



معادلات دیفرانسیل

(رشته ریاضی)

دکتر سعید فاریابی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول	۱
فصل دوم: کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول	۶۹
فصل سوم: معادلات دیفرانسیل خطی	۱۰۱
فصل چهارم: جواب‌های سری معادلات دیفرانسیل خطی	۱۹۳
فصل پنجم: توابع بسل	۲۶۹
فصل ششم: دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل	۲۹۱
فصل هفتم: تبدیلات لاپلاس	۳۲۵
مراجع	۳۷۰

فصل اول

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در این فصل روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را مطالعه می‌کنیم و در فصل دوم در مورد اهمیت این گونه معادلات و جایگاه آنها در بین سایر علوم آشنا می‌شویم.

۱-۱ مقدمه و تعاریف

۱-۱-۱ تعریف: فرض کنید تابع $y = f(x)$ بر بازه $I = (a, b)$ ، تعریف شده باشد. هر معادله‌ای شامل متغیر مستقل x ، تابع $y = f(x)$ و مشتق‌های f را یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌نامیم.

۱-۱-۲ مثال: هر یک از معادلات زیر یک معادله دیفرانسیل می‌باشد.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad (۱)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \quad (۲)$$

$$f'(x) = f''(x) \quad (۳)$$

$$y'' + 2(y')^2 + 2x = 0 \quad (۴)$$

$$(y''')^2 + (y'')^2 + y' = x \quad (۵)$$

$$(x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0 \quad (۶)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = \cos x \quad (۷)$$

$$xy^{(4)} + 2y'' + (xy')^5 = x^3 \quad (۸)$$

۱-۱-۳ مثال: یک مسأله ساده در حساب دیفرانسیل و انتگرال یافتن کلیه توابعی است که به ازای هر x در معادلات (۱) و (۲) صدق کنند.

حل: روشن است که $y = \sin x + c$ در معادله (۱) و $y = \tan^{-1} x + c$ در معادله (۲) صدق می‌کنند، در آن c ثابت اختیاری است. با کمی دقت متوجه می‌شویم که پیدا کردن توابعی که در سایر معادلات دیفرانسیل مثال ۱-۱-۲ صدق کنند، ساده نیست.

۱-۱-۴ تعریف: یک معادله دیفرانسیل جزئی معادله‌ای متشکل از یک تابع مجهول با بیش از یک متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی آن است.

برای مثال، معادله زیر برای تابع مجهول دو متغیره $u(x, t)$ یک معادله دیفرانسیل جزئی است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

۱-۱-۵ تذکر: توجه کنید که چون در اینجا ما تنها معادلات دیفرانسیل معمولی را مطالعه خواهیم کرد، از این پس کلمه معمولی را حذف می‌کنیم.

۱-۱-۶ تعریف: مرتبه یک معادله دیفرانسیل بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود.

۱-۱-۷ مثال: مرتبه معادلات داده نشده در مثال ۱-۱-۲ را تعیین کنید.

حل: معادلات (۱)، (۲) و (۶) از مرتبه اول، معادلات (۳)، (۴) و (۷) از مرتبه دوم، معادله (۵) از مرتبه سوم و معادله (۸) از مرتبه چهارم می‌باشند.

۱-۱-۸ تعریف: به طور کل، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام را می‌توان به صورت

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (۹)$$

۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

نوشت. تحت شرایط مناسبی روی تابع F ، معادله (۹) را می‌توان نسبت به $y^{(n)}$ برحسب $n+1$ متغیر دیگر $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ حل نمود و به صورت

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (10)$$

نوشت. در این کتاب فرض می‌کنیم که همیشه بتوان این امر را انجام داد. در غیر این صورت، معادله‌ای به صورت (۹) را در واقع ممکن است با بیشتر از یک معادله به صورت (۱۰) نمایش داد.

۱-۱-۹ مثال: معادله $x(y')^2 + 4y' - 6x^2 = 0$ را به صورت (۱۰) بنویسید.

حل: این معادله در واقع دو معادله دیفرانسیل زیر را نمایش می‌دهد.

$$y' = \frac{-2 - \sqrt{4 + 6x^3}}{x} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-2 + \sqrt{4 + 6x^3}}{x}$$

۱-۱-۱۰ تعریف: تابع g ، تعریف شده بر بازه (a, b) ، را جوابی از معادله (۱۰) می‌نامیم، اگر g در این بازه n بار مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر x از این بازه

$$g^{(n)}(x) = f(x, g(x), g'(x), \dots, g^{(n-1)}(x))$$

برقرار باشد.

