



دانشگاه پیام نور

معادلات دیفرانسیل

(رشته شیمی)

لیدا فرخو

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

پیشگفتار

۱	فصل اول : معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۱	۱-۱ آشنائی با معادلات دیفرانسیل
۱۱	۲-۱ معادلات دیفرانسیل جدائی پذیر
۳۱	۳-۱ معادلات دیفرانسیل کامل
۵۱	۴-۱ معادلات دیفرانسیل خطی
۶۱	۵-۱ دو نوع معادله مرتبه دوم خاص
۷۳	فصل دوم : برخی کاربردهای معادلات دیفرانسیل
۷۳	۱-۲ سرعت گریز
۷۷	۲-۲ مسیرهای متعامد
۸۳	۳-۲ قانون خنک سازی نیوتون
۸۶	۴-۲ تلاشی ماده رادیواکتیو
۸۹	۵-۲ حل چند مسأله
۹۹	فصل سوم : معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم
۹۹	۱-۳ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن
۱۱۲	۲-۳ معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت
۱۲۹	۳-۳ تعیین یک جواب معادله همگن با استفاده از یک جواب معلوم - معادله کُشی - اوایلر
۱۴۱	۴-۳ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم غیرهمگن
۱۴۶	۵-۳ روش ضرایب نامعین
۱۷۶	۶-۳ روش تغییر پارامترها

۱۹۳	فصل چهارم: جواب‌های سری معادلات دیفرانسیل خطی
۱۹۳	۴-۱ مرور بر سری‌های توان
۲۱۶	۴-۲ جواب‌های سری معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۲۲۰	۴-۳ نقاط معمولی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم
۲۳۷	۴-۴ نقاط منفرد منظم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم
۲۶۳	۴-۵ حالتی که معادله شاخص دارای ریشه‌های برابر است
۲۷۸	۴-۶ حالتی که تفاضل ریشه‌های معادله شاخص عدد صحیح ناصفری است
۲۹۵	۴-۷ نقطه در بی‌نهایت
۳۰۹	فصل پنجم: دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۳۰۹	۵-۱ مقدمه‌ای بر دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل
۳۱۲	۵-۲ دستگاه‌های خطی
۳۲۳	۵-۳ دستگاه‌های خطی همگن با ضرایب ثابت
۳۴۱	۵-۴ دستگاه‌های خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت
۳۴۹	۵-۵ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی
۳۶۱	فصل ششم: تبدیلات لاپلاس
۳۶۱	۶-۱ تبدیل لاپلاس
۳۷۵	۶-۲ شرایط وجود تبدیل لاپلاس
۳۸۶	۶-۳ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال یک تابع
۳۹۴	۶-۴ خواص دیگر تبدیل لاپلاس
۴۰۱	۶-۵ تبدیل لاپلاس توابع متناوب
۴۰۵	۶-۶ تبدیل وارون
۴۱۳	۶-۷ کنولوسیون توابع
۴۱۹	۶-۸ حل مسائل با مقادیر اولیه
	پاسخ به سؤالات و حل مسائل متن
۴۳۹	فهرست منابع و مآخذ

فصل اول

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

حل بسیاری از مسائل در فیزیک، ریاضی، شیمی، مهندسی و ... به بررسی معادله‌ای بین یک تابع مجهول و مشتق‌های آن منجر می‌شود. این چنین معادله‌ای را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم. در این فصل چند نوع معادله دیفرانسیل ساده را معرفی نموده و روش تعیین جواب‌های آنها را مطالعه خواهیم کرد.

