



مبانی هندسه

(رشته ریاضی)

دکتر محمد جلوداری ممقانی دکتر محمد مهدی ابراهیمی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

پیشگفتار.....	هفت
تاریخچه.....	چهارده
فصل اول. هندسه اقلیدسی مسطحه.....	۱
فصل دوم. تبدیل آفین در صفحهٔ اقلیدسی.....	۶۱
فصل سوم. گروه‌های متناهی ایزومتری‌های E^2	۱۱۹
فصل چهارم. هندسه کره.....	۱۴۱
فصل پنجم. صفحه تصویری.....	۲۰۹
فصل ششم. هندسه طولی در P^2	۲۵۵
فصل هفتم. صفحه هذلولوی.....	۲۷۵
پیوست‌ها.....	۳۵۵
پیوست (الف). روش اصل موضوعی.....	۳۵۵
پیوست (ب). مجموعه و تابع.....	۳۵۹
پیوست (پ). گروه.....	۳۶۳
پیوست (ت). جبر خطی.....	۳۶۷
پیوست (ث). اثبات قضیه ۲-۲.....	۳۸۰
پیوست ج. توابع مثلثاتی و هذلولی.....	۳۸۴
منابع.....	۳۹۱

پیشگفتار

این کتاب، ترجمه و اقتباسی از کتاب

Patrick J. Ryan, Euclidean and Non-euclidean geometry, An Analytic Approach, Cambridge university press, 1987.

است، که در ۱۳۶۹ توسط آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی و اینجانب به فارسی درآمد و در مدار انتشارات دانشگاه پیام نور قرار گرفت. از آن زمان تاکنون کتاب حداقل هشت بار تجدید چاپ شده است. در همان چاپ اول مترجمین برهان بسیاری از قضیه‌های اثبات نشده را به متن اضافه و مطالبی هم برای روشن‌تر کردن مفاهیم به آن افزودند. یکی از نتایج این کار کاسته شدن چشمگیر تمرین‌ها در انتهای فصل‌ها بود. این چاپ علاوه بر اینکه ویرایشی کامل از چاپ‌های قبلی است، شامل بخشی موسوم به «تاریخچه» است که لازمه هر کتاب هندسه مقدماتی است.

یکی از هدف‌های اصلی درس مبانی هندسه، معرفی و مطالعه انواع هندسه‌هاست.

هندسه‌های اقلیدسی، هذلولوی، کروی و تصویری از جمله این هندسه‌ها هستند.

هندسه اقلیدس و به تبع آن هندسه اقلیدسی به لحاظ تاریخی قدیمی‌ترین این هندسه‌ها و مبنایی برای مطالعه همه آنهاست. هندسه اقلیدس مطالب مربوط به مقاله‌های I تا XIII کتاب اصول اقلیدس را در بر می‌گیرد [۳۹]. یک هندسه اقلیدسی هندسه‌ای است که از تکمیل اصول هندسه اقلیدس به وجود آمده است. مثلاً هندسه‌ای که براساس اصول هیلبرت به وجود می‌آید، یک هندسه اقلیدسی است. نظر بسیاری از هندسه‌دانان بر این است که هندسه هیلبرت نزدیک‌ترین هندسه‌های اقلیدسی به هندسه اقلیدس است. می‌توان اصول اقلیدس را به صورت دیگری تکمیل کرد و به

هندسه اقلیدسی دیگری دست یافت. بنابراین هندسه‌های اقلیدسی به ظاهر متفاوتی وجود دارند. اما، می‌توان ثابت کرد که دو هندسه مسطحه اقلیدسی، یا دو هندسه فضایی اقلیدسی یا دو هندسه اقلیدسی با ابعاد یکسان یکریخت‌اند. بنابراین در هر بعدی اساساً یک هندسه اقلیدسی وجود دارد.

هندسه اقلیدسی را می‌توان اساساً به دو روش ارائه نمود، کلاسیک و مدرن. آموزش کلاسیک هندسه ریشه در تاریخ آموزش ریاضیات در ایران دارد و دامنه آن تا به امروز نیز گسترده شده است به طوری که کتاب‌های هندسه (۱) [۴۰] و هندسه (۲) [۴۱] دوره دبیرستان با همین روش، تقریباً تمام هندسه اقلیدس را که ۲۳۰۰ سال قدمت دارد، به دانش‌آموزان آموزش می‌دهند. استدلال‌ها در این روش صرفاً استنتاجی‌اند و اثبات‌های غیرهندسی در آنها جایی ندارند. بنابراین با این روش دانشجو احساس می‌کند که «استدلال واقعی» صورت می‌پذیرد و این یکی از مزایای روش کلاسیک است.

مسلمانان سازندگان بناهای باشکوهی چون مسجد شیخ لطف‌الله، گنبد سلطانیه، مسیل اردکان، ایل گولی تبریز، طراحان نقشه‌های هندسی فرش‌ها، خراطان درب‌ها و پنجره‌ها با نقش‌های هندسی متنوع، کاشیکاران مبتکر و... هدف‌های این آموزش را به خوبی دریافته‌اند و نمودهایی از آن را در زندگی اجتماعی ایرانیان به نحو چشمگیری وارد کرده‌اند.

