



دانشگاه سindh
پتہ

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

(رشته ریاضی)

دکتر محمد حسن بیژن‌زاده دکتر شهریار فرهمندراد دکتر محمد چایچی
دکتر احمد خاکساری دکتر مهدی صحت‌خواه دکتر خدیجه احمدی‌آملی
محمد رضا فلکی دکتر فرزاد خسروپور

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

فصل اول	دستگاه‌های معادلات خطی	۱
هدف کلی		۱
هدف‌های آموزشی		۱
۱-۱	ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی	۲
۲-۱	دستگاه‌های بیشتر	۱۳
۳-۱	تمرین	۱۵
۴-۱	روش حذفی گاوس - جردن	۲۰
۵-۱	دستگاه‌های معادلات خطی همگن	۲۸
۶-۱	تمرین	۳۰
۷-۱	*Curve Fitting	۳۹
۸-۱	تحلیل شبکه الکتریکی	۴۲
۹-۱	جریان ترافیک	۴۵

۴۹	تمرین	۱۰-۱
۵۲	تمرین‌های دوره‌ای فصل اول	۱۱-۱
۵۷	فصل دوم ماتریس‌ها	
۵۷	هدف کلی	
۵۷	هدف‌های آموزشی	
۵۸	۱-۲ جمع، ضرب عددی و ضرب ماتریس‌ها	
۶۰	۲-۲ جمع ماتریس‌ها	
۶۱	۳-۲ ضرب اسکالر ماتریس‌ها	
۶۱	۴-۲ قرینه‌سازی و تفریق	
۶۲	۵-۲ ضرب ماتریس‌ها	
۶۵	۶-۲ اندازه‌ی یک ماتریس حاصل ضرب	
۶۷	۷-۲ نماد ماتریسی و دستگاه‌های معادلات	
۶۸	۸-۲ ضرب سریع ماتریسی	
۷۰	۹-۲ تمرین	
۷۵	۱۰-۲ ویژگی‌های اعمال ماتریس‌ها	
۸۱	۱۱-۲ توان‌های ماتریس‌ها	
۸۲	۱۲-۲ تمرین	
۸۸	۱۳-۲ ماتریس‌های متقارن و سلسله مراتب تاریخی در باستان شناسی	
۹۲	۱۴-۲ ماتریس‌ها با درایه‌های مختلط	
۹۵	۱۵-۲ سلسله مراتب تاریخی در باستان شناسی	
۹۹	۱۶-۲ تمرین	
۱۰۵	۱۷-۲ ماتریس معکوس	
۱۰۷	۱۸-۲ روش حذفی گاوس - جردن برای پیدا کردن معکوس ماتریس	
۱۱۳	۱۹-۲ رمزنویسی	
۱۱۵	۲۰-۲ تمرین	
۱۲۲	۲۱-۲ *مدل ورودی - خروجی لئونتیف در اقتصاد	

۲۲-۲	تمرین	۱۲۸
۲۳-۲	*زنجیره‌های مارکوف، مهاجرت جمعیت و ژنتیک	۱۳۰
۲۴-۲	تمرین	۱۳۶
۲۵-۲	*یک مدل ارتباطی و ارتباطات گروهی در جامعه	۱۴۰
۲۶-۲	فاصله در یک گراف جهت‌دار	۱۴۵
۲۷-۲	ارتباطات گروهی در جامعه‌شناسی	۱۴۶
۲۸-۲	تمرین	۱۴۷
۲۹-۲	تمرین‌های دوره‌ای فصل دوم	۱۵۶

فصل سوم	دترمینان‌ها	۱۶۰
	هدف کلی	۱۶۰
	هدف‌های آموزشی	۱۶۰
۱-۳	مقدمه‌ای بر دترمینان‌ها	۱۶۱
۲-۳	محاسبه دترمینان‌های ماتریس‌های 2×2 و 3×3	۱۶۵
۳-۳	تعریف دیگری از دترمینان	۱۶۶
۴-۳	تمرین	۱۶۸
۵-۳	خواص دترمینان‌ها	۱۷۱
۶-۳	تمرین	۱۷۷
۷-۳	محاسبه عددی یک دترمینان	۱۸۰
۸-۳	تمرین	۱۸۵
۹-۳	دترمینان‌ها، معکوس‌های ماتریس و دستگاه‌های معادلات خطی	۱۸۶
۱۰-۳	تمرین	۱۹۵
۱۱-۳	تمرین‌های دوره‌ای فصل سوم	۱۹۸

فصل چهارم	فضای برداری $\mathbb{R}^n$	۲۰۱
۱-۴	مقدمه بر بردارها	۲۰۲
۲-۴	تمرین	۲۱۱
۳-۴	حاصل ضرب نقطه‌ای	۲۱۳