۱-۱ آشنایی با معادلات دیفرانسیل

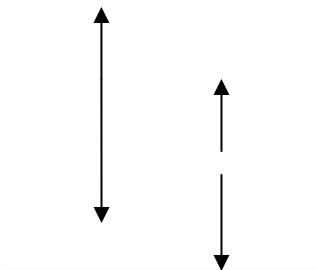
مثال

۱-۱-۱. فرض می‌کنیم جسمی با جرم m از یک بلندی بدون سرعت اولیه رها شود. مثال: اگر تنها نیروهایی که بر این جسم وارد می‌شوند، نیروی جاذبه زمین و نیروی مقاومت هوا باشند و نیروی مقاومت هوا در هر لحظه از نیروی جاذبه زمین کمتر و با سرعت جسم متناسب باشد، آنگاه جسم در اثر وزن خود مسیر مستقیمی را به سمت زمین می‌پیماید. می‌خواهیم مکان جسم متحرک را در هر لحظه مشخص کنیم. فرض می‌کنیم $S = f(t)$ فاصله جسم از نقطه شروع حرکت در لحظه t باشد، در این حالت v سرعت جسم در لحظه t ، برابر است با:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \quad (1)$$

از دو نیرویی که بر جسم وارد می‌شوند یکی به سمت زمین و برابر mg است، که همان وزن جسم است و در آن g شتاب ثقل زمین است و دیگری در سوی عکس نیروی

اولی و برابر kv است که همان نیروی مقاومت هواست و در آن k یک عدد ثابت مثبت است.



اگر شتاب جسم را با a نشان دهیم، داریم

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (2)$$

طبق قانون دوم نیوتن، برآیند نیروهای وارد بر جسم در هر لحظه برابر حاصل ضرب جرم جسم در شتاب آن است، پس:

$$ma = mg - kv$$

یا:

$$a + \frac{k}{m}v = g$$

و با توجه به (۲) داریم:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad (3)$$

که معادله‌ای بین تابع مجهول $v = f'(t)$ و مشتق آن $\frac{dv}{dt}$ است. حال اگر از این معادله

v را به دست آوریم از معادله $\frac{ds}{dt} = v$ ، مکان جسم در هر لحظه مشخص می‌شود.

از طرف دیگر، معادله (۳) را با توجه به معادلات (۱) و (۲) می‌توان به صورت

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{ds}{dt} = g \quad (4)$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۳

نوشت که رابطه‌ای بین $\frac{ds}{dt}$ و $\frac{d^2s}{dt^2}$ یعنی مشتق‌های اول و دوم تابع $s = f(t)$ است و با بررسی این معادله نیز مکان جسم متحرک در هر لحظه مشخص می‌شود. معادلات (۳) و (۴) و معادله $\frac{ds}{dt} = f'(t)$ که هریک شامل یک تابع و مشتق‌های آن هستند، نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل هستند.

۱-۱-۲. هر معادله‌ای بین متغیر مستقل x ، تابع $y = f(x)$ و تعداد متناهی از مشتق‌های y را تعریف یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

تمرین

۱-۱-۳. کدام یک از معادلات زیر یک معادله دیفرانسیل است؟

$$\frac{dy}{dx} = e^x + xy \quad (\text{الف})$$

$$y = \ln \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| + x \frac{dy}{dx} \quad (\text{ب})$$

$$y = \ln|y| + ye^x \quad (\text{پ})$$

$$y \frac{d^4y}{dx^4} = e^x \frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} \quad (\text{ت})$$

پاسخ خود را با [۱-۱-۳] مقایسه کنید.

۱-۱-۴. مرتبه بالاترین مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله می‌نویسیم.

تعریف

۱-۱-۵. مرتبه معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = y \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{مثال:}$$

برابر ۳ و مرتبه معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^6 y}{dx^6} + \sin x \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = y \frac{d^2 y}{dx^2}$$

برابر ۶ است.

تمرین

۱-۱-۶. مرتبه معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + xy^2 = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\sin\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) + e^x \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\left(\frac{d^5 y}{dx^5}\right)^3 - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^4 y}{dx^4} \quad (\text{پ})$$

$$x\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + y\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 = \sin xy \quad (\text{ت})$$

پاسخ خود را با [۱-۱-۶] مقایسه کنید.