تابع مفهومی است که می‌تواند حرکت را توصیف نماید. بنابراین اگر الگویی از هندسه‌ای بنا کنیم که برخی از اصول آن مبتنی بر این مفهوم باشند، خواه‌ناخواه در هندسه مفهوم حرکت را وارد کرده‌ایم. اگر الگوی حاصل معرف یک هندسه اقلیدسی باشد، با این کار یکی از نقایص هندسه اقلیدس را نیز برطرف نموده‌ایم. (در هندسه اقلیدس از حرکت استفاده می‌شود ولی اقلیدس اصولی برای آن در نظر نمی‌گیرد. مثلاً مثلث را بدون این که از صفحه بلند کند، در صفحه می‌لغزاند و بر یک مثلث دیگر منطبق می‌کند). از آنجاکه برخی ویژگی‌های توابع در جبر (مثلاً در نظریه گروه) و برخی از آنها در آنالیز مورد مطالعه قرار می‌گیرند، این الگوی هندسی رابطه نزدیکی با

شاخه‌های مذکور ایجاد می‌کند. این بدان معناست که دستاوردهای هریک از شاخه‌های هندسه، جبر و آنالیز را می‌توانیم در پیشبرد دوتای دیگر نیز به کار ببریم.

به علاوه در این الگو، محاسباتی صورت می‌گیرد که در الگوی اقلیدس جایی برای این محاسبات وجود ندارد. یکی از نتایج بسیار عمیق رویکرد محاسباتی به هندسه، ایجاد رابطه‌ای مستحکم با کامپیوتر و گرافیک کامپیوتری و لذا گشایش بازارهای کار جدید به روی دانش‌آموختگان هندسه خواهد بود. دیگر با این نگرش دانش‌آموخته هندسه لزوماً نباید پا در جای پای اسلاف خود بگذارد، وی حتی می‌تواند برای دیگران کارآفرینی کند.

مطالعه الگوهای هندسی مبتنی بر توابع همه روزه ابعاد وسیع‌تری به‌خود می‌گیرد. تاجایی‌که در چند سال اخیر دامنه این مطالعات نظریه‌های ترکیبیات و نظریه محاسبه را نیز در بر گرفته است.

دکارت با پذیرش وجود نقاط، خطوط، منحنی‌ها و صفحه‌ها در هندسه اقلیدس مختصات و معادلات را برای مطالعه آسان‌تر آنها ابداع نمود. به این ترتیب می‌توان گفت که دکارت اولین ریاضیدانی بود که مجموعه‌ها را وارد هندسه کرد.

این مطالعه هنگامی جایگاه واقعی خود را پیدا کرد که ریاضیدان معروف فلیکس کلاین طی سخنرانی ۱۸۷۰ که به مناسبت ارتقاء به مقام استادی دانشگاه ارلانگن ایراد نمود، تعریف جدیدی از هندسه اعلام کرد. بنابراین تعریف هندسه عبارت است از فضایی متریک همراه با زیرمجموعه‌هایی خاص و خانواده‌ای از ایزومتري‌های آن فضا که در شرایط خاصی صدق می‌کنند. به این ترتیب بنیهای هندسه جدید ایجاد می‌شود و هندسه‌های شناخته شده قبلی بخشی کوچک از علوم هندسه را شامل می‌شوند.

هم‌اکنون روش کلاین برای ارائه یک درس مبانی هندسه در دانشگاه‌های معتبر سراسر دنیا روش جا افتاده‌ای است و بخشی از این درس به یادآوری هندسه اقلیدس اختصاص دارد.

این کتاب نیز مبانی هندسه‌های اقلیدسی (دو بعدی)، هذلولوی (دو بعدی)، کروی،

تصویری و... را به روش مدرن (تعریف کلاین از هندسه) ارائه می‌دهد. برای این کار با تعریف مفهوم فاصله (متریک) روی مجموعه‌های شناخته شده آشنا، آنها را به فضاهای متریک و سرانجام به الگویی برای هندسه موردنظر تبدیل می‌کند. سپس تعاریف و قضیه‌های هندسه موردنظر را در این الگو بررسی می‌نماید.

خوشبختانه دانشجویان با مفاهیم موردنیاز این درس بقدر کافی آشنا هستند. با این حال در پیوست‌های کتاب مفاهیمی از نظریه گروه، جبر خطی و حسابان که احتمالاً دانشجویان با آنها آشنایی کمتری دارند، بیان شده است.

مطالب این کتاب در ۷ فصل و ۴ پیوست تدوین شده است. به طوری که ملاحظه خواهید کرد، برای خواندن کتاب دانستن جبر خطی و جبر مقدماتی ضروری است بنابراین در این درس موقعی باید ثبت نام کنید که این درس‌ها را گذرانده‌اید.

کتاب با بررسی کاملی از هندسه مسطحه اقلیدسی آغاز می‌شود. در این فصل الگوی مطالعه هندسه‌های غیراقلیدسی را پایه‌ریزی می‌کنیم. نقطه، خط، انعکاس و فاصله را تعریف می‌کنیم. مسائل مربوط به توازی، تعامد و تقارن را بررسی می‌کنیم. ایزومتري‌ها را طبقه‌بندی کرده و ساختار گروه ایزومتري‌ها را تعیین می‌کنیم.

