



مدارهای الکتریکی II

(رشته مهندسی کامپیوتر)

دکتر رضا عسکری مقدم

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

نه	پیشگفتار
۱	فصل اول. گراف‌های شبکه و مفاهیم
۱	اهداف
۱	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ گراف
۴	۳-۱ بیان ماتریسی گراف
۶	۴-۱ کات‌ست
۸	۵-۱ حلقه‌ها
۱۰	۶-۱ قضیه تلگان
۱۲	مسائل فصل ۱
۱۵	فصل دوم. تجزیه و تحلیل گره و مش
۱۵	اهداف
۱۵	مقدمه
۱۶	۱-۲ مدل مداری شاخه
۱۹	۲-۲ معادلات KCL به فرم ماتریسی
۲۱	۳-۲ معادلات KVL به فرم ماتریسی
۲۴	۴-۲ روش حل گره
۲۸	۵-۲ نوشتن معادلات گره به‌طور ذهنی
۳۰	۶-۲ روش حل مش
۳۴	۷-۲ نوشتن معادلات مش به روش ذهنی
۳۶	۸-۲ دوگان
۴۲	مسائل فصل دوم

۵۱	فصل سوم. تجزیه و تحلیل حلقه و کاتست
۵۱	اهداف
۵۱	مقدمه
۵۱	۳-۱ تعریف و قضایا
۵۳	۳-۲ ارتباط جریان حلقه و جریان شاخه
۵۷	۳-۳ روش حلقه
۵۹	۳-۴ نوشتن معادلات حلقه به طور ذهنی
۶۱	۳-۵ روش کاتست
۶۵	۳-۶ نوشتن معادلات کاتست به طور ذهنی
۶۷	مسائل فصل سوم
۷۳	فصل چهارم. معادلات حالت
۷۳	اهداف
۷۳	۴-۱ مقدمه
۷۴	۴-۲ معادلات حالت مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان
۸۱	۴-۳ معادلات حالت مدارهای غیرخطی و تغییرپذیر با زمان
۸۴	مسائل فصل ۴
۹۱	فصل پنجم. فرکانس های طبیعی
۹۱	اهداف
۹۱	۵-۱ مقدمه
۹۲	۵-۲ فرکانس طبیعی یک متغیر شبکه
۹۸	۵-۳ فرکانس های طبیعی یک شبکه
۱۰۱	۵-۴ فرکانس های طبیعی و معادلات حالت
۱۰۳	مسائل فصل پنجم
۱۰۹	فصل ششم. توابع شبکه
۱۰۹	اهداف
۱۰۹	۶-۱ مقدمه
۱۰۹	۶-۲ تابع شبکه مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان
۱۱۵	۶-۳ کاربردهای تابع شبکه
۱۲۳	۶-۴ تابع شبکه، صفرها و قطب ها
۱۳۰	۶-۵ قطب ها و فرکانس های طبیعی شبکه
۱۳۵	۶-۶ یافتن فرکانس های طبیعی با کمک تابع شبکه
۱۳۸	مسائل فصل ششم
۱۴۵	فصل هفتم. دو قطبی ها
۱۴۵	اهداف
۱۴۵	۷-۱ مقدمه
۱۴۶	۷-۲ شبکه های تک قطبی
۱۵۰	۷-۳ شبکه های دو قطبی

۱۵۲	۴-۷ مدل شبکه دو قطبی با ماتریس امپدانس
۱۵۸	۵-۷ مدل شبکه دو قطبی با ماتریس ادمیتانس
۱۶۳	۶-۷ مدل شبکه دو قطبی با ماتریس های هایبرید
۱۶۶	۷-۷ مدل شبکه دو قطبی با ماتریس انتقال
۱۶۹	۸-۷ تبدیل ماتریس های دو قطبی به یکدیگر
۱۷۲	۹-۷ اتصال دو قطبی به یکدیگر
۱۷۲	۱-۹-۷ اتصال سری دو قطبی ها
۱۷۶	۲-۹-۷ اتصال موازی دو قطبی ها
۱۸۱	۳-۹-۷ اتصال سری موازی دو قطبی ها
۱۸۳	۴-۹-۷ اتصال موازی - سری دو قطبی ها
۱۸۴	۵-۹-۷ اتصال پشت سر هم دو دو قطبی
۱۸۷	مسائل فصل هفتم