مثال

۱-۱-۷. اگر $y = e^x$ باشد داریم

$$\frac{dy}{dx} = e^x = y$$

همانطوری که مشاهده می‌کنیم معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = y$ به ازای تابع $y = e^x$ برقرار است. از این رو $y = e^x$ را یک جواب معادله دیفرانسیل مذکور می‌نامیم و می‌گوییم تابع $y = e^x$ در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = y$ صدق می‌کند. حال اگر C یک عدد ثابت باشد، داریم:

$$\frac{d(Ce^x)}{dx} = C \frac{de^x}{dx} = Ce^x$$

بنابراین برای هر عدد ثابت C ، تابع $y = Ce^x$ نیز در $\frac{dy}{dx} = y$ صدق می‌کند. بدین ترتیب هر مضربی از e^x یک جواب $\frac{dy}{dx} = y$ است. مثلاً هریک از توابع $y = -6e^x$ و $y = 5e^x$ و $y = -3e^x$ و $y = e^x$ یک جواب معادله است. به‌طوری که ملاحظه می‌شود، این معادله دارای تعداد بی‌شماری جواب است.

تعریف

۸-۱-۱. منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام، تابعی است که بر روی فاصله باز I تعریف شده، لااقل n بار مشتق‌پذیر بوده و در معادله صدق کند. مجموعه تمام جواب‌های یک معادله دیفرانسیل را جواب عمومی معادله می‌نامیم. هدف از حل یک معادله دیفرانسیل، یافتن جواب عمومی آن است.

مثال

۹-۱-۱. معادله دیفرانسیل، مرتبه دوم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 4$$

را حل می‌کنیم، با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx} = \int (6x + 4) dx + C_1$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + C_1$$

که در آن C_1 عدد ثابت دلخواهی است. با انتگرال گیری مجدد، جواب عمومی معادله

$$y = x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2 \quad \text{به صورت}$$

به دست می آید که در اینجا C_2 عدد ثابت دلخواه دیگری است.

مثال

۱-۱۰. معادله دیفرانسیل، مرتبه چهارم

$$y^{(4)} = 16e^{-2x}$$

را حل می کنیم. جواب عمومی این معادله را می توان با چهار بار انتگرال گیری متوالی به دست آورد.

داریم:

$$y^{(3)} = -8e^{-2x} + C_1$$

$$y'' = 4e^{-2x} + C_1x + C_2$$

$$y' = -2e^{-2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

و

$$y = e^{-2x} + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

که در آن C_1, C_2, C_3, C_4 ثابت های دلخواه هستند. اگر در عبارت آخر قرار دهیم:

$$\frac{1}{6}C_1 = k_1$$

$$\frac{1}{2}C_2 = k_2$$

$$C_3 = k_3$$

$$C_4 = k_4$$

جواب عمومی معادله به صورت

$$y = e^{-\gamma x} + k_1 x^2 + k_2 x^1 + k_3 x + k_4$$

در می‌آید. این صورت به ظاهر کمی ساده‌تر است. البته روشن است که k_1 ، k_2 ، k_3 ، k_4 نیز اعدادی ثابت و دلخواه هستند.

۱-۱-۱۱. اگر بتوان جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام را به دست آورد، این جواب معمولاً شامل n ثابت دلخواه است. توجه کنید که این اصل در دو مثال ۱-۱-۹ و ۱-۱-۱۰ برقرار است. در واقع، یافتن فرمول ساده‌ای که جواب عمومی را توصیف کند، تنها برای تعداد معدودی از انواع معادلات دیفرانسیل امکان‌پذیر است. چند نوع خاص از این نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را در قسمت‌های بعدی این فصل مورد بحث قرار خواهیم داد.

۱-۱-۱۲. در بسیاری از مسائل، لازم است که جواب خاصی از یک معادله دیفرانسیل را پیدا کنیم که در شرط یا شرایط معینی صدق کند. این گونه شرایط را شرایط اولیه می‌نامند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال

۱-۱-۱۳. جسمی را با سرعت اولیه v_0 از سطح زمین به طور قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، می‌خواهیم ارتفاع جسم یعنی فاصله آن از سطح زمین را تا زمانی که جسم بالا می‌رود در هر لحظه مشخص کنیم. حل: فرض می‌کنیم ارتفاع جسم برابر $x(t)$ باشد. اگر جسم فقط تحت اثر نیروی جاذبه زمین باشد دارای شتابی برابر $x''(t)$ به سمت زمین است. بنابراین طبق قانون دوم نیوتن، داریم:

$$x''(t) = -g \quad (۱)$$

که g شتاب ثقل زمین است.