دانشجو با بسیاری از حقایق هندسه اقلیدسی قبلاً در دبیرستان آشنا شده است. با این حال این چارچوب را می‌توان برای بررسی هندسه‌های تصویری و هذلولوی مسطحه به کار برد. نتایج حاصل زیبا و گاهی اعجاب‌انگیزند.

اگرچه کتاب به مطالعه هندسه‌های مسطحه دو بعدی محدود شده است، به آسانی می‌توان با استفاده از این دیدگاه هندسه‌های اقلیدسی، بیضوی و هذلولوی فضاهای با ابعاد بالاتر را مورد بررسی قرار داد. امیدواریم که روش‌ها و الگوهای فکری توسعه یافته در این کتاب برای کسانی که بخواهند در این زمینه کار کنند مفید واقع شود.

در پایان، از خوانندگان محترم استدعا دارد که کاستی‌های کتاب را به گروه ریاضی دانشگاه پیام نور منعکس نمایند، تا در چاپ بعدی منظور شوند و به این وسیله در ارتقاء علمی و فنی کتاب سهیم شوند.

از گروه ریاضی دانشگاه پیام‌نور و کارشناس این گروه، خانم خرمی که با پیگیری‌های خود موجبات تجدید نظر در این کتاب را فراهم نمودند، سپاسگزارم. همچنین از دست‌اندرکاران مرکز چاپ و انتشارات این دانشگاه که با سعه صدر کار تولید متن اصلاح شده و چاپ آن را به سامان رساندند، به ویژه از حاج آقا قاسم حمزه‌ای (رئیس) و آقای محمدباقر اکبری صمیمانه تشکر می‌کنم و برای آنان و همکارانشان آرزوی موفقیت روزافزون دارم.

محمد جلوداری ممقانی

دانشگاه علامه طباطبائی

تابستان ۹۲

هدف‌های کلی

هدف این کتاب آشنا نمودن اجمالی دانشجویان با هندسه‌های گوناگون است. دانشجویان پس از مطالعه این کتاب نقشه‌ای روشن از پیشرفت‌های هندسه را در طی قرون و اعصار در ذهن خود خواهند داشت و رابطه آن را با علوم جدید از جمله نظریه گروه‌ها، جبر خطی و نسبیت درک خواهند کرد.

توصیه‌های مهم

۱. پس از گذراندن درس‌های مبانی جبر و جبر خطی در این درس ثبت نام کنید.
۲. کشیدن شکل برای یادگیری هندسه بسیار مهم است. شکل بکشید.
۳. ترتیب را در مطالعه مراعات کنید.
۴. فصل ۳ خارج از هدف‌های این درس است می‌توانید از مطالعه آن صرف‌نظر کنید.

هدف‌های رفتاری

- پس از مطالعه این کتاب باید بتوانید:
۱. مباحث کلی هندسه‌های دو بعدی را شرح دهید.
 ۲. مفاهیم ضرب برداری و ضرب داخلی را در هندسه به کار ببرید.
 ۳. معادله پارامتری خط را بنویسید و با استفاده از آن دسته خطوط موازی و هم‌مرس را شناسایی کنید.
 ۴. زاویه‌ها را تعریف کنید و قابلیت انطباق آنها را بیان کنید.
 ۵. قضیه‌های قابلیت انطباق را در مورد مثلث‌ها بیان و ثابت کنید.
 ۶. اصول هندسه آفین و تفاوت آن با هندسه اقلیدسی را بیان کنید.
 ۷. برخی اشکالات تعاریف مفاهیم نقطه، خط،... را بیان کنید.
 ۸. انعکاس را تعریف و ترکیبات آن را شناسایی کنید.
 ۹. نیم‌دور، انتقال و لغزه را تعریف کنید و قضیه‌های مربوط به آنها را بیان و ثابت کنید.
 ۱۰. قضیه سه انعکاس را بیان و ثابت کنید.
 ۱۱. تقارن‌های پیکره‌های مختلف در صفحه را تعریف کنید. گروه‌های تقارن پیکره‌های معروف را شناسایی کنید.

۱۲. ایزومتري‌های صفحه آفین را تعريف كنيد و رابطه آن را با تبديلات صفحه بيان كنيد.
۱۳. گروه‌های تقارن‌های پیکره‌های مختلف را در صفحه شناسایی كنيد.
۱۴. چندضلعی‌ها و گروه‌های تقارن آنها را شناسایی كنيد.
۱۵. گروه‌های خطی عام، خطی خاص و متعامد را شناسایی كنيد و رابطه هریک از آنها را با تقارن‌های صفحه آفین بيان كنيد.
۱۶. مكمل آفین يك پیکره را ترسيم و از آن برای شناسایی گروه متقارن پیکره استفاده كنيد. حال اصطلاح صفحه آفین را به صفحه تصوير، کره دو بعدی و صفحه هذلولوی تبديل و باز هم به تمام سؤال‌های فوق پاسخ دهيد. ممكن است برخی سؤال‌ها جوابی قانع‌کننده نداشته باشند. مثلاً در هندسه کروی خطوط موازی وجود ندارند و يا در هندسه هذلولوی دو نوع خطوط موازی وجود دارند. سؤال‌های متناسب با آنها را طرح و پاسخ دهيد.
- به ویژه در این هندسه‌ها به سؤالات زیر پاسخ دهيد.
۱۷. مفاهيم، تعامد و توازی را در هندسه هذلولوی (صفحه تصوير، هندسه کروی) بيان كنيد و آنها را به كار ببريد.
۱۸. گروه‌های تقارن پیکره‌هایی مانند نقطه، خط، مثلث و... را در هندسه هذلولوی شناسایی كنيد.
۱۹. انواع دسته خطوط را در هندسه هذلولوی (صفحه تصوير، هندسه کروی) شناسایی كنيد. قضیه‌ای درمورد وجود خط مشترك بين دو دسته خطوط بيان و ثابت كنيد.
۲۰. انواع مثلث‌های هذلولوی (تصویری، کروی) را شناسایی كنيد.
۲۱. قانون‌های کسینوس‌ها و سینوس‌ها را در هندسه هذلولوی (کروی) بيان و ثابت كنيد.
۲۲. وجود چندضلعی‌های منتظم را در هندسه هذلولوی (هندسه کروی) بيان و ثابت كنيد.