فصل هشتم. تبدیل لاپلاس

اهداف

۱۹۵	۱-۸ مقدمه
۱۹۵	۲-۸ تعریف تبدیل لاپلاس
۱۹۶	۳-۸ خواص اساسی تبدیل لاپلاس
۱۹۹	۱-۳-۸ خاصیت یکتایی
۱۹۹	۲-۳-۸ خاصیت خطی بودن
۲۰۰	۳-۳-۸ خاصیت مشتق گیری
۲۰۲	۴-۳-۸ خاصیت انتگرال گیری
۲۰۵	۴-۸ تبدیل لاپلاس توابع متناوب
۲۰۸	۵-۸ لاپلاس معکوس توابع
۲۱۳	۱-۵-۸ قطب های ساده
۲۱۵	۲-۵-۸ قطب های مکرر
۲۱۶	۳-۵-۸ قطب های مختلط
۲۱۸	۶-۸ کاربرد تبدیل لاپلاس در حل مدارهای الکتریکی
۲۲۰	۱-۶-۸ پاسخ حالت صفر
۲۲۰	۲-۶-۸ پاسخ کامل
۲۲۲	مسائل فصل هشتم
۲۲۵	

پیوست الف. تعاریف و خواص ماتریس ها و دترمینان ها

۲۳۱	الف-۱) تعاریف
۲۳۱	الف-۲) عملیات ماتریسی
۲۳۳	الف-۳) قضایای ماتریس ها
۲۳۵	الف-۴) جبر ماتریس ها
۲۳۶	الف-۵) دترمینان ماتریس و خواص آن
۲۳۸	الف-۶) ماتریس معکوس
۲۴۳	الف-۷) رتبه ماتریس
۲۴۵	پیوست ب. حل دستگاه معادلات خطی
۲۴۷	

۲۵۱	پیوست پ. اعداد مختلط
۲۵۱	پ-۱) تعریف عدد مختلط
۲۵۲	پ-۲) نمایش ترسیمی اعداد مختلط
۲۵۴	پ-۳) عملیات حسابی اعداد مختلط
۲۵۹	پ-۴) روابط مهم ریاضی
۲۶۱	واژه نامه فارسی به انگلیسی:
۲۶۳	واژه نامه انگلیسی به فارسی:
۲۶۵	مراجع

"تقدیم به پدر و مادرم که همواره محتاج دعای خیر آنانم"

پیشگفتار

سپاس خداوند دانا و توانا را که با یاری و عنایات و الطاف او توانستیم کتاب مدارهای الکتریکی II را تهیه و به دانشجویان عزیز و دوستان علم تقدیم کنیم. این کتاب که حاصل چندین سال تدریس این درس توسط مؤلف می‌باشد، با نگاهی خودآموز، به‌صورت روان و همراه با مثال‌های زیاد تألیف شده است تا دانشجویان رشته‌های مهندسی کامپیوتر و برق خصوصاً دانشجویان دانشگاه پیام‌نور، به‌راحتی مطالب را فهمیده و به‌صورت خودآموز درس را یاد بگیرند.

مطالب این کتاب در ادامه مباحث درس مدارهای الکتریکی I می‌باشد. آنچه که در درس مدارهای الکتریکی I بیان شد، در این درس به‌صورت کامل‌تر و برای مدارهای پیچیده‌تر بررسی شده است. در این درس روش‌های مختلفی برای حل مدارها ارائه می‌شود که از آن‌ها می‌توان برای حل مدارهای پیچیده استفاده نمود به‌طوری‌که می‌توان این روش‌ها را به‌صورت نرم‌افزارهایی پیاده‌سازی کرد و برای حل مدارهای الکتریکی از آن‌ها استفاده کرد.

کتاب حاضر شامل هشت فصل است که به همراه توضیحات و قضایای موجود در پیوست‌ها مجموعه مفیدی برای دانشجویان مهندسی کامپیوتر دانشگاه پیام‌نور می‌باشد. در فصل اول کتاب گراف‌های شبکه و مفاهیم آن‌ها بیان می‌شوند. در فصل دوم روش‌های تجزیه و تحلیل گره و مش به‌طور مبسوط ارائه خواهند شد این روش‌ها به‌صورت ساده‌تر قبلاً در درس مدارهای الکتریکی I نیز ارائه شده‌اند. فصل سوم نیز

تجزیه و تحلیل کاتست و حلقه است که روش دیگری برای حل مدارهای الکتریکی است. فصل چهارم معادلات حالت، نحوه نوشتن آن‌ها و بعضی کاربردهای آن را شامل می‌شود. در فصل پنجم فرکانس‌های طبیعی معرفی و نحوه محاسبه و ارتباط آن‌ها با معادلات حالت بیان خواهد شد. فصل ششم شامل توابع شبکه، نحوه یافتن صفرها و قطب‌های شبکه می‌باشد. فصل هفتم دوقطبی‌ها ارائه خواهند شد و نحوه محاسبه ماتریس‌های دوقطبی‌ها بیان خواهد شد. نهایتاً در فصل هشتم تبدیل لاپلاس به‌طور مفصل ارائه خواهد شد. تبدیل لاپلاس یکی از مباحث ریاضی مهم در درس مدارهای الکتریکی است. اگرچه این مبحث در درس‌های دیگر نیز مطرح می‌شود ولی معمولاً در کتاب‌های مدار نیز فصلی را به آن اختصاص می‌دهند. این مبحث را در فصل آخر کتاب قرار داده و به‌طور مفصل نیز توضیح داده‌ایم تا در صورتی که برای تدریس کتاب، زمان کافی در اختیار استاد نبود دانشجویان خود بتوانند آن را مطالعه کنند. براساس تجربه مؤلف در زمان تدریس، بعضی دانشجویان در مباحث ریاضی مورد نیاز این درس اشکال دارند و یا آن‌ها را فراموش نموده‌اند. برای اینکه دانشجو بتواند به راحتی و بدون نیاز به استاد مطالب ریاضی مورد نیاز را یاد گرفته و استفاده کند، پیوست‌هایی در آخر کتاب آورده شده‌اند که مباحث ریاضی را همراه با مثال‌های ساده‌ای بیان می‌کند. در این کتاب سعی شده است مطالب همراه با مثال‌های متعدد باشد تا فهم مطلب برای دانشجویان ساده‌تر گردد. همچنین با حل کامل و دقیق مثال‌ها به راحتی می‌توان روند حل مسأله را دنبال کرده، آن را به خوبی فهمید.