۴-۴	نرم یک بردار در $\mathbb{R}^n$	۲۱۵
۵-۴	زاویه بین بردارها	۲۱۷
۶-۴	فاصله‌ی بین نقاط	۲۲۲
۷-۴	تمرین	۲۲۴
۸-۴	مقدمه‌ای بر تبدیلات خطی	۲۲۷
۹-۴	ترکیب تبدیلات ماتریسی	۲۳۲
۱۰-۴	تمرین	۲۳۳
۱۱-۴	دوران حول مبدأ	۲۳۵
۱۲-۴	نمایش ماتریسی	۲۳۸
۱۳-۴	انبساط و انقباض	۲۳۹
۱۴-۴	انعکاس	۲۴۰
۱۵-۴	انتقال و تبدیلات آفین	۲۴۴
۱۶-۴	تبدیلات در گرافیک‌های رایانه‌ی	۲۴۶
۱۷-۴	*تساویر فراکتال طبیعت	۲۴۹
۱۸-۴	تمرین	۲۵۲
۱۹-۴	تمرین‌های دوره‌ای فصل چهارم	۲۵۷

فصل پنجم	فضاهای برداری عمومی	۲۵۹
۱-۵	فضاهای برداری	۲۶۰
۲-۵	فضاهای برداری ماتریس‌ها	۲۶۱
۳-۵	فضاهای برداری توابع	۲۶۳
۴-۵	فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$	۲۶۴
۵-۵	تمرین	۲۶۶
۶-۵	زیرفضاها	۲۶۷
۷-۵	تمرین	۲۷۲
۸-۵	ترکیبات خطی بردارها	۲۷۶
۹-۵	تمرین	۲۸۷

۲۸۹	استقلال و وابستگی خطی	۱۰-۵
۲۹۵	تمرین	۱۱-۵
۲۹۸	پایه و بعد	۱۲-۵
۳۰۶	بعد برخی فضاها	۱۳-۵
۳۰۸	تمرین	۱۴-۵
۳۱۰	رتبه یک ماتریس	۱۵-۵
۳۱۸	تمرین	۱۶-۵
۳۱۹	بردارهای متعامد و تصاویر در $\mathbb{R}^n$	۱۷-۵
۳۲۳	تصویر یک بردار روی بردار دیگر	۱۸-۵
۳۲۷	تصویر یک بردار روی یک زیرفضا	۱۹-۵
۳۳۰	فاصله یک نقطه از یک زیرفضا	۲۰-۵
۳۳۲	ماتریس‌های متعامد	۲۱-۵
۳۳۴	تمرین	۲۲-۵
۳۳۸	تمرین‌های دوره‌ای فصل پنجم	۲۳-۵

۳۴۴	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	فصل ششم
۳۴۵	مقادیر ویژه	۱-۶
۳۴۶	محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۲-۶
۳۵۴	تمرین	۳-۶
۳۵۶	*جمعیت شناسی	۴-۶
۳۶۰	قطری کردن ماتریس‌ها	۵-۶
۳۶۴	قطری‌سازی ماتریس‌های متقارن	۶-۶
۳۶۶	قطری‌سازی متعامد	۷-۶
۳۶۷	تمرین	۸-۶
۳۷۰	دوران محورهای مختصات	۹-۶
۳۷۱	*فرم‌های درجه دوم	۱۰-۶
۳۷۴	معادلات تفاضلی	۱۱-۶

۱۲-۶	نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۳۷۸
۱۳-۶	تمرین	۳۹۰
۱۴-۶	تمرین‌های دوره‌ای فصل ششم	۳۹۱

فصل هفتم	تبدیلات خطی	۳۹۳
۱-۷	تبدیلات خطی، هسته و برد	۳۹۴
۲-۷	تمرین	۴۰۶
۳-۷	*تبدیلات و دستگاه‌های معادلات خطی	۴۱۲
۴-۷	معادلات همگن	۴۱۳
۵-۷	معادلات ناهمگن	۴۱۴
۶-۷	دستگاه‌های بیشتر	۴۱۷
۷-۷	تمرین	۴۲۰
۸-۷	بردارهای مختصاتی	۴۲۳
۹-۷	تغییر پایه	۴۲۷
۱۰-۷	یک‌ریختی‌ها	۴۳۰
۱۱-۷	تمرین	۴۳۲
۱۲-۷	نمایش‌های ماتریسی تبدیلات خطی	۴۳۵
۱۳-۷	اهمیت نمایش ماتریسی	۴۴۰
۱۴-۷	ارتباط‌های بین نمایش‌های ماتریسی	۴۴۳
۱۵-۷	نمایش ماتریسی قطری یک عملگر خطی	۴۴۴
۱۶-۷	تمرین‌های دوره‌ای فصل هفتم	۴۵۲

فصل هشتم	فضاهای ضرب داخلی	۴۵۴
۱-۸	فضاهای ضرب داخلی	۴۵۵
۲-۸	نرم یک بردار	۴۵۸
۳-۸	زوایه	۴۵۹
۴-۸	بردارهای متعامد	۴۶۰
۵-۸	فاصله	۴۶۱

