



معادلات دیفرانسیل

(کلیه رشته‌ها)

دکتر فیصل حسنی دکتر علی عبادیان دکتر هادی رحمانی‌فضلی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چند هزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

مقدمه مؤلفین	نه
فصل اول. معادلات دیفرانسیل و مدل سازی	۱
هدف کلی	۱
هدف های یادگیری	۱
۱-۱ معادلات دیفرانسیل	۲
۲-۱ مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی	۴
۳-۱ مدل های ریاضی	۹
۴-۱ چرخه مدل سازی	۱۰
۵-۱ روش های کیفی	۱۰
فصل دوم. معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول و کاربردهای آن	۱۵
هدف کلی	۱۵
هدف های یادگیری	۱۵
۱-۲ فرم استاندارد معادله دیفرانسیل	۱۶
۲-۲ معادلات خطی	۱۶
۳-۲ معادلات برنولی	۱۷
۴-۲ معادلات همگن	۱۷
۵-۲ معادلات جدایی پذیر	۱۷
۶-۲ معادلات کامل	۱۸
۷-۲ روش حل معادلات جدایی پذیر مرتبه اول	۲۵

۲۶	حل مسائل مقدار اولیه	۸-۲
۲۶	روش حل معادلات همگن	۹-۲
۳۹	معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل	۱۰-۲
۴۰	عامل انتگرال ساز	۱۱-۲
۵۲	معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول	۱۲-۲
۵۲	معادلات برنولی	۱۳-۲
۶۳	فصل سوم. کاربردهایی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول	
۶۳	هدف کلی	
۶۳	هدف‌های یادگیری	
۶۴	۱-۳ مسائل رشد و نمو	
۶۴	۲-۳ مسائل حرارت	
۶۵	۳-۳ مسائل تعادل قیمت	
۶۶	۴-۳ مسائل سیالات	
۶۷	۵-۳ مدارهای الکتریکی	
۶۷	۶-۳ مسیرهای متعامد	
۹۹	فصل چهارم. معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و مرتبه n خطی	
۹۹	هدف کلی	
۹۹	هدف‌های یادگیری	
۱۰۰	۱-۴ معادلات دیفرانسیل خطی	
۱۰۱	۲-۴ جواب‌های مستقل خطی (اساسی)	
۱۰۳	۳-۴ معادلات غیرهمگن	
۱۱۱	۴-۴ معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت	
۱۱۲	۵-۴ جواب عمومی	

۶-۴	معادلات دیفرانسیلی همگن خطی مرتبه n با ضرایب ثابت	۱۱۹
۷-۴	روش ضرایب نامعین برای معادلات دیفرانسیل مراتب بالا	۱۲۷
۸-۴	نمایش ساده از این روش	۱۲۷
۹-۴	روش تغییر پارامترها	۱۴۱
۱۰-۴	روش تغییر پارامتر	۱۴۲
۱۵۳	فصل پنجم. حل معادلات دیفرانسیل خطی با استفاده از سریهای توانی	
۱۵۳	هدف کلی	
۱۵۳	هدفهای یادگیری	
۱۵۵	۱-۵ جوابهای حول نقطه عادی صفر در معادلات همگن	
۱۵۷	۲-۵ جوابها حول نقطه عادی $x = x_0$	
۱۷۰	۳-۵ سری جوابهای موجود در مجاورت نقطه غیرعادی منظم	
۱۷۳	۴-۵ جوابهای عمومی	
۱۹۷	فصل ششم. معادلات دیفرانسیل کلاسیک و توابع خاص	
۱۹۷	هدف کلی	
۱۹۷	هدفهای یادگیری	
۱۹۸	۱-۶ معادلات دیفرانسیل کلاسیک و توابع خاص	
۱۹۸	۲-۶ حل چندجمله‌ها و مفاهیم وابسته	
۲۰۶	۳-۶ توابع خاص	
۲۰۶	۴-۶ تابع گاما	
۲۰۷	۵-۶ تابع بسیل	
۲۲۱	فصل هفتم. تبدیلات لاپلاس و کاربرد آن در حل معادلات	
۲۲۱	هدف کلی	
۲۲۱	هدفهای یادگیری	