در اینجا لازم می‌دانم از تمامی افرادی که در تهیه این کتاب و به ثمر رسیدن آن همکاری داشته اند تشکر کنم. از اساتید گرامی آقایان دکتر رحمانی و دکتر قربان‌نیا دلاور که در ویراستاری این کتاب قبول زحمت کردند و همچنین از خانم مهندس فرجام‌نش که در تایپ این کتاب کمک نمودند، سپاسگزارم.

در پایان لازم بذکر می‌دانم که علی‌رغم تلاش فراوان نویسنده، این کتاب خالی از اشکال نمی‌باشد. لذا از کلیه نظرات، انتقادات و پیشنهادهای احتمالی اساتید گرامی، دانشجویان و سایر خوانندگان استقبال می‌نمایم.

رضا عسکری مقدم

تابستان ۱۳۸۹

فصل اول

گراف‌های شبکه و مفاهیم

اهداف

- در پایان این فصل دانشجو قادر خواهد بود:
- ۱- مفهوم گراف و زیر گراف را توضیح دهد.
 - ۲- از گراف جهت‌دار، ماتریس تلافی را به دست آورد و بالعکس.
 - ۳- مفهوم کات‌ست را بیان کرده، روابط KCL را بنویسد.
 - ۴- قضیه تلگان را بیان کرده و آن را به کار برد.

۱-۱ مقدمه

در درس مدارهای الکتریکی برای حل مدارها از معادلات KCL ^۱، KVL ^۲ روش تحلیل گره و روش تحلیل مش استفاده می‌گردید. در غالب مثال‌ها و مسائلی که تاکنون مطرح شده‌اند از مدارهایی ساده و با تعداد عناصر کم استفاده شده است. در این فصل مفاهیمی مطرح می‌شوند که کمک خواهند کرد تا مدارهایی با پیچیدگی‌های بیشتر را بتوان حل کرد. با زیاد شدن تعداد عناصر، شاخه‌ها و یا گره‌های مدار، نیاز به نوشتن تعداد بیشتری معادلات KCL ، KVL خواهد بود همچنین لازم است دستگاه معادلات با تعداد متغیر و معادلات بیشتری را حل کرد. وجود این مشکلات باعث مطرح شدن روش‌های حل مداری جدیدی گردید. در این روش معادلات به صورت ماتریسی نوشته شده و حل می‌گردند. به وجود آمدن کامپیوتر و توانایی انجام محاسبات با سرعت بالا

1. Kirchhoff's Current Law
2. Kirchhoff's Voltage Law

باعث گردید تا روش‌های جدید حل مدار ارائه گردد در این روش‌ها با استفاده از کامپیوتر معادلات به راحتی حل گردیده، پارامترهای مورد نیاز به دست می‌آیند.

۱-۲ گراف^۱

در درس مدار الکتریکی ۱ مفاهیم و تعاریفی ارائه گردیدند که در اینجا یادآوری آن‌ها مفید است. محل اتصال دو یا بیشتر عنصر الکتریکی را گره^۲ می‌نامند. همچنین هر المان الکتریکی که بین دو گره قرار می‌گیرد را یک شاخه^۳ می‌گویند. بنابراین می‌توان هر مدار را به صورت ترکیبی از گره‌ها و شاخه‌ها نمایش داد.