۴۶۲	تمرین	۶-۸
۴۶۷	اتحادهای قطبی	۷-۸
۴۶۸	*هندسه نااقلیدسی و نسبیت خاص	۸-۸
۴۷۱	نسبیت خاص	۹-۸
۴۷۵	تمرین	۱۰-۸
۴۷۷	*تقریب توابع و تئوری کدنگاری	۱۱-۸
۴۸۰	*تقریب‌های فوریه	۱۲-۸
۴۸۲	*نظریه کدنگاری	۱۳-۸
۴۸۵	تمرین	۱۴-۸
۴۸۶	*منحنی کمترین مربعات	۱۵-۸
۴۸۹	*منحنی‌های کمترین مربعات	۱۶-۸
۴۹۹	تمرین	۱۷-۸
۵۰۵	مرجع‌ها	

به نام خدا

پیشگفتار

ویژگی‌های کتاب. در این کتاب ریاضیات، محاسبات و کاربردها به طریقی انعطاف‌پذیر با هم درآمیخته است. هم چنان که قبلاً گفته شد، در عین حال که جبرخطی درسی مجرد بوده و مفاهیم آن در نهایت به گونه‌ای محض ارائه می‌گردد، هیچ مبحثی بدون کاربرد رها نشده است. اصولاً، هیچ بخشی از ریاضیات امروزه به لحاظ فلسفه آموزشی نباید بدون کاربرد در دانشگاه‌ها، و مدارس ارائه گردد. دانشجویان این درس کاربردهای آن را در محیطی طبیعی ملاحظه خواهند کرد. راهبرد کار از این قرار است که ابتدا ریاضیات مربوطه را توسعه داده و سپس کاربردهای آن ارائه می‌گردد. با این حال مدرسین این درس می‌توانند به منظور انگیزه‌بخشی به دانشجویان ابتدا اشاره‌ای به کاربردهای هر مبحث کرده و سپس شروع به مفهوم‌سازی و توسعه درس نمایند. از نظر آموزشی و تاریخی، ریاضیات از طریق تعامل و کار روی کاربردها توسعه یافته است.

موضوعات کتاب شامل مباحث کلاسیک و رسمی جبرخطی است که در دانشگاه‌های ایران و دانشگاه‌های معتبر جهان تدریس می‌گردد. از دستگاه‌های معادلات خطی گرفته، حساب ماتریس‌ها و دترمینان‌ها تا فضاهای برداری ملموس ($\mathbb{R}^n$) و مجرد و نگاشت‌های خطی و بالاخره بردارها و مقادیر ویژه را شامل می‌شود. بدین ترتیب این کتاب، که براساس کتاب مشهور گارث ویلیام [1] تألیف گردیده است، در هشت فصل به رشته تحریر درآمده است.

گروه مؤلفین پیشاپیش از هر نظر و نقدی که همکاران گرامی و دانشجویان عزیز در خصوص این درس، مباحث آن و نحوه ارائه‌ی مطالب داشته باشند استقبال می‌نمایند.

مدرس محترم، بخش‌هایی از کتاب که ستاره‌دار هستند، اختیاری تلقی گردند و به دانشجویان توصیه شود که جهت آشنایی با کاربردهای متنوع این درس می‌توانند مطالعه کنند لکن از شرح مواد درسی حذف می‌گردند.

گروه مؤلفان جبرخطی

اعضای هیأت علمی دانشگاه پیام نور

فصل اول

دستگاه‌های معادلات خطی

هدف کلی

هدف کلی از ارائه این فصل معرفی روش‌هایی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی و ارائه مثال‌هایی از مسایلی است که در زندگی روزمره پیش می‌آیند و ما می‌توانیم آن‌ها را به کمک تحویل دادن به چنین معادلاتی حل کنیم. تکنیکی که در این فصل استفاده خواهد شد در سراسر فصل‌های آتی به‌کار گرفته خواهد شد.

هدف‌های آموزشی

دانشجو پس از مطالعه و فراگیری این فصل باید بتواند:

- (۱) اندازه و نوع یک ماتریس را تعیین کند.
- (۲) یک دستگاه معادلات خطی را به روش حذفی گاوس-جردن حل کند.
- (۳) به روش حذفی گاوس-جردن، فرم پلکانی تحویل یافته یک ماتریس را بدست آورد.
- (۴) یک دستگاه معادلات خطی را به کمک فرم پلکانی تحویل یافته از ماتریس افزوده‌ی مربوطه حل کند.

- (۵) معادله چندجمله‌ای را که نمودارش از نقاط داده شده می‌گذرد تعیین کند.
- (۶) شدت جریاناتی را که از انشعابات مختلف یک شبکه الکترونیکی داده شده می‌گذرد، تعیین نماید.
- (۷) برای یک ترافیک داده شده، مدل ریاضی بسازد که جریان ترافیکی در طول اتصالات مختلف را توصیف کند.
- (۸) مسائل پایان هر بخش و پایان فصل را به راحتی حل کند.