۱-۱-۱۱ مثال: تحقیق کنید که تابع

$$y = \tan x - x \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (11)$$

جوابی از معادله دیفرانسیل

$$y' = (x + y)^2 \quad (12)$$

است.

حل: در اینجا $y = \tan x - x$ ، $y' = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ با جایگذاری این مقادیر به جای y و y' در معادله (۱۲) اتحاد زیر به دست می‌آید.

$$\tan^2 x = (x + \tan x - x)^2 = \tan^2 x$$

پس تابع داده شده در هر یک از بازه‌های مشخص شده در (۱۱) جوابی از معادله (۱۲) است.

۱-۱-۱۲ تمرین: تحقیق کنید که تابع تعریف شده با ضابطه

$$y = x^2 \quad -\infty < x < \infty$$

جوابی از معادله زیر است

$$(y'')^3 + (y')^2 - y - 3x^2 - 8 = 0 \quad (14)$$

۱-۱-۱۳ تعریف: رابطه $f(x, y) = 0$ را یک جواب ضمنی معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (15)$$

بر بازه $I = (a, b)$ می‌نامیم، اگر

الف) y را به عنوان تابع ضمنی از x بر I تعریف کند، یعنی اگر تابع $g(x)$ تعریف شده بر I وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x در I ،

$$f(x, g(x)) = 0$$

ب. $g(x)$ در (۱۵) صدق کند، یعنی به ازای هر x در I ،

$$F(x, g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x)) = 0$$

۱-۱-۱۴ مثال: آیا $f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ یک جواب ضمنی از معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y') = yy' + x = 0 \quad (16)$$

بر بازه $I: -5 < x < 5$ است.

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که تابع داده شده y را می‌توان به عنوان تابع ضمنی‌ای از x بر I تعریف کرد، زیرا اگر $g(x)$ را یکی از توابع $y = \pm\sqrt{25-x^2}$ انتخاب کنیم، مثلاً با انتخاب $g(x) = \sqrt{25-x^2}$ داریم:

$$g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \quad -5 < x < 5$$

با جایگذاری $g(x)$ به جای y و $g'(x)$ به جای y' در (۱۶) نتیجه می‌شود که

$$F((x, g(x), g'(x))) = \sqrt{25-x^2} \left(-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \right) + x = 0.$$

چون طرف چپ معادله اخیر صفر است، معادله نسبت به x اتحاد است و بنابراین شرایط تعریف ۱-۱-۱۳ برقرارند.

۱-۱-۱۵ تذکر: روش کلی برای اینکه ثابت کنیم تابع ضمنی‌ای جوابی از معادله دیفرانسیل است آن است که به‌طور ضمنی از تابع مشتق می‌گیریم، اگر به معادله دیفرانسیل منجر گردد، آنگاه تابع ضمنی را جواب ضمنی‌ای از معادله دیفرانسیل می‌گوییم. اگر عمل مشتق‌گیری ضمنی را به‌طور چشم بسته انجام دهیم، برای مثال نتیجه می‌گیریم که $x^2 + y^2 = 0$ جواب ضمنی‌ای از $x + yy' = 0$ است، ولی $x^2 + y^2 = 0$ را به‌طور ضمنی به عنوان تابعی از x بر بازه‌ای تعریف نمی‌کند. تنها در نقطه $(0,0)$ در این فرمول صدق می‌کند. بنابراین ادعای جواب بودن $x^2 + y^2 = 0$ بی‌معنی است.

۱-۱-۱۶ تمرین: آیا

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (17)$$

یک جواب ضمنی معادله

$$F(x, y, y') = (y^2 - x)y' - y + x^2 = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (18)$$

است؟

۱-۱-۱۶ تمرین‌های بخش ۱-۱

۱. مرتبه هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y' + xy = y^2 \quad (\text{الف})$$

$$dy + (xy - \cos x) dx = 0 \quad (\text{ب})$$

$$dy + (xy - \cos x) dx = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4} \right) \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right) + \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{د})$$

$$e^{y'''} + xy'' + y = 0 \quad (\text{ه})$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 - (y''')^4 + x = 0 \quad (\text{و})$$

۲. ثابت کنید هر یک از توابع داده شده در ستون سمت چپ، جواب معادله دیفرانسیل متناظر در ستون سمت راست می‌باشد.