چون در لحظه شروع حرکت یعنی $t=0$ ، جسم در سطح زمین قرار دارد، پس داریم:

$$x(0) = 0 \quad (2)$$

رابطه (۲) یک شرط اولیه برای معادله دیفرانسیل (۱) است. چون جسم با سرعت اولیه

v_0 پرتاب شده است، پس شرط اولیه دیگری نیز به صورت

$$x'(0) = v_0 \quad (3)$$

داریم. نشان می‌دهیم که به کمک روابط (۱) و (۲) و (۳) ارتفاع جسم در هر لحظه، تا

زمانی که جسم بالا می‌رود، مشخص می‌شود. برای این منظور جوابی از معادله دیفرانسیل

(۱) را طوری به دست می‌آوریم که در شرایط اولیه $x(0) = 0$ و $x'(0) = v_0$ صدق کند.

اگر از طرفین رابطه (۱) دوبار انتگرال‌گیری کنیم، روابط زیر را بدست می‌آوریم.

$$x'(t) = -gt + C_1$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

در نتیجه شرایط (۲) و (۳)، به معادلات

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}g \times 0 + C_1 \times 0 + C_2 \\ v_0 = -g \times 0 + C_1 \end{cases}$$

منجر می‌گردد که از حل این دستگاه بدست می‌آوریم:

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = 0$$

بنابراین تا وقتی که جسم در حال صعود است، ارتفاع آن در لحظه t از

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

به دست می‌آید.

تعریف

۱-۱۴. معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$y^{(n)} = F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}]$$

با شرایط اولیه

$$y(x_0) = k_0$$

$$y'(x_0) = k_1$$

$$y''(x_0) = k_2$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

را که در آن k_i ها اعداد معینی می باشند یک مسأله با مقادیر اولیه می نامیم. توجه کنید که برای معادله دیفرانسیل مرتبه n ام، n شرط اولیه وجود دارد. این شرایط مقادیر تابع مجهول و $n-1$ مشتق اول آن را در نقطه x_0 معین می کنند. می توان نشان داد که با وضع محدودیت هایی بر F ، یک مسأله با مقادیر اولیه، دارای یک جواب یگانه (منحصربه فرد است)، این جواب را یک جواب خصوصی معادله می نامیم. در اغلب مسائل و مثال های این متن به دست آوردن همه جواب های معادلات دیفرانسیل مورد نظر کاملاً ممکن می باشد.

تمرین

۱-۱۵. جواب های عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'' = e^{rx} - x \quad (\text{الف})$$

$$y'' = \sec^2 x \quad (\text{ب})$$

$$y^{(4)} = 32 \sin 2x \quad (\text{پ})$$

$$xy' = 1 \quad (\text{ت})$$

پاسخ خود را با [۱-۱۵] مقایسه کنید.

تمرین

۱-۱۶. جواب خصوصی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را که در شرایط اولیه داده شده صدق می کند به دست آورید.

$$y' = 4x - 3, \quad y(4) = 3 \quad (\text{الف})$$

$$y' = 2 \sin x \cos x, \quad y(0) = 1 \quad (\text{ب})$$

$$y' = \ln x, \quad y(e) = 0 \quad (\text{پ})$$

پاسخ خود را با [۱۶-۱-۱] مقایسه کنید.

۱۷-۱-۱. فرض کنید جسم متحرکی روی محور x ها در لحظه $t=0$ از نقطه $x=1$ ، شروع به حرکت و سرعت آن در لحظه t برابر $2 \sin t$ باشد. مکان جسم متحرک را در لحظه t معلوم کنید.

پاسخ خود را با [۱۷-۱-۱] مقایسه کنید.

تمرین

$$18-1-1. \text{ معادله دیفرانسیل } y' + \frac{1}{x}y = 0 \text{ را در نظر بگیرید.}$$

(الف) نشان دهید که برای هر عدد ثابت C ، تابع $y = \frac{C}{x}$ ، $x \neq 0$ در این معادله صدق می‌کند.