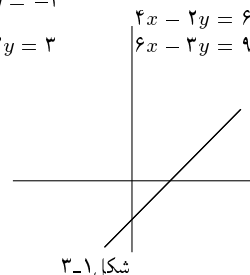
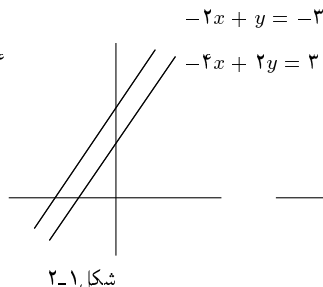
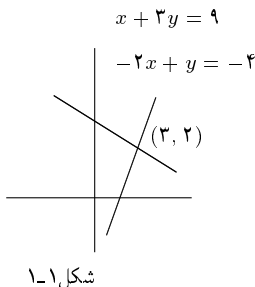
۱-۱ ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی

معادله‌ای به صورت $x + 3y = 9$ یک معادله خطی نامیده می‌شود. نمودار این معادله یک خط مستقیم در صفحه $x - y$ است. دستگاه دو معادله خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x + 3y = 9$$

$$-2x + y = -4$$

به هر دو زوج x و y که در هر دو معادله صدق کنند یک جواب می‌گوئیم. با جایگزینی می‌توان دید که $x = 3$, $y = 2$ یک جواب این دستگاه می‌باشد. یک جواب برای یک چنین دستگاهی نقطه‌ای در صفحه است که از محل تلاقی دو نمودار معادله به وجود می‌آید. مثال‌های زیر سه حالتی را که ممکن است برای چنین دستگاه‌هایی از معادلات رخ دهد، نمایش می‌دهد. این حالات عبارتند از: زمانی که یک جواب منحصر به فرد، هیچ جواب، و یا تعداد زیادی جواب وجود دارند.



چند جواب	هیچ جواب	جواب منحصر بفرد
$4x - 2y = 6$	$-2x + y = 3$	$x + 3y = 9$
$6x - 3y = 9$	$-4x + 2y = 2$	$-2x + y = -4$
هر دو معادله دارای یک نمودارند. خطوط موازی‌اند.	خطوط موازی‌اند.	خطوط در $(3, 2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.
هر نقطه روی نمودار یک جواب	نقطه اشتراک ندارند.	جواب منحصر به فرد، $x = 3$ و $y = 2$ است.
تعداد جواب‌ها زیاد است.	هیچ جواب وجود ندارد.	

هدف اصلی‌مان در این فصل بررسی دستگاه‌های بزرگتری از معادلات خطی است.

یک معادله‌ی خطی از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ به فرم

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

می‌باشد که در آن ضرایب $a_1, a_2, \dots, a_n$ و b اعداد حقیقی‌اند. مثال زیر نمونه‌ای از یک دستگاه از ۳ معادله‌ی خطی است.

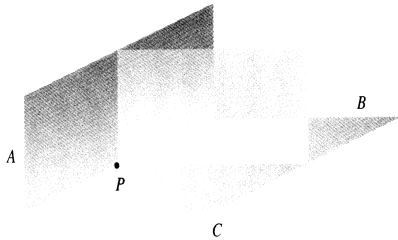
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

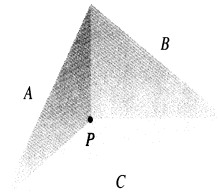
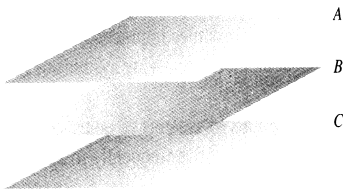
$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$$

هر معادله‌ی خطی برحسب سه متغیر متناظر با صفحه‌ای در فضای سه بعدی است. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که روی هر سه صفحه قرار دارند.

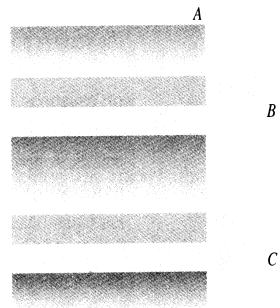
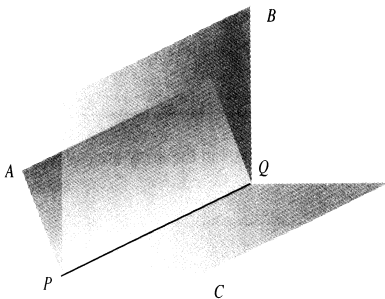
در مورد وجود جواب نیز همانند دستگاه دو معادله، سه حالت وجود دارد: یک جواب منحصر بفرد، تعداد زیادی جواب و یا هیچ جواب. در شکل ۱-۴ چند نوع از این حالات نمایش داده شده است.