۲۲۲	تبدیل لاپلاس	۱-۷
۲۲۳	ویژگی‌های تبدیل لاپلاس	۲-۷
۲۲۳	توابعی از متغیرهای مستقل	۳-۷
۲۳۸	تبدیلات معکوس لاپلاس	۴-۷
۲۴۵	توابع تلفیقی و تابع پله‌ای واحد	۵-۷
۲۵۸	حل معادلات خطی با ضرایب ثابت	۶-۷
۲۵۹	تبدیل لاپلاس مشتق	۷-۷
۲۵۹	روش‌های حل معادلات دیفرانسیل	۸-۷
۲۷۱	حل دستگاه‌های معادلات خطی	۹-۷
۲۷۸	مراجع	

مقدمه مؤلفین

بی شک یکی از اهداف مهم علوم مختلف بشری کشف مجهولات جهان می‌باشد. در این راستا دانشمندان اطلاعات به دست آمده در مورد مجهول خود را در قالب الگوهای ریاضی به خصوص معادلات، مدل سازی می‌کنند و لذا حل معادلات در پیشرفت علوم جایگاه ویژه‌ای دارد و بدین خاطر از معادلات به عنوان زبان طبیعت یاد می‌شود.

تاکنون کتابهای متعددی در مبحث معادلات دیفرانسیل تألیف و یا به فارسی ترجمه و منتشر شده است. اغلب این کتابها معمولاً با برنامه درسی مصوب این درس مطابقت ندارند و یا حجم بسیار بالایی دارند. به همین جهت با بهره‌مندی از سابقه تدریس چندین ساله درس معادلات دیفرانسیل رشته‌های ریاضی، مهندسی و سایر رشته‌های علوم، نسبت به تألیف کتاب حاضر تصمیم گرفته شد. البته لازم به ذکر است که کتاب حاضر با رویکرد پوشاندن نیازهای دانشجویان و پوشش مصوبه شورای عالی برنامه‌ریزی ستاد انقلاب فرهنگی و براساس مطالعه و بررسی بسیاری از کتابهای معادلات دیفرانسیل موجود، تألیف شده است. مطالب این کتاب در هفده فصل تنظیم گردیده است و در هر فصل مثالهای حل شده متعددی جهت تفهیم موضوعات ارائه شده است و همچنین مسائل کاربردی زیادی در این کتاب مورد بررسی قرار گرفته است، تا دانشجویان بتوانند درک بهتری از رابطه معادلات دیفرانسیل با مسایل زندگی واقعی داشته باشند. در این جا لازم می‌دانیم که از همکاری همه کسانی که تألیف و آماده سازی این کتاب با کمک‌های آنان میسرگشت، تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از زحمات مسئولین انتشارات دانشگاه نیز بسیار سپاسگزاریم. دکتر علی عبادیان، دکتر فیصل حسینی، دکتر هادی رحمانی فضلی

شهریور ۱۳۹۴

فصل اول

معادلات دیفرانسیل و مدل سازی

هدف کلی

آشنایی با معادلات دیفرانسیل و مدل سازی پدیده ها

هدف های یادگیری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:

۱. معادلات دیفرانسیل را تعریف کند.
۲. مرتبه، جواب معادلات دیفرانسیل تعریف کند.
۳. با نحوه مدل سازی مسائل طبیعی آشنا گردد.

در این فصل به معرفی معادلات دیفرانسیل با ارائه مثال های متنوع پرداخته و در خصوص روش مدل سازی برخی از موضوعات کاربردی بحث خواهد شد.

۱-۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف. یک معادله دیفرانسیلی، معادله‌ای است که شامل یک تابع مجهول (یک یا چند متغیره مستقل) و مشتقات آن است.