(ب) یکی از جواب‌های این معادله را طوری تعیین کنید که نمودار آن از نقطه $(-1, 1)$ و $(1, 1)$ بگذرد.

پاسخ خود را با [۱۸-۱-۱] مقایسه کنید.

تمرین

۱۹-۱-۱. تحقیق کنید که هریک از توابع $y = e^{-x}$ ، $y = e^{3x}$ ، بر هر فاصله‌ای جوابی از معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' - 3y = 0$ است. سپس نشان دهید که به ازای هر انتخابی از ثابت‌های C_1 ، C_2 ، تابع $C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ جوابی از معادله دیفرانسیل است.

پاسخ خود را با [۱۹-۱-۱] مقایسه کنید.

۱-۱-۲۰. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادله‌ای است شامل یک تابع مجهول با بیش از یک متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی آن باشد.

به عنوان مثال، اگر $W = f(x, y, z, t)$ تابعی از زمان و سه مختص قائم یک نقطه در فضا باشد، آنگاه هریک از معادلات زیر، یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم است:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$\partial^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\partial^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

معادلات بالا به ترتیب معادله لاپلاس "La Place"، معادله حرارت و معادله موج نامیده می‌شوند. معادلات دیفرانسیل جزئی را معمولاً در مسائل مربوط به میدان‌های الکتریکی، دینامیک سیالات و حرکت موجی می‌توان دید.

روش‌های حل معادلات دیفرانسیل جزئی با روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی بسیار متفاوت بوده و تقریباً از آن مشکل‌تر است. در این درس ما توجه خود را منحصرأ به معادلات دیفرانسیل معمولی معطوف خواهیم کرد.

۱-۲ معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر

۱-۲-۱. در این بخش روش حل معادلات دیفرانسیلی را بررسی می‌کنیم که می‌توان متغیرهای آنها را از یکدیگر جدا کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال

۱-۲-۲. فرض می‌کنیم مخزنی محتوی ۳۰۰۰ لیتر آب نمک با غلظت دو گرم در لیتر باشد. می‌دانیم که در هر دقیقه ۲۵ لیتر آب نمک با غلظت یک گرم در لیتر وارد مخزن می‌شود و هم‌زمان با آن بر اثر حرارت در هر دقیقه ۳۰ لیتر از آب مخزن تبخیر می‌شود.

با فرض اینکه بتوانیم با به هم زدن، غلظت محلول را همگن نگهداریم، می‌خواهیم غلظت این محلول را که رو به افزایش است، در هر لحظه پیدا کنیم.

معمولاً این مسأله به هنگام به دست آوردن نمک از آب دریا پیش می‌آید.

برای حل این مسأله فرض می‌کنیم x نمایش غلظت محلول در لحظه t باشد. بنا به فرض در هر دقیقه ۲۵ لیتر آب‌نمک وارد مخزن می‌شود و در همین زمان ۳۰ لیتر آب از آن خارج می‌شود. بنابراین پس از t دقیقه مقدار آب‌نمک موجود در مخزن t (۳۰-۲۵) ۳۰۰۰ است (این نشان می‌دهد که در لحظه $t = ۶۰۰$ آب مخزن تمام می‌شود و بنابر فرض، دستگاه در این لحظه متوقف می‌شود). بدین ترتیب اگر y مقدار نمک موجود در محلول در لحظه t باشد، داریم:

$$y = x(۳۰۰۰ - ۵t) \quad (۱)$$

از طرف دیگر در هر دقیقه ۲۵ لیتر آب‌نمک با غلظت یک گرم در لیتر وارد مخزن می‌شود. بدین ترتیب در هر دقیقه ۲۵ گرم نمک وارد محلول می‌شود. بنابراین در فاصله زمانی Δt مقدار $۲۵\Delta t$ گرم نمک به محلول افزوده می‌شود، یعنی در دقیقه $t + \Delta t$ مقدار نمک موجود در محلول برابر $y + ۲۵\Delta t$ است. چون در هر لحظه از یک‌سو مقداری نمک وارد محلول می‌شود و از سوی دیگر از حجم محلول کاسته می‌شود، در هر لحظه به غلظت محلول افزوده می‌شود.