Unique solution

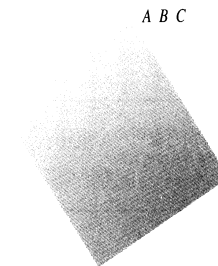
Three planes A, B, and C intersect at a single point P . P corresponds to a unique solution.

*No solutions*

Planes A, B, and C have no points in common. There are no solutions.

*Many solutions*

Three planes A, B, and C intersect in a line PQ . Any point on a line is a solution.



Three equations represent the same plane. Any point on the plane is a solution.

شکل ۴-۱

هرچه تعداد متغیرها افزوده شود، تعبیر هندسی چنین دستگاهی از معادلات پیچیده‌تر خواهد شد. هر معادله نمایانگر یک فضا است که در فضای بزرگتری قرار دارد. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که بر تمامی فضاهای نشانده شده قرار دارند. تعبیر هندسی‌ای برای تصور جواب‌ها عملاً وجود ندارد. برای همین به روش‌های

جبری متوسل می‌شویم. در بخش ۵-۱ روشی را برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تحت عنوان روش حذفی گاوس - جردن معرفی خواهیم کرد.

در این بخش چگونگی کاربرد این روش را برای دستگاه‌های معادلاتی که تنها یک جواب دارند، خواهیم دید. دستگاه‌هایی که تنها یک جواب منحصر بفرد دارند به کرار به کار می‌روند. بنابراین چنین دستگاه‌هایی توجه خاصی را می‌طلبند. اغلب به خاطر موقعیتی که یک دستگاه معادلات توصیف می‌کند، از پیش فرض می‌شود که یک دستگاه معادلات دارای یک جواب منحصر بفرد است؛ برای مثال، خواهیم دید که در یک شبکه الکتریکی شدت جریان‌ها از طریق حل یک چنین دستگاه معادلات خطی پیدا می‌شوند. روش حذفی گاوس - جردن مرتباً با حذف متغیرها از معادلات درگیر می‌باشد. در بخش بعدی این روش را به دستگاه‌های معادلات خطی کلی‌تری توسعه خواهیم داد.

برای توصیف کردن دستگاه‌های معادلات خطی از آرایه‌های مستطیلی از اعداد به نام ماتریس استفاده خواهیم کرد.

۱-۱-۱ تعریف. یک ماتریس عبارت است از آرایه‌ای مستطیلی از اعداد. اعداد واقع در آرایه‌ها درایه ماتریس نامیده می‌شوند.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند. برای مثال به ماتریس‌های زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 5 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

سطرها و ستون‌ها. ماتریس‌ها از سطرها و ستون‌هایی تشکیل شده‌اند. سطرها از بالای ماتریس و ستون‌ها از سمت چپ شماره‌گذاری می‌شوند. ماتریس زیر دارای دو سطر و سه ستون می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

سطرها عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

سطر ۱ سطر ۲

ستون‌ها عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ستون ۱ ستون ۲ ستون ۳

زیرماتریس. یک زیرماتریس از یک ماتریس مفروض، یک آرایه به دست آمده از حذف سطرها و ستون‌های مشخصی از آن ماتریس می‌باشد. برای نمونه، ماتریس A در زیر را در نظر بگیرید. ماتریس‌های P ، Q ، و R زیرماتریس‌های A هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس A زیرماتریس‌های A

اندازه و نوع. اندازه‌ی یک ماتریس با مشخص کردن تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس تعیین می‌شود. برای مثال، ماتریسی با دو سطر و سه ستون را یک ماتریس 2×3 می‌نامند؛ عدد اول تعداد سطرها و عدد دوم تعداد ستون‌ها را بیان می‌کند. زمانی که تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها با هم برابر باشند، ماتریس را یک ماتریس مربعی می‌نامند. ماتریسی که تنها یک سطر دارد، ماتریس سطری نامیده می‌شود. ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد یک ماتریس ستونی نام دارد.

۱-۱-۲ مثال. به ماتریس‌های زیر با اندازه‌ها و نوع‌های داده شده توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس 2×3 ماتریس مربعی 3×3 ماتریس سطری 1×4 ماتریس ستونی 3×1

مکان. مکان یک درایه در یک ماتریس با داشتن سطر و ستونی که آن عنصر در آن قرار گرفته مشخص می‌شود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

درایه ۲- در سطر ۱، ستون ۲ قرار گرفته است. می‌گوئیم این درایه در مکان (۱، ۲) قرار دارد. درایه‌ای که در مکان (۲، ۳) قرار دارد، ۵ است. توجه کنید که بنابه قرارداد ابتدا سطری که عنصر در آن قرار دارد را می‌آوریم و سپس ستون را.

ماتریس‌های همانی. یک ماتریس همانی، ماتریسی مربعی با قطر ۱ در مکان‌های (۱، ۱)، (۲، ۲) و (۳، ۳) و غیره و صفر در بقیه جاها می‌باشد. ماتریس همانی $n \times n$ را با نماد I_n نشان می‌دهیم.