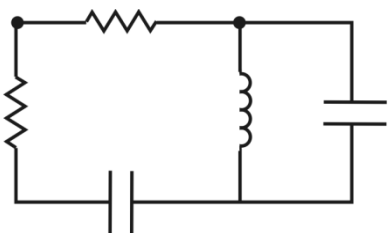
انتقال سیگنال در مدار به صورت یک موج می‌باشد و به صورت آنی و لحظه‌ای اتفاق نمی‌افتد. در صورتی که فرکانس سیگنال بسیار بالا باشد، ابعاد فیزیکی عنصر اهمیت پیدا می‌کند. در حالتی که ابعاد فیزیکی عنصر در تحلیل آن اهمیت داشته باشد، آن را عنصر گسترده می‌نامند. در این درس مدارهای الکتریکی متفاوتی تحلیل خواهند شد که در همه آن‌ها ابعاد فیزیکی عنصر در تحلیل آن اثری ندارند، این مدارها اصطلاحاً مدارهای فشرده نامیده می‌شوند. مفهوم دیگری که در مبحث مدارهای الکتریکی قبلاً نیز مطرح شده است خطی و غیر خطی بودن عنصر است، اگر بتوان رابطه بین جریان — ولتاژ یا بار — ولتاژ یا جریان — شار یک عنصر را با یک معادله خطی نمایش داد، آن عنصر را خطی می‌نامند. در غیر این صورت عنصر غیر خطی است. البته در بسیاری از کاربردهای عملی عناصر غیرخطی هستند و برای تحلیل آن‌ها معمولاً به این صورت عمل می‌شود که در ناحیه کار مشخصی و با فرض تغییرات کوچک ولتاژ و جریان مدل خطی عنصر را استفاده می‌کنند.

معادله KCL نشان می‌دهد که جمع جبری جریان‌های هر گره مدار الکتریکی همیشه صفر است. معادله KVL بیان می‌کند که جمع جبری ولتاژها در هر حلقه از هر مدار الکتریکی همواره برابر صفر است. در حین نوشتن معادلات KVL و KCL ، نوع عنصر الکتریکی اهمیت ندارد و این معادلات مستقل از ماهیت عناصر الکتریکی هستند. بنابراین می‌توان از ماهیت اجزا صرف نظر کرد و هر عنصر الکتریکی را با یک شاخه و محل اتصال عناصر را به یکدیگر با گره نمایش داد. در نتیجه شکلی حاصل خواهد شد

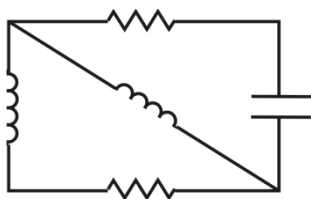
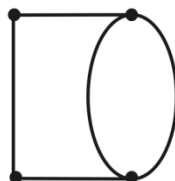
1. Graph
2. Node
3. Branch

۳ گراف‌های شبکه و مفاهیم

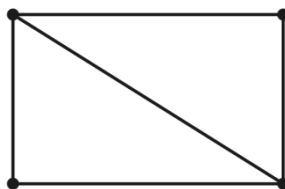
که به آن گراف گفته می‌شود. به عبارت دیگر منظور از گراف، دسته‌ای از شاخه‌ها و گروهی از گره‌ها هستند به‌طوری‌که هر شاخه در دو سرش به یک گره وصل است. در شکل (۱-۱) دو مدار و گراف‌های آن‌ها نمایش داده شده است.



(الف)

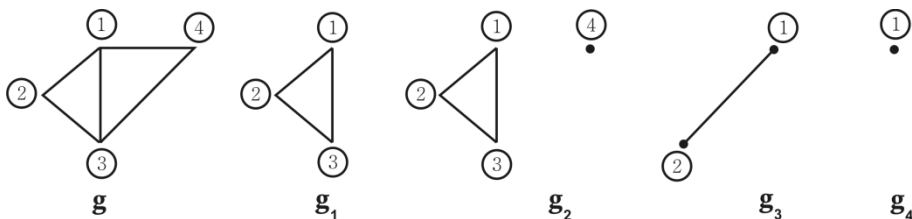


(ب)



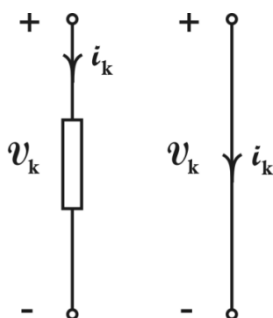
شکل ۱-۱. دو مدار و گراف‌های آن‌ها

گراف g را در نظر بگیرید. g_1 را یک زیر گراف از گراف g مینامیم، اگر هر گره g_1 یک گره از g و هر شاخه g_1 یک شاخه از g باشد. یا به عبارت دیگر می‌توان گفت با حذف بعضی از شاخه‌ها و یا گره‌های گراف g می‌توان زیر گراف‌های مختلفی به‌دست آورد. در شکل (۲-۱) یک گراف g و چهار زیر گراف g_1 ، g_2 ، g_3 و g_4 نمایش داده شده است.



