



مبانی علوم ریاضی

(رشته ریاضی)

دکتر کمال فلاحی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار	یازده
فصل اول. مبانی منطق	۱
هدف‌های کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
مقدمه	۲
۱-۱ گزاره‌ها	۲
۱-۱-۱ رابط‌های گزاره‌ای	۳
۲-۱ درست‌گوها و هم‌ارزی	۱۴
۳-۱ استدلال استنتاجی	۲۳
۴-۱ گزاره‌نما و سورها	۲۶
۵-۱ اثبات ریاضی	۳۲
۱-۵-۱ اثبات مستقیم	۳۲
۲-۵-۱ اثبات به روش عکس نقیض	۳۳
۳-۵-۱ اثبات به روش برهان خلف	۳۳

۳۴	۴-۵-۱ اثبات به روش استقرای ریاضی
۳۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول
۴۳	فصل دوم. مجموعه‌ها
۴۳	هدف‌های کلی
۴۳	هدف‌های یادگیری
۴۳	مقدمه
۴۴	۱-۲ مجموعه
۴۷	۲-۲ مشخص‌سازی مجموعه‌ها
۴۹	۳-۲ زیرمجموعه
۵۲	۱-۳-۲ مجموعه توانی
۵۳	۴-۲ اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها
۵۸	۱-۴-۲ تعمیم مفاهیم اجتماع و اشتراک
۶۰	۵-۲ چند عمل دیگر روی مجموعه‌ها
۶۰	۱-۵-۲ تفاضل دو مجموعه
۶۱	۲-۵-۲ متمم‌گیری
۶۵	۳-۵-۲ تفاضل متقارن
۶۸	۶-۲ نمودار ون
۷۱	۷-۲ خانواده مجموعه‌های اندیس‌دار
۷۸	۸-۲ بودن یا نبودن مجموعه همه مجموعه‌ها
۷۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم
۸۳	فصل سوم. رابطه و ترتیب جزئی
۸۳	هدف‌های کلی
۸۳	هدف‌های یادگیری
۸۴	مقدمه
۸۴	۱-۳ زوج مرتب

۸۶	۱-۱-۳ حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها
۹۲	۲-۳ رابطه و انواع آن
۹۹	۳-۳ رابطه ترتیبی و مجموعه‌های مرتب
۱۰۳	۴-۳ کران‌های بالا و پایین و عناصر ماکسیمال و مینیمال
۱۰۹	۵-۳ افراز و ارتباط آن با رابطه هم‌ارزی
۱۱۶	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم

۱۲۳	فصل چهارم. تابع
۱۲۳	هدف‌های کلی
۱۲۳	هدف‌های یادگیری
۱۲۴	مقدمه
۱۲۴	۱-۴ مفهوم کلی تابع
۱۳۰	۲-۴ نگاره و پیش‌نگاره یک عضو
۱۳۵	۳-۴ نگاره و نگاره وارون یک مجموعه
۱۴۵	۴-۴ انواع توابع
۱۴۵	۱-۴-۴ تابع یک‌به‌یک
۱۵۰	۲-۴-۴ تابع پوشا
۱۵۲	۳-۴-۴ تابع دوسویی
۱۵۶	۵-۴ ترکیب توابع
۱۶۴	۶-۴ وارون توابع
۱۷۴	۱-۶-۴ نمودار تابع وارون
۱۷۷	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم

۱۸۳	فصل پنجم. جبر بول
۱۸۳	هدف‌های کلی
۱۸۳	هدف‌های یادگیری
۱۸۳	مقدمه

۱۸۴	۱-۵ جبر بول
۱۹۶	۲-۵ تابع بول و متمم یک تابع بول
۲۰۳	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم

۲۰۵	فصل ششم. مجموعه‌های شمارا و ناشمارا
۲۰۵	هدف‌های کلی
۲۰۵	هدف‌های یادگیری
۲۰۵	مقدمه
۲۰۶	۱-۶ هم‌ارزی دو مجموعه
۲۱۱	۲-۶ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۲۱۶	۳-۶ مجموعه‌های شمارای نامتناهی و شمارا
۲۲۳	۴-۶ مجموعه‌های ناشمارا
۲۲۶	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل ششم

۲۲۹	فصل هفتم. اعداد اصلی و حساب آن‌ها
۲۲۹	هدف‌های کلی
۲۲۹	هدف‌های یادگیری
۲۲۹	مقدمه
۲۳۰	۱-۷ مفهوم اعداد اصلی
۲۳۶	۲-۷ نامحدود بودن تعداد اعداد اصلی ترامتناهی
۲۳۸	۳-۷ حساب اعداد اصلی
۲۳۸	۱-۳-۷ جمع اعداد اصلی
۲۴۳	۲-۳-۷ ضرب اعداد اصلی
۲۴۷	۳-۳-۷ توان اعداد اصلی
۲۵۳	۴-۷ گئورگ کانتور
۲۵۷	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هفتم

۲۵۹	فصل هشتم. اصل انتخاب و صورت‌های معادل آن
۲۵۹	هدف‌های کلی
۲۵۹	هدف‌های یادگیری
۲۵۹	مقدمه
۲۶۰	۸-۱ اصل انتخاب
۲۶۳	۸-۲ اصل ماکسیمال هاسدورف
۲۶۵	۸-۳ لم زورن
۲۶۸	۸-۴ اصل خوش‌ترتیبی
۲۷۴	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هشتم
۲۷۷	پاسخنامه
۲۸۱	منابع
۲۸۳	فهرست نمادها
۲۸۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۹۱	نمایه

تقدیم به دوست عزیزم، وحید دامن افشان

و

دخترم، ویانا

پیشگفتار

ریاضیات برخلاف علوم تجربی که در آن‌ها حدس، گمان و آزمون و خطا دخیل است، علم قطعیت است. هر مفهومی در ریاضیات باید تعریفی دقیق داشته باشد؛ به گونه‌ای که مفهوم موردنظر را به طور جامع و بدون کوچک‌ترین ابهامی بیان کند. برای بحث و تبادل نظر درباره این مفاهیم و انتقال آن‌ها به دیگران، به ابزارهایی دقیق و توانمند نیاز داریم. یکی از این ابزارها، «نظریه مجموعه‌ها» است. این نظریه یکی از پرطراوت‌ترین و هیجان‌انگیزترین نظریه‌های ریاضیات است. در اهمیت این نظریه همین بس که آن را زبان رسمی ریاضیات می‌دانند؛ درست همان‌طور که کسانی مانند گاوس، ریاضیات را زبان رسمی و به تعبیری دیگر، ملکه علوم می‌دانند.

نظریه مجموعه‌ها همان‌طور که از نامش پیداست، به مطالعه مجموعه‌ها می‌پردازد؛ اما برای مطالعه خود مجموعه‌ها و اثبات روابط بین آن‌ها، به ابزارهایی دیگری نیاز داریم. به همین منظور فصل اول کتاب به معرفی و بحث درباره منطق مقدماتی اختصاص یافته است. در این فصل گزاره و رابط‌های گزاره‌ای معرفی شده‌اند و سپس استدلال استنتاجی و چند روش اثبات حکم‌های ریاضی بیان شده است.