۳-۱-۱ مثال. ماتریس‌های زیر همانی هستند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اینک بحث روی دستگاه‌های معادلات خطی را ادامه می‌دهیم. از ماتریس‌ها برای توصیف دستگاه‌های معادلات خطی استفاده می‌کنیم. در رابطه با هر دستگاه معادلات خطی دو ماتریس مهم وجود دارند: ضرایب متغیرها تشکیل ماتریسی می‌دهد که آن را ماتریس ضرایب دستگاه می‌نامند. ضرایب، به همراه جملات ثابت، تشکیل ماتریسی به نام ماتریس افزوده دستگاه می‌دهد.

۴-۱-۱ مثال. ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌ی دستگاه معادلات خطی زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ \text{ماتریس ضرایب} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \\ \text{ماتریس افزوده} \end{array}$$

توجه کنید که ماتریس ضرایب یک زیرماتریس از ماتریس افزوده است. ماتریس افزوده کاملاً دستگاه را توصیف می‌کند.

تبدیلاتی که تبدیلات مقدماتی نامیده می‌شوند می‌توانند یک دستگاه معادلات خطی را به دستگاه معادلات خطی دیگری با جواب یکسان تبدیل کنند. این تبدیلات برای حل دستگاه‌های معادلات خطی با حذف متغیرها به کار برده می‌شوند. در عمل کار کردن برحسب ماتریس‌هایی ساده‌تر است که با تبدیلات خطی معادل به نام اعمال سطری مقدماتی به دست می‌آیند. در هر مرحله نیازی به نوشتن متغیرهای

x_1, x_2, x_3 نمی‌باشد. دستگاه‌های معادلات خطی اغلب با رایانه‌ها برحسب چنین ماتریس‌هایی توصیف و انجام می‌پذیرند. این تبدیلات به شرح زیر می‌باشند.

تبدیلات مقدماتی	اعمال سطری مقدماتی
-----------------	--------------------

۱. تعویض دو معادله	۱. تعویض دو سطر یک ماتریس
--------------------	---------------------------

۲. ضرب دو طرف یک معادله در یک عدد ثابت ناصفر	۲. ضرب درایه‌های یک سطر در یک عدد ثابت ناصفر
--	--

۳. افزودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر	۳. افزودن مضربی از درایه‌های یک سطر به درایه‌های متناظر سطر دیگر
---	--

تبدیلات مقدماتی جواب‌ها را حفظ می‌کنند زیرا ترتیب معادلات روی جواب اثر نمی‌گذارد، ضرب یک معادله در یک عدد ثابت ناصفر، تغییری در یک تساوی ایجاد نمی‌کند، و جمع یک مقدار مساوی به طرفین یک تساوی نیز یک تساوی به دست می‌دهد.

دستگاه‌های معادلاتی که مربوط به تبدیلات مقدماتی می‌شوند، و لذا دارای جواب‌های یکسان هستند، دستگاه‌های هم‌ارز نامیده می‌شوند. نماد $\approx$ را برای نشان دادن دستگاه‌های معادلات هم‌ارز به کار می‌بریم. در روش حذفی گاوس - جردن از تبدیلات مقدماتی برای حذف متغیرها استفاده می‌شود. از آنجا که هر دستگاه معادلات جدید دارای جواب یکسان با دستگاه اولیه می‌باشد، می‌توانیم این روش را به کار گیریم. روش حذفی گاوس - جردن را با به کار بردن معادلات و ماتریس متشابه در مثال زیر ملاحظه خواهیم کرد. خواننده می‌بایست به روش اصولی که در آن متغیرها در معادلات ستون چپ حذف می‌گردند، دقت کند. هم‌زمان ملاحظه شود که چگونه برحسب ماتریس‌های ستون راست با ایجاد کردن صفر در مکان‌های معین انجام می‌گیرد و از آن به بعد از ماتریس به دست آمده استفاده می‌کنیم.

۵-۱-۱ مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$$

حل.