اکنون اگر غلظت محلول را در لحظه $t + \Delta t$ برابر $x + \Delta x$ بگیریم، داریم:

$$y + ۲۵\Delta t = (x + \Delta x)[۳۰۰۰ - ۵(t + \Delta t)]$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱) به دست می‌آوریم

$$x(۳۰۰۰ - ۵t) + ۲۵\Delta t = x(۳۰۰۰ - ۵t) - ۵x\Delta t$$

$$+ \Delta x(۳۰۰۰ - ۵t) - ۵\Delta x\Delta t$$

که این رابطه به صورت

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵ + x + \Delta x}{۶۰۰ - t} \quad (۲)$$

در می‌آید. چون هرچه Δt کوچکتر باشد، Δx نیز کوچکتر خواهد شد، وقتی Δt به صفر میل می‌کند، Δx نیز به صفر میل خواهد کرد و از معادله آخر، معادله:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5+x}{600-t} \quad (۳)$$

به‌دست می‌آید. این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که در آن متغیرهای x و t جدایی ناپذیرند. همان‌طوری که مشاهده می‌شود، حل این مسئله منجر به حل معادله دیفرانسیل (۳) می‌شود. معادله (۳) را می‌توانیم به صورت:

$$\frac{dx}{5+x} = \frac{dt}{600-t} \quad (۴)$$

بنویسیم. با انتگرال‌گیری از دو طرف (۴) به‌دست می‌آوریم:

$$\ln|5+x| = -\ln|600-t| + \ln C$$

C یک ثابت دلخواه است. چون غلظت محلول همیشه نامنفی است، برای $0 \leq t \leq 600$ داریم:

$$x+5 = \frac{C}{600-t}$$

چون غلظت محلول در لحظه $t=0$ برابر ۲ بوده است، پس $2+5 = \frac{C}{600-t}$ و از آنجا $C = 7 \times 600 = 4200$ ، بنابراین:

$$x = \frac{4200}{600-t} - 5 = \frac{1200+5t}{600-t} \quad 0 \leq t \leq 600$$

توجه کنید در لحظه $t=600$ در مخزن تنها نمک وجود دارد.

تعریف

۱-۲-۳. معادله دیفرانسیل، مرتبه اول. $p(y) \frac{dy}{dx} = q(x)$ ، را که در آن p و q دو تابع حقیقی و به ترتیب در فاصله‌های I_1 ، I_2 پیوسته‌اند، یک معادله دیفرانسیل جدایی‌پذیر می‌نامیم.

توجه کنید که معادله دیفرانسیل جدایی پذیر فوق را می توان به صورت:

$$p(y) dy = q(x) dx$$

نیز نشان داد.

مثال

۱-۲-۴. هریک از معادلات دیفرانسیل زیر جدایی پذیرند.

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} = 5x^2 \quad \text{و} \quad y \frac{dy}{dx} = (x-4)^{-2}$$

$$(y^3 + 5e^y) \frac{dy}{dx} = \sin x \quad \text{و} \quad (e^{-y} + \ln y) \frac{dy}{dx} = \ln x$$

تمرین

۱-۲-۵. کدام یک از معادلات دیفرانسیل زیر جدایی پذیرند؟

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x (1-y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ب})$$

$$(\cos^2 x) \frac{dy}{dx} = y^2 (y-1) \sin x \quad (\text{پ})$$

$$3xy^2 y' = 4y^3 - x^2 \quad (\text{ت})$$

پاسخ خود را با [۱-۲-۵] مقایسه کنید.