فصل دوم کتاب به معرفی مجموعه‌ها می‌پردازد. در این فصل بعد از نمایش آن‌ها به زبان ریاضی، وارد بحث جبر مجموعه‌ها می‌شویم. در فصل سوم، از مفهوم مجموعه‌ها کمک می‌گیریم و با مفهوم رابطه روی مجموعه‌ها آشنا می‌شویم. فصل چهارم به مفهوم تابع اختصاص دارد که یک مفهوم اساسی برای درک بهتر فصل‌های باقی‌مانده کتاب است. در فصل پنجم کتاب به معرفی جبر بول می‌پردازیم و با گزاره‌های منطقی به صورت جبری برخورد می‌کنیم. در فصل ششم کتاب با استفاده از مفهوم تابع، درباره متناهی، نامتناهی، شمارا و ناشمارا بودن مجموعه‌ها

بحث خواهیم کرد. درک عمیق از مفهوم تابع در این فصل بسیار مفید خواهد بود. در فصل هفتم مفهوم اعداد اصلی را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم اعداد اصلی متناهی، دقیقاً همان اعداد صحیح نامنفی هستند. بعد از آن با حساب این نوع اعداد آشنا می‌شویم. در نهایت در فصل هشتم، اصل انتخاب را بیان کرده و چند صورت معادل آن را بررسی می‌کنیم. نکته‌ای که ذکر آن در اینجا لازم است، این است که مطالب کتاب، ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند؛ بنابراین خواننده قبل از مطالعه هر فصل، باید اطمینان حاصل کند که مطالب فصل‌های قبلی را به‌خوبی فراگرفته است.

از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به تعداد بسیار زیاد مثال‌ها در هر بخش از کتاب اشاره کرد که در فهم بهتر مطالب کتاب، بسیار مؤثر است. علاوه بر این برهان تمام قضیه‌های موجود در کتاب به زبانی ساده و با ذکر تمام جزئیات بیان شده است. وجود این دو ویژگی باعث می‌شود کتاب به‌صورت خودخوان نیز قابل استفاده باشد. علاوه بر این‌ها، در پایان هر بخش، چند تمرین و در پایان هر فصل، چند پرسش چهارگزینه‌ای برای محک‌زدن فهم خواننده از مطالب کتاب قرار داده شده است.

در پایان لازم می‌دانم از دوست عزیزم، آقای وحید دامن‌افشان کمال سپاس‌گزاری را داشته باشم؛ چرا که بدون کمک‌ها و راهنمایی‌های ایشان، آماده‌سازی این کتاب به پایان نمی‌رسید. همچنین باید از مدیر فهیم و کارکنان محترم دفتر تدوین دانشگاه پیام نور به دلیل فراهم‌کردن شرایط نگارش این کتاب تشکر نمایم. علاوه بر این‌ها باید قدردان خانواده‌ام به خاطر تحمل‌کردن در طی نوشتن این کتاب باشم؛ چرا که وقت‌هایی که صرف نوشتن این کتاب شده است، باید در کنار آنان سپری می‌شد. امیدوارم خوانندگان عزیز اینجانب را از نظرات ارزشمند خود درباره مطالب بیان‌شده در کتاب محروم نکنند و اشتباهات احتمالی در کتاب را با اینجانب در میان بگذارند.

کمال فلاحی

فصل اول

مبانی منطق

هدف‌های کلی

آشنایی با مفهوم گزاره‌ها، سورها و چند روش اثبات احكام ریاضی.

هدف‌های یادگیری

از دانشجو انتظار می‌رود پس از مطالعه این فصل بتواند:

۱. مفهوم گزاره‌ها را توضیح دهد.
۲. دلیل گزاره‌بودن یا نبودن یک عبارت را توضیح دهد.
۳. رابط‌های گزاره‌ای را نام ببرد و تفاوت‌های آن‌ها با یکدیگر را ذکر کند.
۴. انواع گزاره‌ها را از یکدیگر تشخیص دهد.
۵. مفهوم استدلال استنتاجی را بیان کند.
۶. مفاهیم گزاره‌نما و سور را توضیح دهد.
۷. نقیض گزاره‌های سوردار را به دست آورد.
۸. روش‌های اثبات مستقیم، عکس نقیض، برهان خلف و استقرای ریاضی را یاد بگیرد و

در مواقع لازم بتواند از آن‌ها استفاده کند.