$$y = e^{-x} \quad y' + y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y = e^x \quad y' = e^x \quad (\text{ب})$$

$$y = e^x + 2 \quad , \quad f'(x) = f''(x) \quad (\text{پ})$$

$$y = \sqrt{1+x^2} \quad , \quad (1+x^2)y' = xy \quad (\text{ت})$$

$$y = \frac{2}{x+2} \quad , \quad xy' + y = y^2 \quad (\text{ث})$$

$$y = \sqrt{16-x^2} \quad , \quad x + yy' = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y = \cosh x \quad , \quad y'' - y = 0 \quad (\text{چ})$$

$$y = e^{x^2} \int_1^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \quad , \quad y' - 2xy = 1 \quad (\text{ح})$$

$$y = ae^x + be^{-x} \quad , \quad y'' - y = 0 \quad (\text{خ})$$

۳. نشان دهید که معادله دیفرانسیل $\left| \frac{dy}{dx} \right| + |y| = 0$ دارای جواب نیست.

۴. آیا تابع ضمنی داده شده در سمت چپ، یک جواب ضمنی معادله دیفرانسیل سمت راست است؟

$$y^2 - 1 = (x + 2)^2, \quad y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0. \quad (\text{الف})$$

$$e^y + e^{2x} = 1, \quad e^{x-y} + e^{y-x} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (\text{ج})$$

۵. تعیین کنید به ازای کدام مقادیر r ، e^{rx} جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده است.

$$y'' + y' = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (\text{ب})$$

۶. تعیین کنید به ازای کدام مقادیر r ، $y = x^r$ جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده است.

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0, \quad x > 0. \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' + 2xy' = 0, \quad x > 0. \quad (\text{ب})$$

۱-۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

۱-۲-۱ بنا بر آنچه در نظریه انتگرال گیری در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموختیم، برخی معادلات دیفرانسیل ساده به صورت $y' = f(x)$ را به آسانی می توان حل نمود. برای مثال، اگر

$$y' = e^x$$

آنگاه جواب معادله را می توان با یک انتگرال گیری ساده به دست آورد، یعنی

$$y = e^x + c$$

که در آن c یک ثابت اختیاری است. اگر

$$y'' = e^x \quad (1)$$

آنگاه، جواب آن با دو بار انتگرال گیری از (۱) به دست می آید

$$y = e^x + c_1 x + c_2$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت های اختیاری هستند. سرانجام، اگر

$$y''' = e^x \quad (2)$$

آنگاه جواب آن را می توان با سه بار انتگرال گیری از (۲) به دست آورد.

$$y = e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

که در آن c_1 ، c_2 و c_3 ثابت های اختیاری می باشند.

۱-۲-۲ تمرین: جواب معادله دیفرانسیل $y'' = 2x$ را پیدا کنید.

۱-۲-۳ تعریف: به نظر می رسد که با توجه به مثال (۱-۲-۱) می توان دو حکم زیر را نتیجه گرفت اولاً، اگر معادله دیفرانسیل حداقل دارای یک جواب باشد، آنگاه بی شمار جواب دارد (یادآور می شویم که c ها می توانند بی شمار مقدار بگیرند). ثانیاً، اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه اول باشد، جواب معادله دیفرانسیل شامل یک ثابت اختیاری است، اگر از مرتبه دوم باشد، آنگاه جواب معادله دیفرانسیل شامل دو ثابت اختیاری است، اگر از مرتبه n باشد، جواب معادله دیفرانسیل شامل n ثابت اختیاری است. مثال های

زیر نشان می‌دهند که دو حکم فوق ممکن است برای معادلات دیفرانسیل خاصی برقرار نباشند.

۱-۲-۴ مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(y')^2 + y^2 = 0$$

و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(y'')^2 + y^2 = 0$$

تنها دارای یک جواب $y=0$ است.

۱-۲-۵ مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$|y'| + 1 = 0$$

و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$|y''| + 1 = 0$$

جواب ندارد.