شکل ۲-۱. گراف g و چهار زیر گراف g_1 ، g_2 ، g_3 و g_4

در شکل (۲-۱) ملاحظه می‌شود که زیر گراف g_4 تنها از یک گره تشکیل شده است. این زیر گراف را اصطلاحاً "زیر گراف سوده" می‌نامند. قبلاً در درس مدار الکتریکی ۱ جهت‌های قراردادی برای عناصر الکتریکی تعریف گردیدند. اگر هر عنصر در یک شاخه مطابق شکل (۳-۱) نشان داده شود، چنین قرارداد می‌کنیم که جهت جریان همواره از پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کمتر است. به عبارت دیگر جهت جریان از سمت مثبت ولتاژ به سمت منفی فرض می‌شود.



شکل ۳-۱. جهت قراردادی ولتاژ و جریان برای یک عنصر الکتریکی و یک شاخه

اگر در مدار الکتریکی، به جای هر عنصر الکتریکی یک شاخه قرار گیرد و هر شاخه با توجه به شکل دارای جهتی باشد گرافی حاصل می‌شود که به آن گراف جهت‌دار گفته می‌شود. در گراف جهت‌دار جهت پیکان هر شاخه از سمت مثبت ولتاژ به سمت منفی می‌باشد و بنابراین با رسم جهت پیکان، دیگر نیازی به نمایش علامت‌های مثبت و منفی ولتاژ نمی‌باشد جهت پیکان‌های هر شاخه نشان‌دهنده جهت حرکت جریان در شاخه می‌باشد و اصطلاحاً جریان از یک گره خارج می‌شود و به گره دیگر وارد می‌شود.

۳-۱ بیان ماتریسی گراف

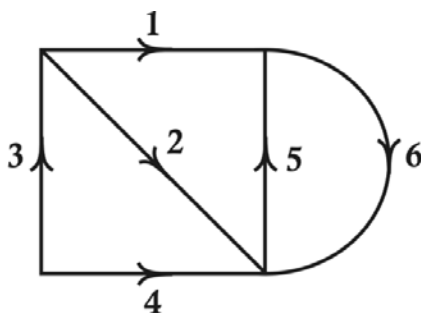
اگر برای هر گراف جهت‌دار تمام شاخه‌ها و گره‌ها شماره‌گذاری و مشخص شوند آنگاه می‌توان ماتریسی را نوشت که نشان می‌دهد هر شاخه از کدام گره خارج و به کدام گره وارد می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان هر گراف جهت‌دار را با ماتریسی

نمایش داد به طوری که نحوه اتصال شاخه‌ها و گره‌ها و جهت پیکان‌های هر شاخه را در خود دارد. این ماتریس اصطلاحاً "ماتریس تلاقی گره یا شاخه" نامیده و با A_a نمایش داده می‌شود. درایه (j,k) ام این ماتریس به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } i \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ و گره } i \text{ به هم متصل نباشند} \end{cases}$$

هر شاخه تنها از یک گره خارج و تنها به یک گره وارد می‌شود. بنابراین هر ستون ماتریس A_a فقط شامل یک $+1$ و یک -1 می‌باشد و بقیه درایه‌های ستون برابر صفر خواهند بود. در زیر ماتریس تلاقی و در شکل (۴-۱) گراف جهت‌دار آن نمایش داده شده است.

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



شکل ۴-۱. گراف جهت‌دار و ماتریس تلاقی آن

در بالا، نحوه نوشتن ماتریس تلاقی با استفاده از شکل گراف جهت‌دار توضیح داده شد. از آنجا که اطلاعات مربوط به گره‌ها، شاخه‌ها، نحوه اتصال آن‌ها و جهت شاخه‌ها به طور کامل در ماتریس تلاقی A_a وجود دارد، می‌توان به طور معکوس، با

استفاده از ماتریس تلاقی نیز گراف را به دست آورد. برای به دست آوردن ماتریس، ابتدا با توجه به تعداد سطرها، تعداد گره‌ها مشخص و شماره‌گذاری می‌شوند. سپس با استفاده از اطلاعات هر ستون ماتریس، نحوه اتصال و جهت جریان هر شاخه مشخص و رسم می‌شود.

تمرین (۱-۱): گراف جهت‌دار متناظر با ماتریس تلاقی زیر را رسم کنید.

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴-۱ کاتست^۱

همان‌گونه که گفته شد گراف مجموعه‌ای از گره‌ها است که توسط شاخه‌ها به هم متصل شده‌اند و جهت هر شاخه نشان‌دهنده ورود یا خروج جریان به هر گره است. عملی که طی آن خط بین دو گره حذف شود ولی خود گره‌ها باقی بمانند اصطلاحاً "حذف شاخه" نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، منظور از حذف شاخه در یک گراف، قطع کردن ارتباط بین دو گره است درحالی‌که گره‌ها هنوز در جای خود باقی هستند. دسته‌ای از شاخه‌های یک گراف پیوسته را در صورتی کاتست می‌نامند که دو شرط را ارضا کنند: اول اینکه با حذف تمام شاخه‌های این دسته، گراف به دو قسمت جدای از هم تبدیل شود و دوم اینکه حذف تمام شاخه‌های این دسته به جز یکی باعث پیوستگی گراف گردد و گراف به دو قسمت مجزا تبدیل نشود.