محمد جلوداری ممقانی

دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخچه

هندسه دانشی است که آدمی پیوسته به موازات نیازهای خود بخش یا بخش‌هایی از آن را کشف، فرمول‌بندی و مورد استفاده قرار می‌دهد. مثلاً در دوران باستان که مسأله تقسیم زمین و اندازه‌گیری مساحت و محیط قطعات زمین‌های تقسیم شده اهمیت فراوانی داشت، هندسه‌دانان و مهندسين ابزارهای این کارها را به صورت نظری و عملی فراهم می‌کردند. توسعه شهرنشینی، دریانوردی، کوچ انسان‌ها و غیره خود به خود موجب توسعه نیاز انسان‌ها و لذا موجب توسعه دانش هندسه شده است. بنابراین هندسه که در آغاز نوع مسطحه آن معمول بوده است بدون از دست دادن اهمیت خود به هندسه فضایی توسعه یافته است.

با این دیدگاه می‌توان گفت که مبانی هندسه‌ای که در مناطق مختلف کره زمین در عهد باستان مورد استفاده قرار می‌گرفت درست مانند امروز کمابیش یکسان بوده است. با این حال آنچه که از آن عهد به دست رسیده است بیشتر نشانه‌های بابلی، مصری و به ویژه یونانی دارد. از معماری معبد زیگورات در شوش و آجرفرشهای محوطه آن معلوم می‌شود که ایلامیان و سومریان ۳۰۰۰ سال پیش از این نیز از دانش هندسی برخوردار بوده و آن را به کار برده‌اند.

با این حال این یونانیان بودند که با بهره‌مندی از قوانین کشورشان، میل به تفکر و تمایل به حفظ ارزش‌های حاصل از کار دانشمندان خود، هندسه را در برنامه‌های آموزشی خود وارد کردند و آن را در اختیار تمام هموطنان خود قرار دادند. لازمه این کار البته تنظیم و تدوین دانش هندسی موجود در کتاب یا کتاب‌ها بوده است. این کار عظیم را اقلیدس اسکندرانی، ریاضیدان و کتابدار کتابخانه بزرگ اسکندریه در ۲۳۰۰ سال پیش از این به انجام رساند.

بسیاری از مورخین علم بر این باورند که تالس از بنیان‌گذاران اولیه مطالعۀ هندسه بوده است. از شرح حال و زندگی وی اطلاع دقیقی در دست نیست ولی چنین روایت شده است که وی کسوف سال ۵۸۵ پیش از میلاد را پیشگویی کرده بود. از این رو می‌توان حدس زد که وی در قرن ششم قبل از میلاد می‌زیسته است.

اثودوکسوس که در قرن چهارم پیش از میلاد می‌زیسته است یکی از نخستین افرادی بود که قضیه‌های هندسه را در ساختاری منظم سازمان‌دهی کرد.

اقلیدس که کتابدار دانشگاه بزرگ شهر اسکندریه (اسکندریه فعلی در مصر) بود، با جمع‌آوری و تکمیل اطلاعات هندسی و حسابی زمان خود کتاب اصول [۳۹] را در ۱۳ مقاله به شرح زیر تنظیم کرد:

مقاله‌های ۱-۴ مربوط به هندسۀ مثلث‌ها و دایره‌ها

مقاله‌های ۵ و ۶ مربوط به تناسب‌های هندسی

مقاله‌های ۷-۹ نظریه اعداد

مقاله ۱۰ نظریه اعداد اصم

مقاله‌های ۱۱-۱۳ هندسۀ فضایی

این کتاب از چنان استحکامی برخوردار بود که به مدت بیش از ۲۰۰۰ سال کتاب درسی بلامنازع هندسه در سراسر دنیا بوده است. تیراژ آن از تمام کتاب‌های علمی که تاکنون منتشر شده‌اند، بیشتر است و از این رو در تمام اعصار بعد از پیدایش خود در دل و جان آدمی اثر گذاشته است. بنا به تعریف تمام آنچه را که در کتاب اصول تحت نام هندسه آورده شده است و یا به سیاق همین کتاب از مطالب آن نتیجه می‌شوند، هندسۀ اقلیدس می‌نامیم. بنابراین تعریف، هندسۀ اقلیدس الگویی از هندسه به روایت اقلیدس است.