۱-۲-۶ مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$xy' = 1 \quad (3)$$

در بازه $I = (-1, 1)$ دارای جواب نیست. به‌طور صوری با حل معادله دیفرانسیل به‌دست می‌آوریم.

$$y = \ln|x| + c \quad (4)$$

ولی این تابع در $x=0$ ناپیوسته است. بنا به تعریف ۱-۱-۹، جواب باید به ازای هر x در I در معادله دیفرانسیل صدق کند. توجه کنید که اگر $x < 0$ ، آنگاه بنا بر (۴) در بالا

$$y = \ln(-x) + c_1, \quad x < 0$$

جواب معتبری از (۳) است. اگر $x > 0$ ، آنگاه بنا بر (۴)

$$y = \ln(x) + c_2 \quad x > 0$$

نیز جواب معتبری از (۳) می‌باشد.

۱-۲-۷ مثال: جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(y' - ry)(y' - ry) = 0$$

عبارت است از

$$(y - c_1 e^{rx})(y - c_2 e^{rx}) = 0$$

که به جای یک ثابت شامل دو ثابت اختیاری است.

۱-۲-۸ تذکر: مثال‌های بالا بیان می‌کنند که نباید بلافاصله نتیجه گرفت هر معادله دیفرانسیلی دارای جواب می‌باشد، یا اگر معادله دارای جواب باشد تعداد ثابت‌های این جواب برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل است. با وجود این، دسته زیادی از معادلات دیفرانسیل وجود دارند که دو حکم بالا در مورد آنها درست می‌باشد و این دسته‌ها معادلاتی هستند که ما با آنها در این درس مواجه هستیم. تنها برای این دسته‌های خاص ادعا می‌کنیم که: جواب یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n شامل n ثابت اختیاری، مانند $c_1, c_2, \dots, c_n$ است.

معمولاً جوابی که شامل n ثابت، مانند $c_1, c_2, \dots, c_n$ است را یک خانواده n -پارامتری از جواب‌ها می‌نامیم. برای مثال، با توجه به ۱-۲-۱ می‌گوییم $y = e^x + c$ یک خانواده ۱-پارامتری از جواب‌های معادله $y' = e^x$ و $y = e^x + c_1 x + c_2$ یک خانواده ۲-پارامتری از جواب‌های معادله $y'' = e^x$ است.

۱-۲-۹ تعریف: توابع $n+1$ متغیره با متغیرهای $x, c_1, c_2, \dots, c_n$ تعریف شده توسط

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (5)$$

را یک خانواده n -پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه n نام

$$y = F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (6)$$

می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر انتخاب دلخواه اعداد $c_1, c_2, \dots, c_n$ ، تابع $f(x)$ که توسط (۵) تعریف شده در معادله (۶) صدق کند. یعنی، اگر

$$F(x, f, f', \dots, f^{(n)}) = 0$$

اینک برای دسته‌های معادلات دیفرانسیلی که مورد بررسی قرار می‌دهیم، ادعا می‌کنیم که:

"یک معادله دیفرانسیل مرتبه n دارای یک خانواده n -پارامتری از جواب‌هاست."

۱-۲-۱۰ مثال: نشان دهید که توابع تعریف شده توسط

$$y = f(x, c_1, c_2) = 2x + 3 + c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad (7)$$

از سه متغیر x ، c_1 و c_2 یک خانواده ۲-پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر است.

$$F(x, y, y', y'') = y'' - 3y' + 2y - 4x = 0 \quad (8)$$

حل: مشتق اول و دوم (۷) عبارتند از:

$$y' = f'(x) = 2 + c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \quad y'' = f''(x) = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x}$$

با جایگذاری مقادیر f ، f' ، f'' به جای y ، y' ، y'' در (۸) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} F(x, f, f', f'') &= c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} - 3(2 + c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}) - 4x \\ &\quad + 2(2x + 3 + c_1 e^x + c_2 e^{2x}) - 4x = 0 \end{aligned}$$

۱-۲-۱۱ تمرین: تحقیق کنید که توابع $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$ یک خانواده ۲-

پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم $y'' + a^2 y = 0$ است.

۱-۲-۱۲ روش یافتن معادله دیفرانسیل وقتی خانواده n -پارامتری از جواب‌ها معلوم باشد:

در هر مورد باید معادله دیفرانسیلی را تعیین کنیم که شرایط زیر را دارا باشد.

۱. مرتبه آن برابر با تعداد ثابت‌های داده شده در هر خانواده باشد.

۲. با خانواده داده شده سازگار باشد.

۳. ثابت‌های اختیاری در آن ظاهر نشده باشد.