مثال ۱.۱. عبارات زیر شامل معادلات دیفرانسیل با تابع مجهول y هستند.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3y \quad (۱)$$

$$e^y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + x^2 \quad (۲)$$

$$4 \frac{d^3 y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2 y}{dx^2} + 5xy = 0 \quad (۳)$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + 3y \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + y^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 5x^2 - 3 \quad (۴)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (۵)$$

یک معادله دیفرانسیل، زمانی معادله دیفرانسیل معمولی^۱ (ODE) است که تابع مجهول فقط به یک متغیر مستقل وابسته باشد. اگر تابع مجهول به دو یا چند متغیر مستقل وابسته باشد، معادله دیفرانسیل را یک معادله دیفرانسیل جزئی^۲ (PDE) می‌نامیم. البته بسیاری از پدیده‌ها پس از مدل‌سازی و تبدیل به معادله از نوع ODE یا PDE خواهد بود.

مثال ۲.۱. معادلات (۱) تا (۴) نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل معمولی هستند، چون تابع مجهول y تنها به متغیر x وابسته است. معادله (۵) یک معادله دیفرانسیل جزئی است، چون u به دو متغیر مستقل t و x وابسته است.

تعریف. مرتبه یک معادله دیفرانسیل برابر با بالاترین درجه‌ی مشتق موجود در معادله است.

مثال ۳.۱. معادله (۱) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است و معادلات (۲) و (۴) و (۵) معادلات مرتبه دوم هستند. [مرتبه معادله دیفرانسیل (۴) برابر بالاترین مشتق موجود در معادله، (۲) است.] معادله (۳) نیز معادله مرتبه سوم است.

1) ordinary differential equation 2) partial differential equation

قرار داد. عبارات y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ به ترتیب مشتق های اول، دوم، سوم، ... و n ام از y نسبت به متغیر مستقل را نشان می دهند. بنابراین اگر x متغیری مستقل باشد، آنگاه y'' بیانگر $\frac{d^2 y}{dx^2}$ است و $\frac{d^2 y}{dp^2}$ وقتی به کار می رود که متغیر مستقل p باشد. مشاهده می شود پرانتز در $y^{(n)}$ برای تشخیص مشتق از توان n ام استفاده می شود. اگر متغیر مستقل، متغیر زمان باشد که معمولاً با t نشان داده می شود، غالباً پرایم ها با نقطه ها جایگزین می شوند. پس $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ به ترتیب بیانگر $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{d^2 y}{dt^2}$ هستند. البته این نمادگذاری اغلب در متون فیزیک بکار می روند.

تعریف. یک جواب برای معادله دیفرانسیل با تابع مجهول y و متغیر مستقل x روی بازه I ، تابعی مانند $y(x)$ است که در معادله دیفرانسیل به ازای همه x های عضو I صدق کند.

مثال ۴.۱. آیا $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ به طوری که c_1 و c_2 ثابت های دلخواهی هستند جوابی از معادله $y'' + 4y = 0$ است؟

حل: با مشتق گیری از y داریم،

$$y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x, \quad y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$$

در این صورت

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1) \sin 2x + (-4c_2 + 4c_2) \cos 2x = 0. \end{aligned}$$

بنابراین $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ به ازای همه مقادیر x در معادله دیفرانسیل صدق می کند و یک جواب برای معادله دیفرانسیل روی بازه $(-\infty, \infty)$ می باشد.

مثال ۵.۱. بررسی کنید که آیا $y = x^2 + 1$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل $(y')^2 + y^2 = -4$ است.

حل: سمت چپ معادله دیفرانسیل به ازای هر x و هر تابع حقیقی $y(x)$ نامنفی می باشد. در حالی که سمت راست معادله منفی است. پس $y = x^2 + 1$ نمی تواند جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد.

با توجه به دو مثال بالا ملاحظه می‌شود که تعدادی از معادلات دیفرانسیل بی نهایت جواب دارند، در حالی که برخی از معادلات دیفرانسیل جوابی ندارند، همچنین امکان دارد یک معادله دیفرانسیلی دقیقاً یک جواب داشته باشد.

یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل، یک جواب برای معادله می‌باشد ولی جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مجموعه تمام جواب‌ها برای یک معادله دیفرانسیلی است.