مقدمه

این فصل درباره منطق مقدماتی در ریاضیات است. منطق، بررسی اصول و روش‌هایی است که برای تشخیص استدلال‌های درست از استدلال‌های نادرست به کار می‌روند. منظور از این فصل مقدماتی منطق این است که خواننده را با اصول و روش‌هایی که در هر مرحله از برهان قضیه‌های ریاضی به کار می‌رود، آشنا کنیم. برای این کار ابتدا مفهوم گزاره را بیان می‌کنیم؛ سپس رابط‌های گزاره‌ای را شرح می‌دهیم و با انواع گزاره آشنا می‌شویم. بعد از آن با آوردن قضیه‌ها و مثال‌های گوناگون، به‌طور عمیق به بررسی روابط بین گزاره‌ها خواهیم پرداخت. در ادامه فصل را با معرفی چند روش اثبات قضیه‌های ریاضی به پایان می‌بریم. اهمیت این فصل به حدی است که پایه و اساس چند فصل بعدی کتاب خواهد بود؛ لذا پیشنهاد می‌شود که خواننده این فصل را با دقت فراوان مطالعه کند.

۱-۱ گزاره‌ها

بحث منطق با مفهوم «گزاره» شروع می‌شود که شاید بتوان گفت اساسی‌ترین مفهوم آن است. به عبارت دیگر، کلیدواژه این فصل، گزاره است که در زیر با تعریف آن آشنا می‌شویم.

تعریف (۱). گزاره، جمله‌ای خبری است که یا درست است یا نادرست؛ اما به‌طور همزمان نمی‌تواند هم درست باشد و هم نادرست.

در تعریف بالا باید دقت داشت که نیازی به دانستن درست یا نادرست بودن گزاره نیست؛ بلکه کافی است فقط بدانیم یکی از دو حالت درست یا نادرست را دارد. با این تعریف مشخص می‌شود که جمله‌های سؤالی، امری، دعایی یا آرزویی گزاره نیستند. مثال‌های زیر می‌تواند به روشن‌شدن موضوع کمک کنند.

مثال ۱-۱. هر یک از جملات زیر یک گزاره است.

(آ) پایتخت ایران، تهران است.

(ب) 2×2 برابر ۵ است.

(پ) رقم یکان عدد 2^{23} ، ۶ است.

(ت) عدد ۸ فرد است.

(ث) ۹۷ سال پیش در چنین روزی، آسمان ابری بود.

(ج) سوم دی ماه سال ۱۴۰۶ دوشنبه خواهد بود.

دقت داشته باشید که (آ) به وضوح درست و (ب) و (ت) نادرست است؛ پس هر سه گزاره هستند. درست یا نادرست بودن جمله (پ) نیازمند محاسبه است؛ اما بالاخره رقم موردنظر یا ۶ است یا نیست؛ بنابراین این جمله هم گزاره است. (ث) و (ج) نیز گزاره هستند؛ چون با وجود آنکه برای فهمیدن درست بودن یا نبودن آن‌ها باید به تاریخ و تقویم مراجعه کرد، اما باز یا درست هستند یا نادرست.

مثال ۱-۲. هیچ کدام از عبارت‌های زیر گزاره نیستند؛ چون این عبارت‌ها، خبری نیستند و بنابراین این سؤال که آن‌ها درست یا نادرست هستند، معنی ندارد.

(آ) چه هوای دلپذیری!

(ب) فردا دانشگاه تعطیل است؟

(پ) بنشین سر جای!

(ت) ای کاش آنجا بودم.

در بحث گزاره‌ها، دو نوع گزاره وجود دارد: گزاره‌هایی که در مثال ۱-۱ بیان شدند، همگی گزاره‌های ساده هستند. ترکیبی از چند گزاره ساده را یک گزاره مرکب می‌نامند. برای مثال «پایتخت ایران، تهران است و عدد ۸ فرد است» گزاره‌ای مرکب است.