۱-۲-۱۳ مثال: معادله دیفرانسیلی را به قسمی پیدا کنید که خانواده ۱-پارامتری از جواب‌های آن عبارت است از:

$$y = c \sin x + x \quad (9)$$

حل: با توجه به مطالب بیان شده در بالا، چون (۹) شامل یک ثابت اختیاری است، پس (۹) جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. با مشتق‌گیری از (۹)، به دست می‌آوریم

$$y' = c \cos x + 1 \quad (10)$$

این معادله دیفرانسیل نمی‌تواند معادله خواسته شده باشد چون شامل پارامتر c است.

برای حذف کردن c ، معادله (۹) را در $-\cos x$ و معادله (۱۰) را در $\sin x$ ضرب کرده و آنها را با یکدیگر جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود که:

$$(-\cos x)y + (\sin x)y' = -x \cos x + \sin x$$

یا

$$(y' - 1) \sin x + (x - y) \cos x = 0$$

$$y' = (y - x) \cot x + 1, \quad x \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

۱-۲-۱۴ مثال: معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که خانواده ۱-پارامتری از جواب‌های آن خانواده دایره‌های زیر باشد.

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = 2c^2 \quad (11)$$

حل: چون در اینجا خانواده ۱- پارامتری داریم، پس (۱۱) جواب‌های یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. با ساده کردن (۱۱) به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 = 2c(x + y)$$

یا

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 2c \quad y \neq -x$$

بنابراین، با دیفرانسیل‌گیری از دو طرف رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{(x + y)(2x dx + 2y dy) - (x^2 + y^2)(dx + dy)}{(x + y)^2} = 0$$

در نتیجه معادله خواسته شده عبارت است از:

$$(x^2 + 2xy - y^2) dx - (x^2 - 2xy + y^2) dy = 0$$

۱-۲-۱۵: مثال: معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های آن عبارت است از:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \quad (12)$$

حل: چون باید دو ثابت را حذف کنیم، مشتق دوم را به دست می‌آوریم

$$y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} \quad (13)$$

$$y'' = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} \quad (14)$$

حذف c_1 از دو معادله (۱۳) و (۱۴) به $y'' + y' = 6c_2 e^{2x}$ منتهی می‌گردد، حذف

c_2 از دو معادله (۱۲) و (۱۳) به $y' + y = 3c_2 e^{2x}$ منجر می‌گردد. از این رو به دست می‌آوریم.

$$y'' + y' = 2(y' + y)$$

$$y'' - y' - 2y = 0$$

۱-۲-۱۶: تمرین: معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های آن عبارت است از:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (15)$$

توجه کنید که در (۱۵) α و A پارامتر اختیاری هستند.

۱-۲-۱۷ جواب عمومی، جواب خصوصی، شرایط اولیه

یک خانواده n -پارامتری از جواب‌های یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام را معمولاً **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل می‌نامیم و تابعی که از یک مجموعه معین از مقادیر به دست می‌آید را **جواب خصوصی** معادله دیفرانسیل می‌نامیم. برای مثال، $y = ce^{2x}$ که خانواده ۱-پارامتری از جواب‌های $y' - 2y = 0$ است را جواب عمومی می‌نامیم و اگر قرار دهیم $c = -1$ ، آنگاه $y = -e^{2x}$ را یک جواب خصوصی می‌نامیم. روشن است که از جواب عمومی می‌توان تعداد بی‌شمار جواب خصوصی به دست آورد.

جواب عمومی، باید شامل همه جواب‌های معادله دیفرانسیل باشد. یعنی باید هر جواب خصوصی را بتوان با نسبت دادن مقادیر مناسب به ثابت‌های $c_1, c_2, \dots, c_n$ به دست آورد. ولی، معادلات دیفرانسیلی وجود دارند که همه جواب‌های آن از خانواده n -پارامتری از جواب‌ها به دست نمی‌آیند. برای مثال معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y = xy' + (y')^2 \quad (16)$$

دارای خانواده ۱-پارامتری زیر به عنوان جواب است.

$$y = cx + c^2 \quad (17)$$

معمولاً، این جواب را به دلیل اینکه یک ثابت اختیاری است جواب عمومی می‌نامیم ولی به معنی واقعی، جواب عمومی نیست، زیرا شامل همه جواب‌های خصوصی نمی‌باشد. مثلاً تابع

$$y = -\frac{x^2}{4} \quad (18)$$

نیز یک جواب (۱۶) است. و نمی‌توان این جواب را از (۱۷)، به ازای مقداری که به c نسبت می‌دهیم، به دست آورد.