اقلیدس ابتدا مفاهیمی که لازم دارد، مانند نقطه، خط، صفحه و غیره را تعریف می‌کند. سپس پنج اصل می‌آورد که به نظرش بسیار واضح‌اند و درستی آنها بدون اقامه دلیلی قابل قبول است. وی از این تعاریف و اصول نزدیک به ۵۰۰ قضیه یا گزاره هندسی

را استنتاج می‌کند. در بسیاری از موارد درستی این قضیه‌ها یا گزاره‌ها اصلاً روشن نبود و وی درستی آنها را با به کارگیری اصول منطق از اصول، تعاریف و قضیه‌های اثبات شده قبلی نتیجه گرفت.

اگرچه کتاب اقلیدس کتابی برای تمام زمان‌هاست، اما طبیعی است که با معیارهای کنونی ریاضیات کاستی‌هایی نیز دارد. نخست این‌که وی هر چیزی را با استفاده از مفاهیم بسیار معمولی تعریف می‌کند و بنابراین گاه به جای رفع ابهام موجب افزایش ابهام می‌شود. در این خصوص بهتر است به چند مثال زیر توجه کنیم.

نقطه آن است که جزیی ندارد. خط طولی بدون عرض است. خط راست خطی است که به نحوی هموار بر نقاط خودش قرار دارد. زاویه مستوی میل دو خط واقع در یک صفحه و ناواقع بر یک خط راست به هم است. وقتی خط راستی بر خط راست دیگری فرود آید، زاویه‌های مجاور برابر هم می‌سازد، هریک از این زاویه‌ها یک قائمه نامیده می‌شود.

ملاحظه می‌کنیم که در این تعاریف، مفاهیم طول، فاصله، شیب و فرود آمدن، تعریف نشده‌اند. اقلیدس به محض ارائه تعریف‌هایش آنها را بدون استفاده رها می‌کند و به جای آن از قوانینی استفاده می‌کند که ضمن پنج اصل خود و سایر اصولی که وی بدون اعلام آنها را پذیرفته است. پنج اصل اقلیدس عبارتند از:

I. از دو نقطه متمایز فقط یک خط می‌گذرد.

II. هر پاره‌خط جزئی از یک خط است.

III. به ازای هر نقطه و هر طول داده شده دایره‌ای به مرکز این نقطه و به شعاع این

طول وجود دارد.

IV. تمام زاویه‌های قائمه برابرند.

V. اگر خطی دو خط راست را قطع کند و مجموع زاویه‌های داخلی حاصل در

یک طرف آن کمتر از دو قائمه باشد، آنگاه این دو خط در طرفی از آن خط یکدیگر را قطع می‌کنند که مجموع زاویه‌های داخلی مذکور کمتر از دو قائمه است.

دوم آنکه اقلیدس نیازی به بیان اصل زیر با وجود استفاده از آن در اولین قضیه‌اش احساس نمی‌کند.

دو دایره که مجموع و تفاضل شعاع‌های آنها از فاصله بین مرکزهایشان کمتر است همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند.

طبیعی است که بپرسیم چرا اقلیدس پنج اصل خود را متمایز نموده و اعلام کرده است. ریاضیدان‌های پس از اقلیدس سعی کردند فرض‌هایی را که اقلیدس بیان آنها را فراموش کرده بود روشن کنند. در این میان اصل پنجم بیشتر جلب توجه می‌کرد. این اصل مشکل و از نظر شهودی جالب بود و ریاضیدان‌ها فکر می‌کردند که شاید نتیجه‌ای از فرض‌های دیگر اقلیدس باشد. «اثبات‌های» بسیاری برای اصل پنجم پیشنهاد شد. ولی این اثبات‌ها معمولاً فرض پنهانی در خود داشتند که معادل چیزی بود که باید اثبات می‌شد. سه شرط معادل از این نوع عبارتند از:

I. دو خط متقاطع نمی‌توانند با یک خط موازی باشند (پلیفیر).

II. فاصله خط‌های موازی ثابت است (پروکلس).

III. مجموع زاویه‌های یک مثلث دو قائمه است (لژاندر).

در میان ریاضیدانانی که به تکمیل اصول و تعاریف اقلیدس اقدام کردند و الگو یا الگوهایی از هندسه اقلیدسی ارائه دادند، داوید هیلبرت از چهره‌های برجسته قرن‌های نوزدهم، بیستم نیز قرار دارد.

هیلبرت بدون دست بردن در روح هندسه اقلیدس آن را به آرامی و لطافت تکمیل و ترمیم کرد. وی بعضی از مفاهیم آشنا را که تعریف کردن آنها جز افزایش ابهام ثمری نداشت، به عنوان مفاهیم اولیه و تعریف نشدنی پذیرفت. نقطه، خط و صفحه مفاهیم تعریف نشدنی هیلبرت‌اند. در الگوی هیلبرت از هندسه اقلیدسی، روابط بین این مفاهیم و سایر مفاهیم را دسته دیگری از مفاهیم تعریف نشدنی دیگر برقرار می‌کنند. این دسته مفاهیم عبارتند از وقوع (تعلق داشتن، واقع شدن بر، قرار داشتن بر)، میانبود، قابلیت انطباق، توازی و پیوستگی. هیلبرت کتاب «مبانی هندسه» خود را که حاوی مفاهیم،