مثال ۶.۱. با استفاده از مطالب مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی در فصل‌های بعدی می‌توان نشان داد که جواب عمومی معادله دیفرانسیل مثال ۴.۱ به صورت $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ می‌باشد. بنابراین هر جواب خصوصی، این فرم عمومی را دارد. تعدادی از جواب‌های خصوصی به صورت زیر هستند:

$$y = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x (c_1 = 4, c_2 = -3) \text{ (الف)}$$

$$y = \sin 2x (c_1 = 1, c_2 = 0) \text{ (ب)}$$

$$y \equiv 0 (c_1 = c_2 = 0) \text{ (ج)}$$

۲-۱ مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی

در صورتی که یک معادله ODE را بخواهیم تحت شرط (یا شرایطی) در یک نقطه مشخص حل کنیم، به آن مسئله مقدار اولیه می‌گوئیم و چنان که آن معادله را با شرایطی در نقاط ابتدا یا انتهایی یک بازه مشخص حل کنیم به آن مسئله مقدار مرزی می‌نامیم.

مثال ۷.۱. معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' = e^x$ و $y(\pi) = 2$ و $y'(\pi) = 2$ یک مسئله مقدار اولیه می‌باشد. زیرا هر دو شرط داده شده در $x = \pi$ هستند. مسئله $y'' + 2y' = e^x$ و $y(1) = 1$ و $y(0) = 1$ یک مسئله مقدار مرزی می‌باشد. زیرا دو شرط داده شده در دو نقطه متفاوت $x = 1$ و $x = 0$ می‌باشند.

مثال ۸.۱. مشخص کنید آیا توابع $y_1(x) = \sin 2x$, $y_2(x) = x$ و یا $y_3(x) = \frac{1}{4} \sin 2x$ جوابی برای مسئله مقدار اولیه $y'' + 4y = 0$ با شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ هستند؟
 حل: $y_1(x)$ جوابی برای معادله دیفرانسیل است و در شرط اولیه $y(0) = 0$ صدق می کند، چون $y_2(x)$ در دومین شرط معادله صدق نمی کند، بنابراین جوابی برای مسئله مقدار اولیه نیست. $y_3(x)$ در هر دو شرط اولیه صدق می کند اما در معادله دیفرانسیل صادق نیست و از این رو جوابی برای معادله دیفرانسیل نیست. $y_3(x)$ هم در معادله دیفرانسیل و هم در هر دو شرط اولیه صدق می کند. بنابراین جوابی برای معادله دیفرانسیل اولیه است.

مثال ۹.۱. جوابی برای مسئله مقدار اولیه $y' + y = 0$, $y(3) = 2$ بیابید، در صورتی که بدانیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y(x) = c_1 e^{-x}$ باشد که c_1 یک ثابت دلخواه است.
 حل: از آنجایی که به ازای همه مقادیر x , $y(x)$ جوابی برای معادله دیفرانسیل می باشد؛ مقداری از c_1 را می یابیم که شرط اولیه نیز در آنها برقرار باشد. توجه داریم که $y(3) = c_1 e^{-3}$ برای برقراری شرط اولیه $y(3) = 2$ کافی است c_1 را از $2 = c_1 e^{-3}$ به دست می آوریم: ($c_1 = 2e^3$) با جایگذاری این مقدار بجای c_1 در $y(x) = 2e^3 e^{-x} = 2e^{3-x}$ جوابی برای مسئله اولیه به دست می آید.

مثال ۱۰.۱. جوابی برای مسئله با مقدار مرزی $y'' + 4y = 0$ با شرایط $y(\pi/6) = 0$ و $y(\pi/8) = 0$ بیابید.

حل: در صورتی که جواب عمومی معادله به صورت $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ باشد، داریم:

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = c_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

برای برقراری شرط $y(\pi/8) = 0$ نیز داریم:

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = c_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

به علاوه،

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = c_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = c_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

برای برقراری دومین شرط $y(\pi/6) = 1$ نیز داریم:

$$c_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (2)$$

از حل روابط (۱) و (۲) داریم:

$$c_1 = -c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

با جایگذاری این مقادیر در $y(x)$ داریم:

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}-1}(\sin 2x - \cos 2x)$$

که جوابی برای مسأله مقدار مرزی است.

مثال ۱۱.۱. جوابی برای مسأله با مقدار مرزی $y'' + 4y = 0$ با $y(\pi/2) = 0$ و $y(0) = 1$ بیابید،

در صورتی که جواب عمومی معادله به صورت $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ باشد.