معمولاً برای نشان دادن کاتست، شاخه‌های کاتست با خطوط پررنگ‌تر و درشت‌تر نمایش داده می‌شوند که توسط خط‌چینی که تمام شاخه‌های کاتست را قطع می‌کند، از سایر شاخه‌های گراف متمایز شده‌اند. در شکل (۱-۵) مثال‌هایی از کاتست در دو مدار نمایش داده شده است.



شکل ۵-۱. دو کاتست در دو گراف

یکی از معادلات مهم و اساسی در حل مدارهای الکتریکی معادلات KCL می‌باشند که بیانگر قانون جریان کیرشهف هستند. روابط KCL برای هر گره مدار نوشته و استفاده می‌شوند. با استفاده از مفهوم کاتست‌ها می‌توان رابطه KCL را تعمیم داد و شکل کلی‌تری از آن را در مدارها به کار برد. "برای هر مدار فشرده در هر لحظه از زمان و برای هر یک از کاتست‌های آن، مجموع جبری جریان تمام شاخه‌های کاتست مساوی صفر است." بنا به تعریفی که قبلاً برای کاتست ارائه شد و با توجه به شکل (۵-۱) می‌توان مشاهده کرد که خط‌چینی که تمام شاخه‌های کاتست را قطع می‌کند تشکیل یک سطح گوسی می‌دهد که سطحی بسته است و انتظار می‌رود که جمع جبری جریان‌های وارد و خارج شده از این سطح برابر صفر باشد.

برای هر کاتست می‌توان یک جهت تعریف کرد. معمولاً جهت از داخل به خارج سطح کاتست را به طور قراردادی جهت کاتست تعریف می‌کنند. با تعریف جهت کاتست، جمع جبری جریان‌های کاتست مفهوم پیدا می‌کنند. شاخه‌هایی از کاتست که جهت آن‌ها موافق جهت کاتست است با علامت مثبت و شاخه‌هایی که جهت جریان آن‌ها مخالف جهت کاتست است با علامت منفی در معادله کاتست به کار می‌روند.

تمرین (۲-۱): برای کاتست‌های شکل (۵-۱) معادلات KCL را بنویسید.

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad \text{(الف: جواب)}$$

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad \text{(ب)}$$

قانون جریان کیرشهف برای هر گره نوشته می‌شود. اگر روابط KCL برای همه گره‌های داخل یک سطح گوسی نوشته شده و با یکدیگر جمع گردد، قانون کاتست

حاصل می‌شود. با جمع معادلات KCL جریان شاخه‌هایی که گره‌ها را در داخل سطح به هم وصل می‌کنند یکدیگر را حذف می‌کنند و تنها جریان‌های شاخه‌های کاتست باقی می‌مانند در مثال (۱-۱) این نکته دیده می‌شود:

مثال (۱-۱): در گراف (الف) از شکل (۵-۱) معادلات KCL را برای گره‌های داخل سطح گوسی نوشته و حاصل جمع آن‌ها را با معادله کاتست مقایسه کنید.

$$\begin{array}{rcl}
 KCL1: & i_1 + i_5 - i_6 = 0 \\
 KCL2: & -i_2 - i_5 - i_7 + i_8 = 0 \\
 KCL3: & +i_3 + i_4 - i_8 = 0 \\
 KCL4: & -i_4 + i_6 + i_7 = 0 \\
 \hline
 \text{مجموع} & i_1 - i_2 + i_3 = 0
 \end{array}$$

معادله به‌دست آمده دقیقاً معادله کاتست است که برای جریان‌های خروجی i_1, i_3 علامت مثبت و جریان ورودی i_2 علامت منفی دارد.

۵-۱ حلقه‌ها^۱

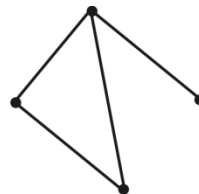
قبلاً در درس مدار الکتریکی ۱ حلقه را تعریف و استفاده کرده‌ایم. اینک تعریف کامل‌تری از حلقه ارائه می‌شود و نحوه نوشتن روابط KVL برای آن توضیح داده خواهد شد. یک زیر گراف L از گراف g را حلقه گویند، اگر زیر گراف L متصل به هم باشد و همچنین به هر گره از زیر گراف L تنها دو شاخه متصل باشد. بنابراین اگر مسیر بسته‌ای در مدار بتوان مشخص کرد که بیش از یک بار از گره‌ی عبور کرده باشد حلقه نیست. در شکل (۶-۱) مسیریابی نشان داده شده‌اند که هیچ یک حلقه نیستند.