جواب‌هایی از نوع (۱۸)، یعنی، آنهایی که از یک خانواده n -پارامتری یا جواب عمومی به دست نمی‌آیند را جواب‌های منفرد می‌نامیم. در این متن معمولاً هر خانواده n -پارامتری از جواب‌ها را جواب عمومی می‌نامیم.

۱-۲-۱۸ مثال: فرض کنید موقعیت جسمی در لحظه t از مبدأ توسط خانواده ۲-پارامتری

$$x = 16t^2 + c_1 t + c_2 \quad (19)$$

داده شده است. ثابت‌ها را به قسمی انتخاب کنید که جسم در $t=0$ در ۱۰ فوتی از مبدأ بوده و با سرعت ۲۰ فوت بر ثانیه حرکت کند.

حل: در اینجا سرعت توسط مشتق‌گیری از (۱۹) به دست می‌آید.

$$v = 32t + c_1 \quad (20)$$

از این رو ثابت‌های c_1 ، c_2 باید به قسمی انتخاب شوند که وقتی $t=0$ ، $x=10$ داشته باشیم $v=20$. با جایگذاری این مقادیر به جای v, x, t در (۱۹) و (۲۰)، در می‌یابیم که $c_1=20$ ، $c_2=10$ بنابراین جواب خصوصی که در شرایط داده شده این مسأله صدق می‌کنند عبارت است از:

$$x = 16t^2 + 20t + 10$$

۱-۱۹-۱ تعریف: n شرط که به ما امکان می‌دهد تا مقادیر ثابت دلخواه $c_n, \dots, c_2, c_1$ را در یک خانواده n -پارامتری به گونه‌ای تعیین کنیم که همه شرایط در نقطه $x = x_0$ داده شده باشند، شرایط اولیه نامیده می‌شوند. یک معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را یک مسأله با مقدار اولیه می‌نامیم.

۱-۲-۲۰ تذکر: معمولاً تعداد شرایط اولیه باید با مرتبه معادله دیفرانسیل برابر باشد. البته، حالت‌های استثنایی نیز وجود دارد که در آنها می‌توان این شرایط را تعمیم داد.

۲-۲۱ مثال: ابتدا جواب عمومی

$$yy' = (y+1)^2 \quad (21)$$

را پیدا کرده سپس جواب خصوصی را که در شرط $y(2)=0$ (نماد $y(2)=0$ به این معناست که نقطه $(2,0)$ باید بر جواب خصوصی واقع باشد و یا در آن صدق کند) صدق می‌کند تعیین کنید.

حل: اگر $y \neq -1$ ، می‌توانیم دو طرف معادله (۲۱) را بر $(y+1)^2$ تقسیم کنیم. لذا به‌دست می‌آوریم.

$$\int \frac{y}{(y+1)^2} dy = \int dx \quad y \neq -1$$

بنابراین، با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x + c \quad y \neq -1 \quad (22)$$

که جواب عمومی خواسته شده است. برای یافتن جواب خصوصی که در شرط $y(2)=0$ صدق می‌کند با قرار دادن $x=2$ ؛ $y=0$ در (۲۲) به‌دست می‌آوریم

$$c = -1 \quad \text{یا} \quad 2 + c = 1$$

در نتیجه جواب خصوصی از قرار دادن $c = -1$ در (۲۲) به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x - 1, \quad y \neq -1$$

توجه کنید که تابع تعریف شده توسط $y = -1$ نیز جوابی از (۲۱) است (درستی این مطلب را تحقیق کنید). از این رو $y+1=0$ نیز جواب منفردی از معادله (۲۱) است که از (۲۲) به‌دست نمی‌آید.

۲-۲۲ تمرین‌های بخش ۲-۱

۱. نشان دهید که تابع سمت راست یک خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیل سمت چپ است.

$$y'' + y' - x^2 - 2x = 0, \quad y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{x^3}{3} \quad (\text{الف})$$

$$y'' + 3y' + 2y - 12e^x = 0, \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + 2e^x \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0, \quad y = c_1 x^{-2} + c_2 e^{-2} \ln x \quad (\text{ج})$$

۲. معادله دیفرانسیلی را تعیین کنید که خانواده $-n$ پارامتری داده شده جواب آن باشد.

$$y = cx + c^3 \quad (\text{الف})$$

$$y = c_1 e c_2 x \quad (\text{ب})$$

$$y = c_1 \cos^3 x + c_2 \sin^3 x \quad (\text{ج})$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \quad (\text{د})$$

$$r = a(1 - \cos \theta) \quad (\text{ه})$$

۳. معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که جواب آن عبارت است از:

(الف) خانواده دایره‌هایی به شعاع معین که مراکزشان بر محور x واقع باشد.

