گیرد و در همان حال همه‌ی هدیه‌ها را می‌توان به یک کودک داد. به چند روش می‌توان هدیه‌ها را بین آنها توزیع کرد؟
۴. بیست نوع هدیه متفاوت داریم. از هر یک تعداد زیادی در دسترس است. می‌خواهیم آنها را بین ۱۲ کودک توزیع کنیم. دوباره لازم نیست هر کودک الزاماً هدیه بگیرد ولی هیچ کودکی نمی‌تواند دو هدیه از یک نوع دریافت کند. با رعایت این شرط‌ها به چند روش می‌توانیم هدیه‌ها را توزیع کنیم؟

۴-۱ تابع

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، هر قانونی که به هر عضو A عضوی منحصر به فرد از B را نظیر کند تابعی از A به B نامیده می‌شود و می‌نویسیم $f: A \longrightarrow B$. مجموعه‌ی A را دامنه تابع f و B را هم دامنه تابع f می‌گویند. برد f همان

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subseteq B$$

می‌باشد. می‌توان تابع f را با گراف تابع یعنی مجموعه‌ی

$$\text{Graph}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \} \subseteq A \times B$$

یکی گرفت. پس $f \subseteq A \times B$ (یا $f: A \longrightarrow B$) یک تابع است هرگاه هیچ دو زوج با مؤلفه‌های اول مساوی در آن وجود نداشته باشند. در دو تابع مساوی دامنه‌ها برابر بوده روی این دامنه مشترک اعضای برد نیز مساوی می‌شوند.

تابع $f: A \longrightarrow B$ تابع ثابت است هرگاه برد آن مجموعه‌ای تک عضوی باش. تابع f بر A همانی است هرگاه به هر عضو A همان عضو را نظیر کند.

تابع $f: A \longrightarrow B$ یک به یک است هرگاه برای هر دو عضو x_1, x_2 از A ،
 $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه دهد $x_1 = x_2$. تابع f پوششی گفته می‌شود هرگاه برد f
 مساوی B باشد. تابع $f: A \longrightarrow B$ تناظر یک به یک نامیده می‌شود هرگاه f یک به
 یک و پوششی باشد. تابع $f^{-1}: A \longrightarrow B$ را وارون تابع f می‌گوییم هرگاه تابع
 $f \circ f^{-1}$ مساوی تابع همانی شوند. تابعی دارای تابع وارون است که یک به یک و پوشا
 باشد. مجموعه‌های A و B هم ارز یا معادل گفته می‌شوند اگر و تنها اگر تناظری یک
 به یک بین آنها وجود داشته باشد. مجموعه‌ی A متناهی است اگر و تنها اگر $A = \emptyset$ یا
 در ازای $n \in \mathbb{N}$ ، A با $\{1, 2, \dots, n\}$ هم‌ارز باشد. در حالتی که A متناهی است تعداد
 عناصرش را با $|A|$ نشان می‌دهند.

۵-۱ مختصری از منطق ریاضی و استدلال

۵-۱-۱ گزاره‌ها: در نوشتن یک متن ریاضی جمله‌هایی که به کار می‌روند جمله‌هایی
 خبری هستند که به وسیلهٔ رابط‌هایی به هم وصل شده‌اند. جمله خبری را گزاره
 می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر:

۵-۱-۲ تعریف گزاره: گزاره جمله‌ای است خبری به‌طوری‌که دو ارزش بیشتر
 نداشته باشد درست یا نادرست هر چند از درستی یا نادرستی آن بی‌اطلاع باشیم.
 به‌طور مثال هر یک از جمله‌های «ده، بزرگ‌تر از پانزده است»، «عدد ۹۵۳۱۱ اول
 است»، «در مشتری موجود زنده وجود دارد»، گزاره هستند، هرچند هنوز نمی‌دانیم
 جمله آخر درست است یا نادرست.

هریک از مثال‌های ذکر شده گزاره ساده هستند. معمولاً گزاره‌های ساده را
 حروف $p, q, r, \dots$ و گزاره‌ای ساخته شده از چند گزاره ساده را گزاره مرکب نامیده و
 آن را با حروف بزرگ $P, Q, R, \dots$ نشان می‌دهند.

۵-۱-۳ رابط‌های گزاره‌ای: گزاره‌ی همیشه درست، گزاره‌ای است که ارزش آن
 مستقل از گزاره‌های تشکیل دهنده‌اش همیشه درست باشد. به همین ترتیب می‌توان
 گزاره‌ی همیشه نادرست را تعریف کرد.

اگر p یک گزاره باشد گزاره‌ای که از نفی کردن p به‌دست می‌آید نقیض p
 نامیده شده و با نماد $\sim p$ نشان داده شده، چنین نیست p ، نه p خوانده می‌شود.

برای دو گزاره p و q گزاره p یا q ترکیب فصلی p با q نامیده می‌شود. گزاره p یا q تنها وقتی نادرست است که هر دو نادرست باشند. ترکیب فصلی با نماد $\vee$ نشان داده می‌شود.

گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ را ترکیب شرطی p با q می‌نامیم و می‌خوانیم: p آنگاه q ، اگر p در این صورت p, q را مقدم و q را تالی می‌گوییم. اگر گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ همیشه درست (در تمام حالات منطقی) باشد آن را استلزام منطقی می‌نامیم و می‌گوییم: از p لازم می‌آید q ، p مستلزم q است، p نتیجه می‌دهد q را، p یک شرط کافی برای q است، q یک شرط لازم برای p است. گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

اگر p و q دو گزاره باشند گزاره $(\sim p \vee \sim q) \sim$ را ترکیب عطفی p با q می‌نامیم و آن را به صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم. گزاره مرکب $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که p ، q هر دو درست باشند.

اگر p آنگاه q و برعکس را ترکیب دوشروطی می‌گوییم و آن را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و می‌خوانیم: p فقط و فقط اگر q . اگر $p \Leftrightarrow q$ همیشه درست باشد آن را یک هم‌ارزی منطقی می‌نامیم و می‌نویسیم $p \equiv q$. هر یک از p ، q را برای دیگری لازم و کافی می‌گوییم.

گزاره مرکب از ترکیب دو یا چند گزاره ساده به وسیله نمادهای $\vee$ ، $\wedge$ ، $\Rightarrow$ ، $\Leftrightarrow$ و به کمک پرانتزها و $\sim$ به دست می‌آید. نتیجه ترکیب دو گزاره را فرمول گزاره‌ای می‌گوییم. ۱-۵-۴ سورها: جمله‌ای مانند " x از پنج بزرگ‌تر است" جمله‌ای است خبری ولی دلالت بر مفهوم معینی ندارد، اگر چه به ظاهر مانند گزاره است. به طور مثال اگر به جای x ، انسان یا میز قرار داده شود جمله‌ای بی‌معنی به دست می‌آید.

حرفی را که در این عبارت به کار می‌رود متغیر می‌گوییم. اگر تعدادی از رابطه‌های گزاره‌ای و گزاره‌ها و متغیرها به گونه‌ای کنار هم قرار بگیرند به طوری که با تبدیل یکنواخت همه متغیرها به اشیایی مشخص و معین، یک گزاره به دست آید، این رابطه‌ها و گزاره‌ها و متغیرها را یک تابع گزاره‌ای (یا یک اسمنما) می‌نامیم.

سور عبارتی است که چندی یا مقدار را مشخص می‌کند و با قرار گرفتن آن در ابتدای یک تابع گزاره‌ای آن را به یک گزاره (درست یا نادرست) تبدیل می‌کند.