روش معادله‌ای	روش ماتریس متشابه
دستگاه ابتدایی:	ماتریس متشابه:
$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$
x_1 از معادلات دوم و سوم را حذف کنید:	صفر در ستون ۱ ایجاد کنید:
$\begin{aligned} &\approx \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ Eq2 + (-2)Eq1 \quad x_2 - x_3 &= -1 \\ Eq3 + (-1)Eq1 \quad -2x_2 - 3x_3 &= -8 \end{aligned} \end{aligned}$	$\approx \begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix} \\ R2 + (-2)R1 \\ R3 + (-1)R1 \end{aligned}$
x_2 از معادلات اول و سوم را حذف کنید:	صف‌های مناسب دو ستون ۲ ایجاد کنید:
$\begin{aligned} &\approx \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ Eq1 + (-1)Eq2 \quad x_2 - x_3 &= -1 \\ Eq3 + (2)Eq2 \quad -5x_3 &= -10 \end{aligned} \end{aligned}$	$\approx \begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \\ R1 + (-1)R2 \\ R3 + (2)R2 \end{aligned}$
ضریب x_3 در معادله‌ی سوم را ۱ کنید:	عنصر (۳,۳) را ۱ کنید:
$\begin{aligned} &\approx \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ (-\frac{1}{5})Eq3 \quad x_3 &= 2 \end{aligned} \end{aligned}$	$\approx \begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ (-\frac{1}{5})R3 \end{aligned}$
x_3 را از معادلات اول و دوم حذف کنید:	در ستون ۳ صفر ایجاد کنید:
$\begin{aligned} &\approx \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ Eq1 + (-2)Eq3 \quad x_2 &= 1 \\ Eq2 + Eq3 \quad x_3 &= 2 \end{aligned} \end{aligned}$	$\approx \begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ R1 + (-2)R3 \\ R2 + R3 \end{aligned}$
جواب عبارت است از:	این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است:
$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_1 &= -1, x_2 = 1, x_3 = 2 \end{aligned}$
	جواب عبارت است از:
	$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$

از نظر هندسی، هر یک از معادلات ابتدایی در این مثال نمایانگر یک صفحه در فضای سه-بعدی است. این که یک جواب منحصر بفرد وجود دارد به این معناست که این سه صفحه در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. جواب $(-۱, ۱, ۲)$ مؤلفه‌های این نقطه‌ی مشترک را نشان می‌دهد. مثال دیگری از این روش می‌آوریم تا این روش را به خوبی یاد بگیرید.

۶-۱-۱ مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 18$$

$$-x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کنید و از اولین سطر برای ایجاد صفر در اولین ستون استفاده نمایید. (این کار متناظر با استفاده‌ی اولین معادله برای حذف x_1 از دومین و سومین معادلات می‌باشد.)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R2 + (-2)R1 \\ R3 + R1 \end{array}$$

سپس، سطر ۲ را در $\frac{1}{3}$ ضرب کنید تا عنصر $(3, 3)$ را ۱ نمایید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب x_2 در معادله‌ی دوم به ۱ است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (\frac{1}{3})R2 \\ \end{array}$$

در ستون دوم به صورت زیر صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادله‌ی دوم برای حذف x_2 از معادلات اول و سوم است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R1 + (-2)R2 \\ R3 + (-1)R2 \end{array}$$

سطر ۳ را در $\frac{1}{7}$ ضرب کنید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب x_3 در معادله سوم به ۱ است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$(\frac{1}{7})R_3$

در آخر، در ستون سوم صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادله سوم برای حذف x_3 از معادلات اول و دوم است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_1 + (-2)R_3$
 $R_2 + R_3$

این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است.

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 3$$

جواب عبارت است از $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$.

روش گاوس - جردن برای حل دستگاه معادلات خطی به کمک ماتریس‌ها با ایجاد کردن اعداد ۱ و ۰ در مکان‌های معینی از ماتریس‌ها درگیر است. این اعداد به یک روش اصولی ستون به ستون ایجاد می‌شوند. مثال زیر نشان می‌دهد که گاهی لازم است دو سطر را در مرحله‌ای، به منظور پیشروی در روش فوق، با هم عوض کرد.

۷-۱-۱ مثال. دستگاه زیر را حل کنید.

$$4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 44$$

$$3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 32$$

$$-2x_1 - x_2 = -7$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کرده و به صورت زیر پیش می‌رویم. (توجه شود که در ماتریس افزوده از صفر به عنوان ضریب متغیر x_3 در معادله سوم که وجود ندارد، استفاده می‌کنیم).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \end{bmatrix} \\ &\quad R_2 + (-3)R_1 \\ &\quad R_3 + 2R_1 \end{aligned}$$

در این مرحله به عنصری ناصفر در مکان $(2, 2)$ نیاز داریم تا بتوانیم ادامه دهیم. برای به دست آوردن چنین عنصری، سطر دوم را با سطر سوم (یک سطر عقب‌تر) عوض کرده و سپس پیش می‌رویم.

$$\begin{aligned} R_2 \longleftrightarrow R_3 &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\quad (\frac{1}{3})R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 + (-2)R_2 &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\quad R_1 + (-1)R_3 \\ &\quad R_2 + 2R_3 \end{aligned}$$

جواب عبارت است از: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

اکنون روش گاوس - جردن را برای حل یک دستگاه n معادله n مجهول که دارای یک جواب منحصر بفرد است، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. ماتریس افزوده از یک ماتریس ضرایب A و یک ماتریس ستونی از جملات ثابت B بوجود می‌آید. از نماد $[A : B]$ برای نمایش این ماتریس استفاده می‌کنیم. از عملیات سطری استفاده کنید تا به تدریج این ماتریس را ستون به ستون، به یک ماتریس به فرم $[I_n : X]$ تبدیل کنید، که در آن I_n ماتریس $n \times n$ همانی است.

$$[A : B] \approx \dots \approx [I_n : X]$$

این ماتریس آخری $[I_n : X]$ را فرم پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس افزوده ابتدایی می‌نامند. ماتریس ضرایب دستگاه معادلات آخری I_n و X ماتریس ستونی جملات ثابت است. در نتیجه عناصر X جواب

منحصر بفرد دستگاه هستند. ملاحظه کنید که در حین تبدیل $[A : B]$ به $[I_n : X]$ ، ماتریس A به I_n تغییر می‌کند. بنابراین

«اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه n معادله n مجهول باشد که دارای جواب منحصر بفرد است، آنگاه A با I_n هم‌ارز سطری است».