(ب) خانواده دایره‌هایی به مرکز (h, k) و شعاع معین.

(ج) خانواده خطوط راستی که عرض از مبدا آنها تابعی از شیب خطوط باشد.

(د) خانواده خطوط راستی که بر دایره $x^2 + y^2 = c^2$ مماس باشند.

(ه) خانواده خطوط راستی که بر سهمی $y^2 = 2x$ مماس باشند.

۳-۱ هم‌شیب یک معادله

در بخش‌های بعد روش‌های متعددی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را مطالعه خواهیم کرد. قبل از مطالعه این روش‌های حل، نگاهی کوتاه از نقطه نظر هندسی به حل این گونه معادلات می‌کنیم.

۱-۳-۱ تعریف: معادله مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (۱)$$

را در نظر بگیرید. می‌توان معادله (۱) را به‌عنوان دستگاهی در نظر گرفت که به هر نقطه (a, b) در حوزه تعریف تابع f جهتی با ضریب زاویه‌ای $f(a, b)$ نسبت می‌دهد. در نتیجه می‌توان در مورد میدان راستای معادله دیفرانسیل صحبت کرد. در واقع هر جواب معادله (۱) باید نموداری داشته باشد، که در هر نقطه دارای راستایی است که معادله (۱) ایجاب می‌کند. این مطلب را می‌توان به‌طور اساسی با ترسیم منحنی‌هایی که هم‌شیب نامیده می‌شوند، یعنی، منحنی‌هایی در امتداد راستایی که توسط (۱) مشخص شده است انجام داد.

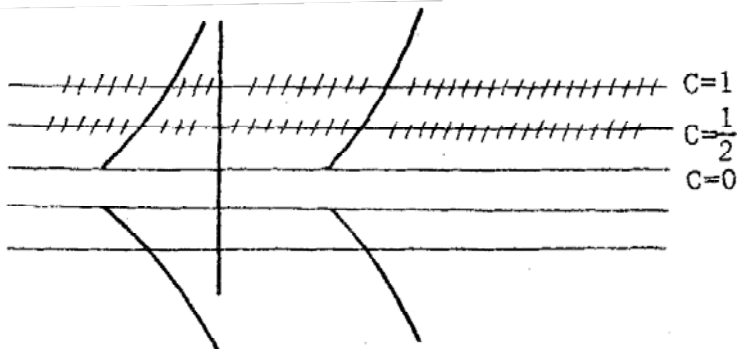
۲-۳-۱ مثال: معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (۲)$$

را در نظر بگیرید. هم‌شیب‌ها خطوط راست $f(x, y) = y = c$ هستند. به ازای هر مقدار c ، خطی را به دست می‌آوریم که، در هر نقطه بر این خط، راستای منحنی جواب‌ها که توسط معادله دیفرانسیل مشخص می‌شود، برابر با c است.

برای نمونه، در هر نقطه بر خط $y = 1$ معادله (۲) راستایی با ضریب زاویه‌ی ۱ را مشخص می‌کند. در شکل (۱) تعداد متعددی از این هم‌شیب‌ها را رسم کرده‌ایم که راستای وابسته به هر هم‌شیب را توسط یک علامت کوچک نشان داده شده است. اگر از هر نقطه در صفحه شروع کرده و در امتداد یک منحنی که راستایش همیشه در

راستای مشخص شده باشد، پیش برویم، آنگاه یک منحنی جواب به دست می آید. تعدادی از منحنی های جواب در شکل (۱) رسم شده اند.



شکل (۱)

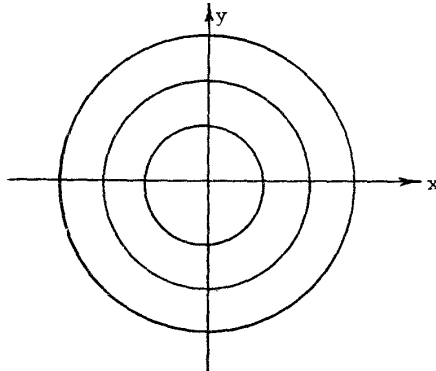
۱-۳-۳ مثال: با استفاده از هم شیب ها تعدادی از منحنی های جواب معادله

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (۳)$$

را رسم کنید.