حل: چون $y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_2 = 1$ باید $c_2 = 1$ را برای برقراری شرط $y(0) = 1$

انتخاب کنیم و چون $y(\pi/2) = c_1 \sin(\pi) + c_2 \cos(\pi) = -c_2$ باید $c_2 = -2$ را برای شرط دوم

انتخاب کنیم. بنابراین برای برقراری هر دو شرایط مرزی به طور همزمان نیاز به c_2 با دو مقدار ۱ و -۲ داریم

که این غیرممکن است. بنابراین چنین جوابی برای این مسأله وجود ندارد.

مثال ۱۲.۱. c_1 و c_2 را در $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2 \sin x$ طوری بیابید، که شرایط $y(0) = 0$

و $y'(0) = 1$ برقرار باشند.

حل: چون $\sin(0) = 0$ و $y(0) = c_1 + c_2$ برای برقراری شرط $y(0) = 0$ داریم:

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (1)$$

چون

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2 \cos x$$

داریم:

$$y'(\circ) = 2c_1 + c_2 + 2 \text{ پس برای برقراری } y'(\circ) = 1 \text{ داریم } 2c_1 + c_2 + 2 = 1 \text{ یا}$$

$$2c_1 + c_2 = -1 \quad (2)$$

که باحل (۱) و (۲)، $c_1 = -1$ و $c_2 = 1$ را به دست می آوریم.

تمرینات

در مسائل ۱۴ الی ۲۳، الف) مرتبه ب) تابع مجهول و ج) متغیر مستقل را برای همه معادلات دیفرانسیل مفروض مشخص کنید.

$$(y'')^2 - 3yy' + xy = x^2 + 2 \quad 14.1$$

$$x^4 y^{(4)} + xy''' = e^x + \sin x \quad 15.1$$

$$t^2 \ddot{s} - t\dot{s} = 1 - \sin t \quad 16.1$$

$$y^{(4)} + xy''' - xy' + \sin y = 0 \quad 17.1$$

$$\frac{d^m x}{dy^n} = y^2 + 1 \quad 18.1$$

$$\left(\frac{d^2 r}{dy^2}\right)^2 + \frac{d^2 r}{dy^2} + y \frac{dr}{dy} = 0 \quad 19.1$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}} + y = xy^3 \quad 20.1$$

$$\frac{d^2 b}{dp^2} = 3p + \left(\frac{db}{dp}\right)^{1/2} \quad 21.1$$

$$\left(\frac{db}{dp}\right)^4 = 3p \quad 22.1$$

$$y^{(6)} + 2y^4 y^{(3)} + 5y^8 = e^x \quad 23.1$$

۲۴.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $y' - 5y = 0$ است؟

$$\text{الف) } y = 5 \quad \text{ب) } y = 5x \quad \text{ج) } y = x^5 \quad \text{د) } y = e^{5x}$$

۲۵.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $y' - 3y = 6$ است؟

$$\text{الف) } y = e^x + 1 \quad \text{ب) } y = e^{3x} - 2 \quad \text{ج) } y = e^{3x} - 3 \quad \text{د) } y = e^{3x} - 2$$

۲۶.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $\dot{y} - 2ty = t$ است؟

الف) $y = 2$ ب) $y = e^{t^2}$ ج) $y = e^{t^2} - \frac{1}{2}$ د) $y = -7e^{t^2} - \frac{1}{2}$

۲۷.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$ است؟

الف) $y = 0$ ب) $y = 2t$ ج) $y = -3t$ د) $y = t^2$

۲۸.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 + x^2}{xy^2}$ است؟

الف) $y = x$ ب) $y = x^8 - x^4$ ج) $y = \sqrt{x^8 - x^4}$

د) $y = (x^8 - x^4)^{\frac{1}{2}}$

۲۹.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $y'' - y = 0$ است؟

الف) $y = e^x$ ب) $y = 4e^{-x}$ ج) $y = 0$ د) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

۳۰.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $y'' - xy' + y = 0$ است؟

الف) $y = x^2$ ب) $y = x$ ج) $y = 1 - x^2$ د) $y = 2x^2 - 2$

هـ) $y = 0$

۳۱.۱. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = e^x$ است؟

الف) $x = e^t$ ب) $x = e^{2t}$ ج) $x = e^{2t} + e^t$ د) $x = te^{2t} + e^t$

هـ) $x = e^{2t} + te^t$

در مسائل ۳۲ تا ۳۵ مقدار c را طوری تعیین کنید که مقدار اولیه داده شده در عبارات زیر در معادله

دیفرانسیل $x(t) = ce^{2t}$ صدق کند.