۱-۲-۶. اگر تابع f در فاصله I جوابی از معادله $p(y) \frac{dy}{dx} = q(x)$ باشد، آنگاه به ازای

هر x در I داریم:

$$p[f(x)] \frac{d f(x)}{dx} = q(x)$$

می‌دانیم $d f(x) = f'(x) dx$ ، پس

$$p[f(x)] f'(x) dx = q(x) dx$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$\int p[f(x)] f'(x) dx = \int q(x) dx + C$$

یا

$$\int p(y) dy = \int q(x) dx + C$$

اگر P و Q توابعی باشند به طوری که $P'(y) = p(y)$ و $Q'(x) = q(x)$ آنگاه f باید در معادله

$$P(y) = Q(x) + C \quad (۱)$$

که در آن C عددی ثابت است، صدق کند. یعنی به ازای هر x از I باید داشته باشیم:

$$P[f(x)] = Q(x) + C$$

برعکس، اگر تابع مشتق‌پذیری باشد که در معادله (۱) صدق کند، با مشتق‌گیری ضمنی از (۱) مشاهده می‌کنیم که

$$P'(y) \frac{dy}{dx} = Q'(x)$$

یا

$$P(y) \frac{dy}{dx} = q(x)$$

در نتیجه یک تابع، جوابی از معادله دیفرانسیل $p(y) \frac{dy}{dx} = q(x)$ است اگر و تنها اگر در معادله‌ای به شکل $P(y) = Q(x) + C$ که در آن C عددی ثابت است، صدق کند. توجه کنید، ممکن است به دست آوردن فرمول صحتی برای y بر حسب x از معادله (۱) میسر نباشد. در این صورت جواب‌های معادله دیفرانسیل به‌طور ضمنی تعیین می‌شود. حال چند مثال از معادلات دیفرانسیل جدایی‌پذیر را بررسی می‌کنیم.

۷-۲-۱. معادله $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y^2$ را در نظر می‌گیریم. برای جدا کردن متغیرها فرض می‌کنیم $y \neq 0$ ، دو طرف معادله را بر y^2 تقسیم می‌کنیم.

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

یا

$$y^{-2} dy = 3x^2 dx$$

با انتگرال گیری به دست می آوریم

$$\int y^{-2} dy = \int 3x^2 dx + C$$

یا

$$-\frac{1}{y} = x^3 + C$$

بنابراین توابع

$$y = \frac{-1}{x^3 + C}$$

جواب های معادله می باشند. چون هنگام جدا کردن متغیرها، فرض کردیم $y \neq 0$ تا بتوانیم دو طرف معادله را بر y^2 تقسیم کنیم، حال تابع $y = 0$ را به طور مستقل بررسی می کنیم، ملاحظه می کنیم که $y = 0$ در معادله صدق می کند، پس $y = 0$ نیز یک جواب معادله است.

مثال

۱-۲-۸. معادله دیفرانسیل

$$2x(y+1)dx - y dy = 0$$

با شرط اولیه $y(0) = -2$ را در نظر می گیریم.

با جدا کردن متغیرها داریم:

$$2x dx = \frac{y}{y+1} dy, \quad y \neq -1$$

با انتگرال گیری به دست می آوریم:

$$\int 2x dx = \int \frac{y}{y+1} dy + C$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy + C$$

پس توابع

$$x^2 = y - \ln|y+1| + C$$

جواب‌های معادله می‌باشند. البته توجه کنید که تابع $y = -1$ نیز یک جواب این معادله است.

برای تعیین جوابی از معادله که در شرط $y(0) = -2$ صدق کند، باید داشته باشیم:

$$0 = -2 - \ln[-2+1] + C$$

$$C = 2$$

بنابراین جواب مسأله به صورت تابع ضمنی

$$x^2 = y - \ln|y+1| + 2$$

است. روشن است که تابع $y = -1$ جواب مسأله با مقدار اولیه نیست.

تمرین

۹-۲-۱. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$x \circ y \circ , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (\text{الف})$$

$$(\cos y) y' = 1 \quad (\text{ب})$$

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad (\text{پ})$$

$$\sin x \sin y \, dx + \cos x \cos y \, dy = 0 \quad (\text{ت})$$

$$xy^3 \, dx + e^{x^2} \, dy = 0 \quad (\text{ث})$$

$$xy^3 \, dx + (y+1)e^{-x} \, dy = 0 \quad (\text{ج})$$

پاسخ خود را با [۹-۲-۱] مقایسه کنید.