تعاریف، اصول و قضایای الگوی هیلبرت از هندسه اقلیدسی است در ۱۸۹۹ به زبان آلمانی منتشر کرده است. هم‌اکنون ترجمه‌های فرانسوی و انگلیسی این اثر موجوداند. اصول حاکم بر الگوی هیلبرت از هندسه اقلیدسی به نقل از کتاب [۴۳] از این قراراند:

۱. اصول وقوع

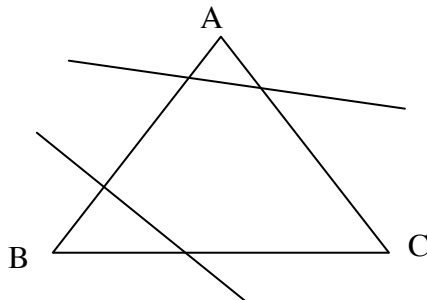
۱. الف) بر هر دو نقطه متمایز A و B فقط یک خط می‌گذرد.
۱. ب) به ازای هر خط l ، لااقل دو نقطه بر آن وجود دارند.
۱. پ) سه نقطه ناواقع بر یک خط وجود دارند.

۲. اصول میانبود

۲. الف) این‌که نقطه A بین دو نقطه B و C قرار دارد به این معناست که A ، B و C بر یک خط قرار دارند، متمایزند و A بین B و C نیز هست.
۲. ب) برخطی‌که از نقاط داده شده A و B می‌گذرد سه نقطه متمایز C ، D و E قرار دارند به طوری‌که

B بین C و D ، D بین A و B و A بین D و E است.

۲. پ) از هر سه نقطه واقع بر یک خط فقط یکی بین دوتای دیگر است.
۲. ت) هر چهار نقطه متمایز A ، B ، C و D واقع بر یک خط را همواره می‌توان چنان مرتب کرد که B بین A و C ، B بین A و D و C بین A ، D و نیز بین B و D باشد.
۲. ث) (اصل پاش) در مثلث ABC اگر خطی از نقطه‌ای بین A و B وارد مثلث شود و از هیچ‌یک از رأس‌های A ، B و C نگذرد، از نقطه‌ای بین A و C یا بین C و B از مثلث خارج می‌شود.



۳. اصل توازی هیلبرت

از نقطه دلخواه A واقع در خارج خط l فقط یک خط می‌گذرد که l را قطع نمی‌کند. می‌گوییم این خط، خطی است که از A می‌گذرد و با l موازی است.

۴. اصول قابلیت انطباق

۴. الف) به ازای هر دو نقطه A و B بر خط l و هر نقطه C واقع بر خط m، در یک طرف C بر m فقط یک نقطه چون D وجود دارد به طوری که AB (یا BA) بر پاره‌خط CD قابل انطباق است. این رابطه را با نوشتن $AB \equiv CD$ ابراز می‌کنیم. هر پاره‌خط بر خودش قابل انطباق است.

۴. ب) اگر $AB \equiv CD$ و $CD \equiv EF$ آن‌گاه $AB \equiv EF$

۴. پ) (جمع پاره‌خط‌ها) اگر AB و BC دو پاره‌خط بر یک خط باشند که تنها نقطه مشترک‌شان B است و نیز اگر $A'B'$ و $B'C'$ همین شرایط را داشته باشند به علاوه اگر $AB \equiv A'B'$ و $BC \equiv B'C'$ آن‌گاه $AC \equiv A'C'$.

۴. ت) فرض کنید زاویه ABC در صفحه π و خط l در صفحه دیگری چون π' داده شده باشد. به ازای دو نقطه B' و C' بر خط l تنها یک نقطه A' در یک طرف خط l وجود دارد به طوری که $\hat{ABC}$ و $\hat{A'B'C'}$ قابل انطباق‌اند.

در این صورت می‌نویسیم $\hat{A'B'C'} \approx \hat{ABC}$.

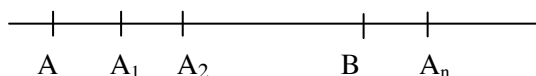
به عبارت دیگر هر زاویه را به هر جای دیگر صفحه می‌توان منتقل کرد.

۴. (ث) اگر زاویه‌های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داده شده باشند به طوری که $\hat{A} \approx \hat{B}$ و $\hat{B} \approx \hat{C}$ آن‌گاه $\hat{A} \approx \hat{C}$.

۴. (ج) اگر دو ضلع و زاویه از یک مثلث بر دو ضلع و زاویه از مثلثی دیگر قابل انطباق باشند آن دو مثلث قابل انطباق‌اند.

۵. اصل پیوستگی (اصل ارشمیدس)

۵. (الف) فرض کنید A و B دو نقطه دلخواه باشند و A_1 بین A و B باشد. دنباله نقاط $A_1, A_2, A_3, \dots$ را طوری انتخاب می‌کنیم که A_1 بین A و A_2, A_2 بین A_1 و A_3, A_3 بین A_2 و $A_4, \dots$ باشد. به علاوه فرض می‌کنیم پاره‌خط‌های $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ قابل انطباق می‌باشد. در این صورت A_n وجود دارد به طوری که B بین A و A_n است.