۳۲.۱ $x(0) = 0$ ۳۳.۱ $x(0) = 1$ ۳۴.۱ $x(1) = 1$ ۳۵.۱ $x(2) = -3$

در مسائل ۳۶ تا ۳۹ مقدار x را طوری تعیین کنید که مقدار اولیه داده شده در عبارات زیر در معادله‌ی

$y(x) = c(1 - x^2)$ صدق کند.

۳۶.۱ $y(0) = 1$ ۳۷.۱ $y(1) = 0$ ۳۸.۱ $y(2) = 1$ ۳۹.۱ $y(1) = 2$

در مسائل ۴۰ تا ۴۹ مقدار c_1 و c_2 را طوری تعیین کنید که $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ در مقدار اولیه

داده شده صدق کنند، سپس معین کنید که در شرایط مذکور، کدامیک از حالات شرایط اولیه یا از شرایط مرزی هستند.

$$y(\circ), y'(\circ) = 1 \quad .41.1 \quad y(\circ) = 1, y'(\circ) = 2 \quad .40.1$$

$$y(\circ) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad .43.1 \quad y(\frac{\pi}{4}) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 2 \quad .42.1$$

$$y(\circ) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad .45.1 \quad y(\circ) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad .44.1$$

$$y(\circ) = \circ, y'(\circ) = \circ \quad .47.1 \quad y(\circ) = 1, y(\pi) = 2 \quad .46.1$$

$$y(\circ) = \circ, y'(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad .49.1 \quad y(\frac{\pi}{4}) = \circ, y(\frac{\pi}{8}) = 1 \quad .48.1$$

در مسائل ۵۰ تا ۵۴ مقادیر c_1 و c_2 را طوری بیابید که توابع داده شده در شرایط اولیه صدق نمایند.

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 4 \sin x, y(\circ) = 1, y'(\circ) = -1 \quad .50.1$$

$$y(x) = c_1 x + c_2 + x^2 - 1, y(1) = 1, y'(1) = 2 \quad .51.1$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 3e^{3x}, y(\circ) = \circ, y'(\circ) = \circ \quad .52.1$$

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 1, y(\pi) = \circ, y'(\pi) = \circ \quad .53.1$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 e^x, y(1) = 1, y'(1) = -1 \quad .54.1$$

۳-۱ مدل های ریاضی

مدل های ریاضی را می توان به صورت معادله در نظر گرفت که این موضوع اهمیت معادلات دیفرانسیل را بیشتر می نماید. در این بخش معادله هایی را در نظر خواهیم گرفت که موقعیت هایی از دنیای واقعی را مدل سازی می کنند.

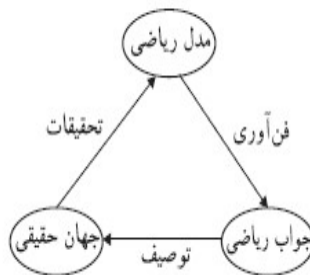
برای مثال؛ هنگامی که یک جریان مستقیم ساده (DC) را در مدار الکتریکی در نظر می گیریم، معادله $V = RI$ افت ولتاژ را (بر حسب ولت) مدل می کند، در طرف دیگر، R مقاومت الکتریکی (بر حسب اهم) و I جریان (بر حسب آمپر) است. این معادله به نام قانون اهم^۲ می باشد و به احترام اهم^۳ (۱۷۸۷-۱۸۵۴)، فیزیکدان آلمانی نام گذاری شده است. برخی از مدل ها می توانند برای پیش بینی بسیاری از شرایط فیزیکی

1) direct current 2) Ohm's Law 3) C. S. Ohm

به کار روند. برای مثال، پیش‌بینی وضع هوا، رشد تومورهای سرطانی، نتیجه به دست آمده از یک قمار^۱؛ همگی می‌توانند با مدل‌های ریاضی ارتباط داشته باشند. در این بخش ما متغیرهایی را؛ که پیوسته هستند و اینکه چگونه معادلات دیفرانسیل می‌توانند در مدل‌سازی استفاده شوند.