حال که با گزاره‌ها و انواع آن آشنا شده‌ایم، باید قراردادی برای نمایش آن‌ها نیز وضع کنیم. گزاره‌ها را با حروفی مثل p, q, r و... نمایش می‌دهیم. از این حروف گاهی برای نمایش گزاره‌های مرکب نیز استفاده می‌شود؛ اما معمولاً حروف بزرگی مانند P, Q, R و... برای نمایش گزاره‌های مرکب به کار می‌روند.

۱-۱-۱ رابط‌های گزاره‌ای

از آنجایی که موقعیت‌های بسیاری پیش می‌آید که با گزاره‌های مرکب سروکار داشته باشیم، باید راهی برای ایجاد ارتباط بین گزاره‌ها پیدا کنیم. در منطق، رابط‌هایی برای ایجاد این ارتباط وجود

دارد که در ادامه پنج مورد از مهم‌ترین آن‌ها را معرفی می‌کنیم:

۱. «نفی» که با علامت $\sim$ نمایش داده می‌شود.
۲. «و» که با علامت $\wedge$ نمایش داده می‌شود.
۳. «یا» که با علامت $\vee$ نمایش داده می‌شود.
۴. «اگر... آن‌گاه...» که با علامت $\rightarrow$ نمایش داده می‌شود.
۵. «... اگر و تنها اگر...» که با علامت $\leftrightarrow$ نمایش داده می‌شود.

در ادامه تک‌تک این روابط را بررسی کرده و در مورد هر یک چند مثال می‌آوریم.

تعریف (۲). فرض کنید p یک گزاره باشد. گزاره $p \sim$ که آن را به صورت «نفی p » یا «نقیض p » می‌خوانیم، درست است هرگاه p نادرست باشد و نادرست است هرگاه p درست باشد.

برای مثال اگر p گزاره «آب مایع است» باشد، نقیض آن یعنی $p \sim$ ، گزاره «آب مایع نیست» یا «چنین نیست که آب مایع است» می‌شود.

نکته‌ای که باید به آن توجه کرد، این است که نقیض یک گزاره، خود نیز یک گزاره است؛ چون خود نیز دارای ارزش درست یا نادرست است. همان‌طور که در مثال پاراگراف قبل دیده شد، ارزش $p \sim$ با توجه به ارزش p مشخص می‌شود. برای نمایش این وابستگی از جدولی موسوم به **جدول ارزش** استفاده می‌کنیم (جدول ۱-۱). در این جدول منظور از حرف «د»، درست و منظور از حرف «ن»، نادرست است.

جدول ۱-۱

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

در چنین موقعیت ساده‌ای، گزاره p فقط دو ارزش درست یا نادرست را دارد؛ بنابراین در زیر ستون p فقط دو حالت «د» و «ن» قرار می‌گیرد. در زیر ستون $p \sim$ نیز با توجه به تعریف رابط نقیض، ارزش $p \sim$ نوشته می‌شود. در این جدول به روشنی می‌بینیم که اگر p درست باشد، $p \sim$ نادرست است و اگر p نادرست باشد، $p \sim$ درست است. در ادامه این فصل خواهیم دید که با افزایش تعداد گزاره‌ها، تعداد سطرها و ستون‌های این جدول نیز افزایش می‌یابد.

حال نوبت معرفی رابط بعدی است.

تعریف (۳). فرض کنید p و q دو گزاره باشند. گزاره « p و q » را «ترکیب عطفی p و q » می‌نامند و آن را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند. ارزش آن را در هر حالت به صورت جدول ۱-۲ تعیین می‌کنیم.