(پ)



(ب)

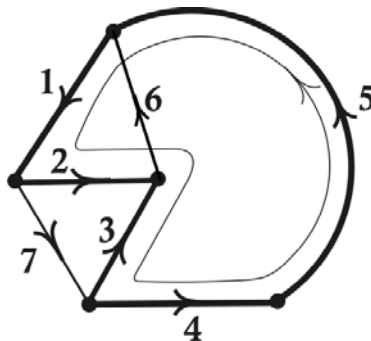


(الف)

شکل ۶-۱. زیر گراف‌هایی که حلقه نیستند.

برای هر حلقه می‌توان قانون ولتاژ کیرشهف را نوشت: "برای هر شبکه فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از حلقه‌های آن، جمع جبری ولتاژ تمام شاخه‌هایی که حلقه را تشکیل می‌دهند، همواره برابر صفر است." برای نوشتن معادلات KVL نیاز است. ابتدا یک جهت قراردادی برای حلقه تعیین کنیم و سپس با توجه به جهت شاخه‌ها علامت ولتاژ شاخه را در معادله تعیین می‌کنیم. اگر جهت شاخه با جهت قراردادی حلقه مطابقت داشته باشد، از علامت مثبت و اگر شاخه با حلقه هم جهت نباشد، از علامت منفی برای ولتاژ شاخه استفاده می‌شود. معمولاً برای نشان دادن حلقه در گراف، شاخه‌های مربوط به آن را پررنگ‌تر و درشت‌تر رسم می‌کنند.

تمرین (۳-۱): در گراف زیر حلقه‌ای مشخص شده است. معادله KVL را برای آن بنویسید.



شکل ۱-۷. مدار مربوط به تمرین (۲-۱)

قبلاً در درس مدار الکتریکی ۱ با مفهوم مش آشنا شده‌اید. یک مش حلقه‌ایست که در آن حلقه هیچ شاخه‌ای محصور نشده باشد یا به عبارت دیگر مش حلقه‌ایست که داخل آن نمی‌توان حلقه دیگری تعریف کرد. اگر برای تمامی مش‌های داخل یک حلقه روابط KVL نوشته شود و سپس به‌طور مناسبی با هم جمع گردد معادله حلقه حاصل می‌شود.

مثال (۲-۱): برای مدار شکل (۱-۷) معادلات KVL مربوط به مش‌های $\{1, 2, 6\}$ و

{3,4,5,6} را نوشته و مجموع آنها را به دست آورید.

(حل)

$$\begin{array}{l} KVL\ 1: \quad v_1 + v_2 + v_6 = 0 \\ KVL\ 2: \quad -v_3 + v_4 + v_5 - v_6 = 0 \end{array}$$

$$\text{مجموع} \quad v_1 + v_2 - v_3 + v_4 + v_5 = 0$$

معادله حاصل همان معادله KVL حلقه است.

۱-۶ قضیه تلگان^۱

قضیه تلگان یک قضیه بسیار کلی برای همه شبکه‌های فشرده است. عناصر به کار رفته در این شبکه‌ها ممکن است خطی، غیرخطی، اکتیو، پسیو، تغییرپذیر با زمان و یا نامتغیر با زمان باشند. با این حال قضیه تلگان همچنان معتبر و قابل استفاده می‌باشد. کلیت این قضیه به این دلیل است که براساس قوانین ولتاژ و جریان کیرشهف حاصل شده است. و همچنین می‌دانیم که قوانین ولتاژ و جریان کیرشهف برای عناصر خطی، غیرخطی، اکتیو، پسیو، تغییرپذیر با زمان و یا نامتغیر با زمان صحیح و قابل استفاده هستند. شبکه فشرده دلخواهی را تصور کنید که هر شاخه k دارای ولتاژ v_k و جریان متناظر i_k می‌باشد. از ماهیت شاخه‌ها صرف نظر کرده و شبکه را به صورت یک گراف جهت دار تصور کنید. قضیه تلگان بیان می‌دارد که:

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = 0$$

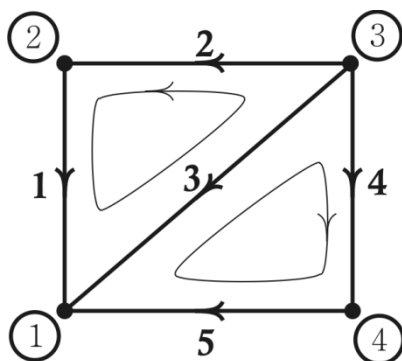
که b نشان دهنده تعداد شاخه‌های شبکه است.

تنها شرطی که لازم است توسط ولتاژهای شاخه‌ها v_k ارضا شود این است که در رابطه KVL صدق کنند. هم چنین جریان‌های i_k باید در رابطه KCL صدق کنند.