در ۱۷۶۳ گئورگ کلوگل طی رساله دکتری خود در گوتینگن کارهای مهم انجام شده برای اثبات اصل پنجم اقلیدس تا آن زمان را ارزیابی کرد. از ۲۸ اثباتی که وی بررسی کرد، هیچ‌کدام رضایت‌بخش نبود. یکی از اثبات‌های جالب توجه، متعلق به کشیشی یسوعی به نام ساکری (۱۷۳۳-۱۶۶۳) بود. ساکری فرض کرد که نقیض اصل پنجم اقلیدس درست است و به امید رسیدن به تناقض نتایجی منطقی به دست آورد. این نتایج به ظاهر بسیار عجیب بودند و او ادعا کرد که برخی از آنها با اصول دیگر اقلیدس ناسازگاراند. در واقع او نکته‌های بسیار مهمی را درباره چیزی که اکنون هندسه هذلولوی نامیده می‌شود، کشف کرده بود.

مسلماً گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) اولین ریاضیدانی بود که دریافت انتخاب نقیض اصل پنجم ممکن است هرگز به تناقض منجر نشود و وجود هندسه‌های دیگری که با هندسه اقلیدسی تفاوت دارند امکان‌پذیر است. این فکر چنان به نظرش انقلابی رسید که از

انتشارش صرفنظر کرد. در سال ۱۸۲۹ نوشت از «پاهوی کودکان» که در پشت سر اقلیدس سنگر گرفته‌اند هراسان است.

لباففسکی (۱۸۵۶-۱۷۹۳) و بولیایی (۱۸۶۰-۱۸۰۲) مستقلاً هندسه‌های سازگاری را کشف کردند که در عین حال اصل پنجم اقلیدسی را نفی می‌کردند. نوشته‌های آنان به ترتیب در سال‌های ۱۸۲۹ و ۱۸۳۲ انتشار یافتند. تجربه نشان داد که گاوس کودکان را دست بالا گرفته بود. آنها به این نظریه‌های جدید توجهی نکردند.

حدود ۴۰ سال بعد بلترامی (۱۹۰۰-۱۸۳۵) و کلاین (۱۹۲۵-۱۸۴۹) در داخل هندسه اقلیدسی الگوهایی از هندسه بولیایی و لباففسکی (اکنون به هندسه هذلولوی موسوم‌اند) پیدا کردند. بنابراین ثابت شد که اگر هندسه اقلیدس بدون تناقض باشد، هندسه هذلولوی نیز بدون تناقض است. چون هندسه هذلولوی در تمام فرض‌های هندسه اقلیدسی به جز اصل توازی صدق می‌کند، ثابت شد که اثبات این اصل غیرممکن است.

با این انشعاب هندسه به اقلیدسی و ناقلیدسی، طبقه‌بندی قضایا برحسب وابستگی آنها به اصل پنجم مفید واقع شد. هریک از قضیه‌های اقلیدس که در اثبات آنها از اصل پنجم استفاده نشده بود، قضیه‌ای در هندسه مطلق نامیده شد. این قضیه‌ها در هر دو هندسه اقلیدسی و هذلولوی معتبر بودند. در مقابل، قضیه‌های خاصی از هندسه اقلیدسی که به اصول I، II و IV بستگی دارند به هندسه آفین موسوم شدند. قضیه‌های مشترک هندسه‌های مطلق و آفین را قضیه‌های هندسه مرتب می‌نامند.

مسائل مناظر و مزایایی که هنرمندانی چون لئوناردو داوینچی (۱۵۱۹-۱۴۵۲) با آن مواجه بودند، ریاضیدان‌ها را بر آن داشت که به مطالعه افکنش مرکزی بپردازند. تصویری را که نقاش بر بوم نقاشی می‌کشد می‌توان افکنش شیئی اصلی به مرکز چشم نقاش روی بوم دانست. در این فرآیند، فاصله‌ها لزوماً تغییر می‌یابند و به مکان نسبی اشیایی که تصویر آنها رسم می‌شود بستگی دارند. آیا امکان دارد که ساختار هندسی

شیئی اصلی را از روی تصویر آن شناسایی کرد؟ این کار امکانپذیر است زیرا برخی ویژگی‌های هندسی تحت افکنش مرکزی تغییر نمی‌کنند. هندسه تصویری دانشی است که زاده این ملاحظات است. مبانی هندسه تصویری را پونسله (۱۸۶۷-۱۷۸۸) مهندس فرانسوی در سال ۱۸۱۳ هنگام اسارت در روسیه و موقعی که ممنوع‌المطالعه بود، بنیان نهاد. هندسه‌های آفین و تصویری نیز رابطه نزدیکی دارند، زیرا مطالعه ویژگی‌های اشکال که تحت افکنش موازی ناوردا می‌مانند نیز به هندسه آفین می‌انجامد. این ویژگی هندسه آفین را اوایلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) تشخیص داده بود.

چون پیشرفت هندسه همواره تحت تأثیر عدم وجود امکانات محاسباتی بود، ابداع هندسه تحلیلی توسط دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶) به پیدایش روش‌های جدیدی برای حل مسائل کمک شایانی کرد. مثلاً، هندسه تحلیلی بررسی ساده‌ای از نظریه مقاطع مخروطی را امکان‌پذیر ساخت، که قبلاً بسیار پیچیده بود. از زمان دکارت تاکنون استفاده از روش‌های تحلیلی مفید واقع شده است زیرا این روش‌ها امکان استفاده از پیشرفت‌های جدید در جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال را برای هندسه‌دانها فراهم کرده‌اند.