جدول ۱-۲

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

برای مثال اگر p گزاره «هوا آفتابی است» و q گزاره «احمد ۱۹ سال دارد» باشد، آنگاه گزاره $p \wedge q$ عبارت «هوا آفتابی است و احمد ۱۹ سال دارد» است. در گزاره مرکبی مانند $p \wedge q$ به هر کدام از گزاره‌های p و q یک مؤلفه می‌گویند. همان‌طور که در جدول ۱-۲ دیده می‌شود، در گزاره مرکبی مانند $p \wedge q$ به علت وجود دو مؤلفه، چهار حالت وجود دارد که آن‌ها را **حالت‌های منطقی** می‌نامند. به‌طور کلی اگر n گزاره متفاوت داشته باشیم، 2^n حالت مختلف باید در مورد گزاره‌ها بررسی شود؛ بنابراین در تعریف (۳) چهار حالت زیر وجود دارد:

۱. p درست و q درست است.

۲. p درست و q نادرست است.

۳. p نادرست و q درست است.

۴. p نادرست و q نادرست است.

همان‌طور که دیده می‌شود، هر کدام از این چهار حالت، یکی از ردیف‌های جدول ۱-۲ را تشکیل داده است. همچنین $p \wedge q$ تنها و تنها وقتی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند.

حال که با رابط‌های $\sim$ و $\wedge$ آشنا شدیم، وقت آن است خود را با تعیین ارزش گزاره‌های پیچیده‌تر به چالش بکشیم.

مثال ۱-۳. جدول ارزش گزاره مرکب $[p \wedge (\sim q)]$ را تشکیل دهید.

حل. با نگاهی به گزاره داده شده متوجه می شویم که باید ارزش q ، $\sim q$ ، $p \wedge \sim q$ و $\sim [p \wedge (\sim q)]$ را تعیین کنیم. برای این کار ابتدا جدولی رسم می کنیم و چهار حالت ممکن را در هر ردیف آن می نویسیم.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

حال به کمک جدول ۱-۱، ارزش $\sim q$ را به آن اضافه می کنیم.

p	q	$\sim q$
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	د

در ادامه به کمک جدول ۱-۲ ارزش گزاره $p \wedge (\sim q)$ را نیز به آن اضافه می کنیم.

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

در پایان باز به کمک جدول ۱-۱ نقیض گزاره $p \wedge (\sim q)$ یعنی $\sim [p \wedge (\sim q)]$ را به جدول اضافه می کنیم تا کار تمام شود.

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim [p \wedge (\sim q)]$
د	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د

مثال ۱-۴. جدول ارزش گزاره مرکب $\sim p \wedge (p \wedge q)$ را تشکیل دهید.

حل. برای تعیین ارزش این گزاره، مانند مثال ۱-۳ عمل می‌کنیم؛ اما این بار برای صرفه‌جویی در فضای صفحه، همه مراحل را در یک جدول انجام می‌دهیم. در این مثال باید ارزش $p \wedge q$ ، p و در پایان ارزش $(p \wedge q) \wedge \sim p$ را تعیین کنیم؛ بنابراین داریم:

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
د	د	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	د	ن

رابط بعدی‌ای که به معرفی آن می‌پردازیم، رابط $\vee$ است؛ اما قبل از آن باید با معنی «یا» در منطق آشنا شویم. در گفت‌وگوی عادی و روزمره، «یا» با دو معنی به کار می‌رود. برای مثال، وقتی کسی می‌گوید «من امسال باغ یا زمین می‌خرم»، به این معنی است که ممکن است هر دوی باغ یا زمین را بخرد؛ اما وقتی می‌گوید «اسم بچه‌ام را سارا یا مریم می‌گذارم»، به این معنی است که فقط یکی از این دو اسم را انتخاب خواهد کرد. «یا»ی نوع اول را **یای شمول** و «یا»ی نوع دوم را **یای مانع جمع** می‌نامند. در تعریف بعدی، منظور از «یا»، یای شمول است.