حل: در اینجا هم شیب ها دایره های $x^2 + y^2 = c$ ، با $c > 0$ هستند. وقتی $c = \frac{1}{4}$ ، شعاع هم شیب ها $\frac{1}{2}$ است. به ازای $c = 1$ ، شعاع هم شیب ها برابر ۱ و به ازای $c = 4$ ، شعاع هم شیب ها ۲ می باشد.

در شکل (۲) برخی از این هم شیب ها را رسم کرده ایم. با مشخص کردن راستای مناسب بر هر یک از این دایره ها می توان تعدادی از جواب های (۳) را رسم کرد.



شکل (۲)

۱-۳-۴ تمرین: برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر تعدادی از هم‌شیب‌ها را با راستای مناسب مشخص کرده و تعدادی از منحنی‌های جواب را رسم کنید.

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{(ب)}$$

در زیر یک قضیه مهم در مورد وجود و یگانگی جواب‌ها را بدون اثبات ارائه می‌دهیم.

۱-۳-۵ قضیه: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم T نمایش ناحیه مستطیل شکل تعریف شده توسط

$$|y - y_0| \leq b, \quad |x - x_0| \leq a$$

به مرکز (x_0, y_0) باشد. همچنین فرض کنیم f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ توابع پیوسته‌ای از x و y در T باشند. در این صورت بازه‌ای حول x_0 مانند $|x - x_0| \leq h$ و یک تابع $y(x)$ با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

- (الف) $y = y(x)$ جوابی از معادله (۱) در بازه $|x - x_0| \leq h$ صدق می‌کند.
 (ب) در بازه $|x - x_0| \leq h$ ، $y(x)$ در نابرابری $|y(x) - y_0| \leq b$ صدق می‌کند.
 (پ) $y(x)$ در بازه $|x - x_0| \leq h$ یگانه است، به عبارت دیگر $y(x)$ تنها تابعی است که همه ویژگی‌های (الف)، (ب) و (پ) را داراست.

در مثال ۱-۳-۳، (x_0, y_0) را می‌توان نقطه دلخواهی در نظر گرفت، چون $f(x, y) = y$ و مشتق جزئی آن $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ در هر مستطیلی پیوسته می‌باشد. بنابراین قضیه وجودی، وجود دقیقاً یک جواب را که از هر نقطه (x_0, y_0) می‌گذرد، تضمین می‌کند.

مجدداً در مثال ۱-۳-۴، تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ و مشتق جزئی آن، یعنی $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ، در هر مستطیلی پیوسته هستند. نتیجه می‌شود که از هر نقطه دلخواه (x_0, y_0) در صفحه، دقیقاً یک منحنی جواب می‌گذرد.

در بخش‌های بعدی این فصل روش‌های حل برخی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و کاربردهای آنها را بررسی خواهیم کرد.

۴-۱ معادلات دیفرانسیل جداسدنی

۴-۱-۱ معادله دیفرانسیل جداسدنی

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اولی را بتوان به صورت

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \quad (1)$$

نوشت، که در آن ضریب dx تنها تابعی از x و ضریب dy تنها تابعی از y باشد، آنگاه آن معادله را جدا شدنی می‌نامیم. در این صورت جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = c$$

که در آن c ثابتی اختیاری است.

۱-۴-۲ مثال: معادله دیفرانسیل $x\sqrt{1-y} dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0$ را حل کنید.

نخست توجه کنید که معادله دیفرانسیل تنها به ازای $y \leq 1$, $|x| \leq 1$ معنی دارد. علاوه بر این اگر $y \neq 1$, $x \neq \pm 1$ آنگاه با تقسیم دو طرف معادله بر $\sqrt{1-y}\sqrt{1-x^2}$ ، به دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad y < 1$$

اینک این معادله به صورت (۱) است و جواب عمومی آن عبارت است از:

$$\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-y} = c, \quad -1 < x < 1, \quad y < 1$$

همچنین توجه کنید که $y=1$ نیز به ازای مقادیر x بین -1 و 1 در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

۱-۴-۳ مثال: مسأله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$2x(y+1)dx - ydy = 0$$

$$y(0) = -2$$

حل: معادله را به ازای $y \neq -1$ می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{y}{y+1} dy = 2x dx$$