۱-۲-۱۰. جواب خصوصی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را که در شرط اولیه داده شده صدق می‌کنند، تعیین کنید.

تمرین:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2x + 2}{2(y-1)} \quad , \quad y(0) = -1 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y^2 + e^y} \quad , \quad y(0) = 2 \quad (\text{ب})$$

$$x y y' = 1 + y^2 \quad , \quad y(2) = 3 \quad (\text{پ})$$

$$y' = x e^{y-x^2} \quad , \quad y(0) = 0 \quad (\text{ت})$$

پاسخ خود را با [۱-۲-۱۰] مقایسه کنید.

۱-۲-۱۱. بعضی از معادلات دیفرانسیل که در آنها متغیرها جدایی‌پذیر نیستند، پس از یک تغییر متغیر، تبدیل به معادلاتی جدایی‌پذیر می‌شوند. این دسته شامل معادلاتی است که می‌توانند به صورت:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

نوشته شوند.

مانند معادله دیفرانسیل

$$(x^3 + y^3) \frac{dy}{dx} = x y^2$$

که می‌توان آن را به صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x y^2}{(x^3 + y^3)}$$

نوشت. سرانجام از تقسیم صورت و مخرج سمت راست رابطه بالا بر x^3 ، معادله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

به دست می آید.

۱-۲-۱۲. معادله ای به صورت:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

را می توان با انتخاب متغیر مستقل جدید V ،

$$V = \frac{y}{x} \quad ,$$

تبدیل به معادله ای جدایی پذیر ساخت، زیرا در این صورت داریم

$$y = vx \quad , \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

و معادله (۱) به صورت

$$x \frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

یا

$$x \frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

و با فرض $F(v) - v \neq 0$ به شکل

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

در می آید که معادله ای جدایی پذیر است.

مثال

۱-۲-۱۳. معادله دیفرانسیل

$$(x^2 - xy + y^2) dx - xy dy = 0$$

را در نظر می گیریم.

ابتدا سعی می کنیم که معادله فوق را به صورت

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

بنویسیم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}$$

با انتخاب تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ یا $y = xv$ و اینکه

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

و قرار دادن آنها در معادله به دست می آوریم

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1}{v} - 1 + v$$

یا

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1-v}{v}$$

با فرض $1-v \neq 0$ و $v \neq 0$ ، معادله به صورت جدایی پذیر

$$\frac{v}{1-v} dv = \frac{dx}{x}$$

درمی آید. با انتگرال گیری داریم

$$\int \frac{v}{1-v} dv + C = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = C - \int \left(1 + \frac{1}{v-1}\right) dv$$

یا

$$\ln|x| = C - v - \ln|v-1|$$

یا

$$\ln|x(v-1)| = C - v$$

پس

$$|x(v-1)| = e^{C-v}$$

یا

$$x(v-1) = \pm e^{C-v}$$

در نتیجه

$$x(v-1)e^v = \pm e^C$$

چون C عددی ثابت است، پس $\pm e^C$ نیز مقداری ثابتی مانند k خواهد بود

پس

$$x(v-1)e^v = k$$

با قرار دادن $\frac{y}{x}$ به جای v در رابطه بالا بدست می آوریم

$$x\left(\frac{y}{x} - 1\right)e^{\frac{y}{x}} = k$$

یا

$$(y-x)e^{\frac{y}{x}} = k \quad (1)$$

که جواب معادله دیفرانسیل است. چون قبلاً فرض کرده بودیم که $v \neq 0$ و $1-v \neq 0$ اکنون توابع $v=0$ و $1-v=0$ را بررسی می کنیم.

اگر $v=0$ آنگاه $\frac{y}{x}=0$ که معادل $y=0$ است. ولی به طوری که ملاحظه می کنیم تابع $y=0$ در معادله دیفرانسیل صدق نمی کند، پس نمی تواند جواب معادله دیفرانسیل باشد. برای $1-v=0$ داریم:

$$v=1 \Rightarrow \frac{y}{x}=1 \Rightarrow y=x, \quad dy=dx$$