اگر به این روش $[A : B]$ به ماتریسی به شکل $[I_n : X]$ قابل تبدیل نباشد، آنگاه دستگاه معادلات یک جواب منحصر بفرد نخواهد داشت. در بخش بعدی درباره‌ی این چنین دستگاه‌هایی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۲-۱ دستگاه‌های بیشتر

کاربردهای مشخصی در رابطه با حل تعدادی از دستگاه معادلات خطی، که همگی دارای ماتریس مربع ضرایب یکسان A هستند وجود دارد. فرض کنید دستگاه‌ها عبارتند از:

$$[A : B_1], [A : B_2], \dots, [A : B_k].$$

جملات ثابت $B_1, B_2, \dots, B_k$ ممکن است، برای مثال، داده‌های آزمایشی باشند، که می‌خواهیم بدانیم جواب‌هایی که ممکن است منجر به چنین نتایجی شده باشند، چیست؟ غالباً وضعیت ایجاب می‌کند که جواب‌ها منحصر بفرد باشند. اگر برای هر دستگاه روش گاوس - جردن انجام شود و هر دستگاه به طور مستقل حل گردد، روند کار منجر به فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ای به صورت زیر خواهد شد:

$$[I_n : X_1], [I_n : X_2], \dots, [I_n : X_k]$$

و جواب‌ها $X_1, X_2, \dots, X_k$ خواهند بود. به هر حال، مشابه تبدیل A به I_n برای هر دستگاه تکرار می‌گردد، این کار منجر به انجام تعداد زیادی کار تکراری غیر لزوم می‌شود. دستگاه‌ها می‌توانند با یک ماتریس افزوده‌ی بزرگ به صورت $[A : B_1, B_2, \dots, B_k]$ نمایش داده شوند، و روش گاوس - جردن می‌تواند برای این یک ماتریس به کار گرفته شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$[A : B_1, B_2, \dots, B_k] \approx \dots \approx [I_n : X_1, X_2, \dots, X_k]$$

که از آنجا جواب‌ها عبارت خواهند بود از: $X_1, X_2, \dots, X_k$.

۱-۲-۱ مثال. سه دستگاه معادلات خطی زیر را، که تمامی آنها دارای یک ماتریس ضرایب هستند، حل کنید.

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = b_2$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = b_3$$

$$\text{به‌ازای } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ به ترتیب برابر با } \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

حل. ابتدا ماتریس افزوده بزرگی که هر سه دستگاه را مشخص می‌کند، بسازید و فرم پلکانی تحویل یافته را به صورت زیر به دست آورید.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 2 & -4 \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &\quad R2 + (-2)R1 \\ &\quad R3 + R1 \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\quad R1 + R2 \\ &\quad R3 + (-1)R2 \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\quad R1 + (-1)R3 \\ &\quad R2 + 2R3 \end{aligned}$$

جواب‌های سه دستگاه معادلات، در سه ستون فرم پلکانی تحویل یافته داده شده است. آنها عبارتند از:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

در این بخش بحث خود را به دستگاه‌های n معادله‌ی خطی n مجهول، که یک جواب منحصر بفرد دارند محدود می‌کنیم. در بخش بعدی روش حذفی گاوس - جردن را به منظور راه دادن به دیگر دستگاه‌هایی که دارای یک جواب منحصر بفردند توسعه خواهیم داد. همچنین با این کار دستگاه‌هایی که دارای جواب‌های بسیار یا بدون جواب هستند نیز مشمول این روش خواهند شد.

۳-۱ تمرین

(۱) اندازه ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ه)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (و)}$$

(۲) درایه‌هایی که در مکان $(1, 2)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 3)$ ، $(1, 5)$ ، $(2, 4)$ و $(3, 2)$ در ماتریس زیر قرار دارند را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & -7 & 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

(۳) عناصر $(2, 3)$ ، $(3, 2)$ ، $(4, 1)$ ، $(1, 3)$ ، $(4, 4)$ و $(3, 1)$ از ماتریس زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(۴) ماتریس همانی I_4 را بنویسید.

(۵) ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌ی هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.

$$-3x_1 + 4x_2 = 7 \quad \text{(الف)}$$

$$-2x_1 - 5x_2 = -2$$