تعریف (۴). فرض کنید p و q دو گزاره باشند. گزاره « p یا q » را «ترکیب فصلی p و q » می‌نامند و آن را با نماد $p \vee q$ نمایش می‌دهند. ارزش آن را در هر حالت منطقی به صورت جدول ۱-۳ تعیین می‌کنیم.

جدول ۱-۳

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

با نگاهی به جدول ۱-۳ می‌توان دریافت که گزاره $p \vee q$ تنها وقتی نادرست است که هر دو مؤلفه p و q نادرست باشند.

مثال ۱-۵. جدول ارزش گزاره $p \wedge (q \vee r)$ را تشکیل دهید.

حل. با توجه به اینکه در اینجا سه گزاره مختلف داریم، بنا بر توضیحات تعریف (۳) باید $2^3 = 8$ حالت منطقی را در نظر بگیریم؛ بنابراین با توجه به جدول‌های ۱-۲ و ۱-۳ می‌توان جدول ارزش موردنظر را نوشت.

جدول ۱-۴

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن

مثال ۱-۶. جدول ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ را تشکیل دهید.

حل. در این مثال نیز به دلیل وجود سه گزاره مختلف، باید $2^3 = 8$ حالت منطقی را در نظر بگیریم؛ بنابراین جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

جدول ۱-۵

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن

گاهی با مقایسه جدول‌های ارزش دو گزاره به‌ظاهر متفاوت دیده می‌شود که ستون آخر یا همان ستون سمت راست آن‌ها یکسان است. برای مثال، ستون آخر هر دو جدول ۱-۴ و ۱-۵ یکی است. چنین وضعیتی ما را به تعریف بعدی می‌رساند.

تعریف (۵). هرگاه دو گزاره ساده یا مرکب P یا Q برای تمام حالت‌های منطقی دارای ارزش یکسان باشند، آن‌ها را **هم‌ارز منطقی** یا به‌طور ساده، **هم‌ارز** می‌نامند و با $P \equiv Q$ نشان می‌دهند.

با توجه به تعریف بالا و جدول‌های ۱-۴ و ۱-۵ می‌توان نوشت:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه داشت، این است که در منطق با وجود اینکه دو گزاره هم‌ارز یکی در نظر گرفته می‌شوند، اما معمولاً گزاره ساده‌تر $p \wedge (q \vee r)$ را به گزاره پیچیده‌تر هم‌ارزش، یعنی $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ترجیح می‌دهیم. در تعریف بعدی، یکی دیگر از رابط‌ها را معرفی می‌کنیم. این رابط در بیان بسیاری از قضیه‌های ریاضی ظاهر می‌شود.

تعریف (۶). اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره «اگر p آنگاه q » را **ترکیب شرطی** گزاره‌های p با q می‌نامند و آن را با نماد $p \rightarrow q$ نمایش می‌دهند. گزاره $p \rightarrow q$ هم‌ارز گزاره $(p \wedge \sim q) \sim$ تعریف می‌شود.

مثال ۱-۷. جدول ارزش گزاره $p \rightarrow q$ را تشکیل دهید.

حل. با توجه به تعریف (۶) گزاره $p \rightarrow q$ هم‌ارز گزاره $(p \wedge \sim q) \sim$ است؛ بنابراین کافی است جدول ارزش $(p \wedge \sim q) \sim$ را تشکیل دهیم؛ از این رو داریم:

جدول ۱-۶

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q [\equiv \sim (p \wedge \sim q)]$
د	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د

جدول ۱-۶ نیاز به کمی توضیح دارد. زبان عادی یا زبان گفت‌وگوی عادی با زبان منطق که آن را زبان صوری می‌نامند، تفاوت دارد. فرض کنید p گزاره «باران بر زمین می‌بارد» و q گزاره «زمین خیس می‌شود» باشد. در این صورت گزاره $p \rightarrow q$ گزاره «اگر باران بر زمین ببارد، آنگاه زمین خیس می‌شود» است. در زبان عادی، گزاره $p \rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که