۴-۱ چرخه مدل‌سازی

فرض کنید یک شرایط واقعی داریم (می‌خواهیم مقدار رادیو اکتیو یک عنصر را بیابیم). تحقیقات ممکن است، قادر به مدل‌سازی این موقعیت‌ها باشند. (به شکل یک معادله دیفرانسیل بسیار پیچیده است). تکنولوژی شاید بتواند ما را در حل این معادله کمک کند (برنامه‌های کامپیوتری جواب را برای ما مشخص می‌کنند). در این صورت، پاسخ‌های تکنولوژی در موقعیت‌های زندگی روزمره تفسیر شده و مورد بحث قرار می‌گیرند. شکل (۱.۱) این چرخه را توصیف می‌کند.



شکل ۱.۱: چرخه مدل‌سازی

۵-۱ روشهای کیفی

ساخت یک مدل می‌تواند یک فرآیند طولانی و پر زحمت باشد و ممکن است سالها به تحقیق نیاز داشته باشد تا آنها فرمول‌بندی شوند. البته با توجه به اهمیت برخی از موضوعات در راستای تکامل بشری در بحث مدلسازی گاهی مطالعات طولی انجام می‌پذیرد. امکان دارد حل این مدلها به روش تحلیلی غیرممکن باشد،

1) roulette wheel

لذا محقق دو راه دارد:

- ساده کردن و مختصر کردن مدل، تا بدین وسیله مدل کنترل پذیرتر باشد که این راهکاری صحیح است.
- ساده کردن مدل، آسیبی به ارتباط آن با دنیای واقعی نمی زند، بنابراین؛ این روش سودمند می باشد.
- حفظ کردن مدل، به طوری که از دیگر تکنیک ها استفاده شود؛ مثل روش های عددی یا گرافیکی که بیانگر یک روش کیفی است. هر چند دارای یک جواب تحلیلی نمی باشد ولی به برخی اطلاعات دست می یابیم که مدل و کاربرد آن را روشنتر می سازد. ابزارهای تخصصی با این روش می توانند بی نهایت مؤثر واقع شوند.

تمرینات

۵۵.۱. در باره مدل $I = \frac{dq}{dt}$ بحث کنید.

حل: این فرمول در الکتریسیته کاربرد دارد. I نشان دهنده بار الکتریکی بر حسب کولن و t بیانگر زمان بر حسب ثانیه می باشد.

۵۶.۱. در باره مدل $m \frac{d^2y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + ky = F(t)$ بحث کنید.

حل: این یک مدل کلاسیک از سیستم جرم - فنر می باشد. در اینجا، y جابه جایی بر حسب متر، t زمان بر حسب ثانیه، m جرم توده بر حسب kg ، a اصطحکاک یا ثابت اصطحکاک می باشد که بر حسب $\frac{kg}{sec}$ است، k ثابت فنر $\frac{kg}{sec^2}$ ، $F(t)$ نیروی وارد بر حسب نیوتن است. این مدل کاربردهای مختلفی در مسائل دارد؛ همانند تنظیم ضربه وارد به ماشین. این مدل به سوالات مطرح شده در مورد ستون فقرات انسان پاسخ می دهد.

۵۷.۱. فرض کنید $M(t)$ نشان دهنده جرم یک عنصر بر حسب kg باشد. تحقیقات نشان می دهند که

سرعت آبی تجزیه عنصر $\frac{kg}{yr}$ متناسب با مقدار موجود باشد، یعنی $M'(t) \propto M(t)$. یک مدل برای این رابطه طراحی کنید.

حل: رابطه تناسب $M'(t) \propto M(t)$ می تواند به وسیله وارد کردن ثابت $k(\frac{1}{yr})$ به یک معادله تبدیل شود. بنابراین مدل به $M'(t) = kM(t)$ تبدیل می شود. توجه کنید که $k < 0$ می باشد، چون $M(t)$ از نظر