مثال (۱-۳): شبکه زیر با ولتاژها و جریان‌های داده شده را در نظر بگیرید. روابط KCL و KVL را نوشته و قضیه تلگان را بررسی کنید.

$$v_1 = 2 \quad v_2 = -1 \quad v_3 = 1 \quad v_4 = 4 \quad v_5 = -3$$

$$i_1 = 1 \quad i_2 = 1 \quad i_3 = -3 \quad i_4 = 2 \quad i_5 = 2$$



شکل ۸-۱ گراف مربوط به مثال (۳-۱)

حل) روابط KVL با توجه به شکل فوق به صورت زیر است. اگر مقادیر داده شده ولتاژ و جریان را در روابط قرار دهیم هر دو رابطه صادق هستند.

$$\begin{aligned} KVL1: \quad & v_1 - v_3 + v_2 = 0 \\ KVL2: \quad & -v_3 + v_4 + v_5 = 0 \end{aligned}$$

همچنین برای هر گره داریم:

$$\begin{aligned} KCL\ 1: \quad & -i_1 - i_3 - i_5 = 0 \\ KCL\ 2: \quad & i_1 - i_2 = 0 \\ KCL\ 3: \quad & i_2 + i_3 + i_4 = 0 \\ KCL\ 4: \quad & -i_4 + i_5 = 0 \end{aligned}$$

همه مقادیر جریان‌های داده شده در روابط فوق صدق می‌کنند.

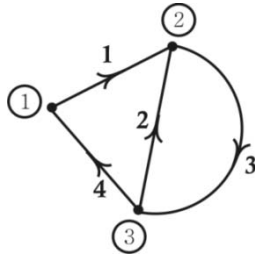
قضیه تلگان نیز به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 v_k i_k &= (2)(1) + (-1)(1) + (1)(-3) + (4)(2) + (-3)(2) \\ &= 2 - 1 - 3 + 8 - 6 = 0 \end{aligned}$$

تمرین (۴-۱). در گراف زیر مقادیر ولتاژها و لثاژها و جریان‌ها به صورت زیر است. قضیه تلگان را بررسی کنید.

$$v_1 = -10 \quad v_2 = -6 \quad v_3 = 6 \quad v_4 = 4$$

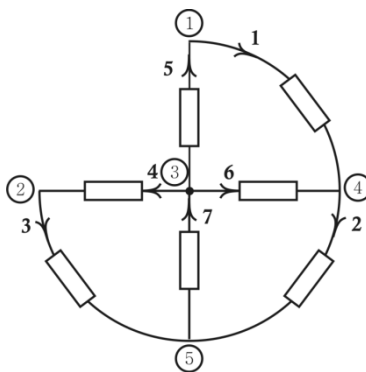
$$i_1 = 5 \quad i_2 = -2 \quad i_3 = 3 \quad i_4 = 5$$



شکل ۹-۱. گراف مربوط به تمرین (۳-۱)

مسائل فصل ۱

۱- مدار شکل (۱۰-۱) را در نظر گرفته و گراف جهت دار آن را رسم کنید. ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a را بنویسید.



شکل ۱۰-۱. مدار مسئله (۱)

۲- در شکل (۱۰-۱) کاتست‌هایی که شاخه‌های ۲ و ۷ را دربر می‌گیرند، نمایش دهید.

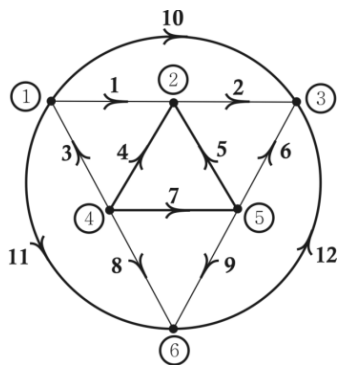
روابط KCL را برای آن‌ها بنویسید.

۳- در مدار شکل (۱۰-۱) کاتستی را مشخص کنید که رابطه KCL آن برابر مجموع روابط KCL گره‌های (۴) و (۵) است.

۴- در مدار شکل (۱۱-۱):

الف) نشان دهید که هر یک از دسته شاخه‌های زیر یک کاتست هستند.

$$\begin{array}{lll} \{1,2,4,5\} & \{1,2,4,6,7,9\} & \{1,2,3,6,8,9\} \\ \{2,6,8,9,10,11\} & \{1,2,3,6,8,9\} & \{8,9,11,12\} \end{array}$$

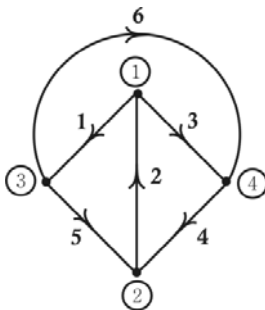


شکل ۱۱-۱. مدار مسئله (۴)

ب) معادلات KCL را برای هر کاتست به دست آورید و هر کدام را برحسب ترکیب خطی مناسبی از معادلات گره بنویسید.

ج) ثابت کنید این کاتست‌ها نسبت به هم مستقل خطی هستند.

۵- گراف شکل (۱۲-۱) را در نظر گرفته، ماتریس تلاقی گره با شاخه را بنویسید.



شکل ۱۲-۱. مدار مسئله (۵)