دامنه هندسه توسط ریمان (۱۸۶۶-۱۸۲۶) بسیار توسعه یافت. وی تشخیص داد که رویه‌ها نمونه‌های بسیاری از هندسه‌های جدید را ارائه می‌دهد. خم واقع بر یک رویه را یک خط می‌نامیم اگر هر قطعه کوچکی از آن کوتاه‌ترین خم واصل بین نقاط انتهایی‌اش باشد. در این صورت اگر مثلاً این رویه کره باشد، دایره‌های عظیمه خط هستند. در این هندسه که به هندسه بیضوی موسوم است قضیه‌های زیر معتبراند:

I. هر جفت از خطوط دو نقطه تلاقی دارند. این نقاط متقاطر هستند یعنی، نقاط انتهایی یک قطر هستند.

II. از هر جفت از نقاط نامتقاطر فقط یک خط می‌گذرد. خطوط بسیاری از دو نقطه متقاطر می‌گذرند.

III. مجموع زاویه‌های یک مثلث بیشتر از π است. مثلی با مجموع زاویه‌های سه قائمه وجود دارد.

ریمان و شلفلی (۱۸۹۵-۱۸۱۴) فضاهاى اقلیدسى و كروى با ابعاد بالاتر را مورد مطالعه قرار دادند. ریمان در سخنرانى افتتاحیه معروف خود در سال ۱۸۵۴ در گوتینگن مبانى هندسه‌اى را براى مطالعه فضاهاى با بعد دلخواه پایه‌گذارى كرد كه اکنون به **منیفره‌هاى ریمانى** معروف هستند. این فضاها موضوع‌هاى اصلى مطالعه در هندسه دیفرانسیل هستند. به طوری‌كه از این اسم برمی‌آید، روش‌هاى این هندسه به حساب دیفرانسیل و انتگرال وابستگى دارند. انیشتین (۱۹۵۵-۱۸۷۹) با استفاده از هندسه ریمانى مبانى نسبیت عام (۱۹۱۶) را پایه‌گذارى كرد.

گرچه گاوسى رابطه بین مجموع زاویه‌هاى یک مثلث و انحنای رویه‌اى را كه مثلث بر آن واقع بود، ملاحظه كرد، ریمان و پیروان وی این ایده‌ها را روى منیفردهاى ریمانى پیاده كردند بنابراین، انحنای هنوز پدیده‌اى بسیار مهم در هندسه دیفرانسیل است و نشان می‌دهد كه هندسه فضاى مورد مطالعه تا چه حد متفاوت از هندسه اقلیدسى است.

گرچه اقلیدس اعتقاد داشت كه هندسه‌ى حقایق جهان واقعى را در بر دارد، ولى می‌دانست كه با ساختارى آرمانى از واقعیت سرو كار دارد. منظور وی این نبود كه در دنیای واقعى چیزى به صورت طول بدون عرض وجود دارد. ولى او بر بسپاری از ویژگی‌هاى شهودى اشیاء واقعى تكيه می‌كرد. هیلبرت (۱۹۴۳-۱۸۶۲) براى آزاد كردن هندسه از اتكای به مفاهیم فیزیكى در اثبات قضیه‌ها، اصول هندسه را در ۱۸۹۹ بازنویسى و كامل كرد. هیلبرت این كار را با معرفی مفاهیم تعریف نشده (یعنى نقطه، خط، صفحه)، روابط تعریف نشده (هم‌خطى، قابلیت انطباق، میانبود) و اصول معینى‌كه برحسب مفاهیم و روابط تعریف نشده بیان كرد، آغاز كرد. هر حكمى را كه با استفاده از اصول منطق بتوان از مفاهیم، روابط و اصول نتیجه گرفت یک قضیه هندسى معتبر در هندسه نامیده می‌شود. انتخاب اصول یک مسأله سلیقه‌اى بود. البته، برخى از هندسه‌ها جالب و برخى دیگر غیر جالب خواهند بود، ولى این یک نظر شخصى است. قضیه‌ها به ماهیت مفاهیم تعریف نشده بستگى ندارند و فقط به اصولی كه در آنها صدق می‌كنند

وابسته‌اند.

با مشاهده این همه هندسه، کلاین در سال ۱۸۷۲ پیشنهاد کرد که هندسه‌ها برحسب گروه‌های تبدیلی که تحت این تبدیل‌ها ارزش درستی گزاره‌هایشان تغییر نمی‌کند، طبقه‌بندی شوند. از آن پس نظریه گروه اهمیتی فزاینده در هندسه پیدا کرد. هندسه‌های جدید ریمان گروه‌های تبدیل پیچیده‌ای دارند. به‌زودی روش‌هایی برای مطالعه خود این گروه‌ها توسعه یافت. کار اصلی روی این موضوع توسط سوفوس لی (۱۸۹۹-۱۸۴۲) انجام گرفت، و این گروه‌ها به افتخار وی **گروه‌های لی** نامیده شدند. گروه‌های لی و هندسه دیفرانسیل زمینه‌های تحقیقاتی مهمی در ریاضیات امروزی هستند.