



دانشگاه پیام نور

معادلات دیفرانسیل معمولی

(رشته‌های علوم پایه، فنی مهندسی و مهندسی شیمی)

دکتر جمال صفار اردبیلی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

هفت	پیشگفتار
۱	فصل اول: معادله دیفرانسیل مرتبه اول
۱	۱-۱ ماهیت معادلات دیفرانسیل و طبقه بندی آنها
۳	۲-۱ معادله دیفرانسیل جدا شدنی و تبدیل به آن
۶	۳-۱ معادله دیفرانسیل همگن و تبدیل به آن
۱۰	۴-۱ دسته منحنی ها و دسته منحنی های متعامد
۱۳	۵-۱ معادله دیفرانسیل کامل
۱۷	۶-۱ عامل انتگرال ساز
۲۴	۷-۱ معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی و تبدیل به آن
۳۲	پاسخ تمرینات فصل اول
۶۷	فصل دوم: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم
۶۷	۱-۲ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حالت خاص فاقد y یا x
۷۰	۲-۲ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن
۷۴	۳-۲ تعیین یک جواب معادله همگن با استفاده از یک جواب معلوم
۷۵	۴-۲ معادله دیفرانسیل کشی-اوایلر
۷۸	۵-۲ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیر همگن (تغییر پارامتر)
۸۴	۶-۲ روش ضرایب ثابت (ضرایب نامعین)
۹۲	پاسخ تمرینات فصل دوم

۱۱۳	فصل سوم: حل معادله دیفرانسیل به روش سریها
۱۱۳	۱-۳ سری توانی
۱۱۸	۲-۳ نقاط معمولی و منفرد و جواب های سری معادلات دیفرانسیل
۱۲۹	۳-۳ نقاط منفرد منظم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم
۱۳۷	۴-۳ حالتی که معادله شاخص دارای ریشه های برابر است
۱۴۰	۵-۳ توابع بسل و تابع گاما
۱۴۵	پاسخ تمرینات فصل سوم
۱۶۵	فصل چهارم: دستگاه معادلات دیفرانسیل
۱۶۵	۱-۴ دستگاه معادلات دیفرانسیل
۱۷۵	پاسخ تمرینات فصل چهارم
۱۸۳	فصل پنجم: تبدیلات لاپلاس
۱۸۳	۱-۵ تبدیل لاپلاس
۱۸۵	۲-۵ خواص تبدیل لاپلاس
۱۸۹	۳-۵ معکوس تبدیل لاپلاس
۱۹۰	۴-۵ حل معادله دیفرانسیل به روش لاپلاس
۱۹۳	۵-۵ تبدیل لاپلاس برخی توابع
۲۰۰	پاسخ تمرینات فصل پنجم
۲۰۷	منابع

پیشگفتار

کتابی که در پیش رو دارید، در پنج فصل جهت درس معادلات دیفرانسیل معمولی تهیه شده است. در فصل اول، ده نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و در فصل دوم، شش نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و در فصل سوم، برخی خواص سریهای توانی را بررسی کرده و حل معادله دیفرانسیل به روش آن بحث شده است. در فصل چهارم، دستگاه معادلات دیفرانسیل و در فصل آخر نیز تبدیلات لاپلاس بیان گردیده و حل معادله دیفرانسیل به روش آن، آورده شده است. این کتاب، حاصل چندین سال تدریس درس معادلات دیفرانسیل در دانشگاهها است. تجربه نشان داده است که مثالهای متنوع و تمرینات همراه حل آنها در میزان موفقیت دانشجویان موثر بوده است. این کتاب بر اساس سر فصل معادلات دیفرانسیل برای رشته های علوم پایه و فنی و مهندسی و مهندسی شیمی تهیه شده است و حل حدود ۲۰۰ مساله به این کتاب حالت خود آموز داده است. در ضمن در آخر هر فصل نیز مجموعه ای از تمرینهای مربوط به فصل، تحت عنوان تمرینات گوناگون همراه با جواب مختصر گنجانده شده است. اینها همه به دلیل آن است که به این کتاب جلوه خودآموز بدهد. در پایان از تمام اساتید و دانشجویان گرامی خواستارم با ارائه نظرات خود مرا در هر چه بهتر پیمودن این راه، یاری نمایند و همچنین از کلیه مسئولین محترم چاپ کمال تشکر را دارم.

دکتر جمال صفار اردبیلی

عضو هیات علمی دانشگاه

فصل اول

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

۱-۱ ماهیت معادله دیفرانسیل و طبقه بندی آن

مقدمه

با مفهوم معادله یعنی رابطه ای که در آن تساوی باشد، آشنا هستیم. ساده ترین معادله یک مجهولی می باشد، که با نماد $f(x)=0$ نشان می دهیم. مثلاً $ax+b=0$ معادله یک مجهولی درجه اول و $ax^2+bx+c=0$ معادله یک مجهولی درجه دوم و $ax^3+bx^2+cx+d=0$ معادله یک مجهولی درجه سوم والی آخر. معادله دو مجهولی را با نماد $f(x,y)=0$ نشان می دهیم. مثلاً $ax+by+c=0$ معادله دو مجهولی درجه اول و $ax^2+bx^2+cy^2+dx+ey+f=0$ معادله دو مجهولی درجه دوم و الی آخر و همین طور معادله سه مجهولی $f(x,y,z)=0$ می باشد. مثلاً $ax+by+cz+d=0$ معادله سه مجهولی درجه اول می باشد.

درمورد معادله دو نوع سؤال قابل طرح می باشد:

الف) آیا x جواب معادله $f(x)=0$ می باشد؟ یا آیا جفت (x,y) جواب

معادله $f(x,y)=0$ می باشد؟

ب) جواب معادله را پیدا کنید؟

جواب دادن به سؤال «الف» ساده می باشد. زیرا با جایگذاری می توان مشخص کرد، ولی جواب دادن به سؤال «ب» مشکل می باشد. ابتدا باید معادلات را دسته بندی کرده و برای هر نوع روش خاصی را ارائه داد. به عبارت دیگر برای حل معادله باید دو مرحله را مشخص کنیم:

۱. مرحله شناخت

۲. مرحله حل (روش حل)

مثلاً برای پیدا کردن جواب معادله یک مجهولی درجه اول $ax+b=0$ داریم $x=-b/a$ و یا برای محاسبه جواب معادله دو مجهولی درجه اول $ax+by+c=0$ دو نقطه از خط را پیدا کرده و آن را رسم کرده و کلیه نقاط روی خط جواب معادله است. چنانکه ملاحظه می شود برای هر نوع از معادله روش خاصی را ارائه می دهیم. حال اگر در معادله $f(x,y)=0$ متغیر x را به عنوان متغیر مستقل و y را به عنوان متغیر وابسته در نظر بگیریم آنگاه y تابعی از x می باشد و می توان در مورد مشتق تابع صحبت کرد یعنی:

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = y^{(2)}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

۱-۱-۱ تعریف: معادله ای که شامل ترکیباتی از x (متغیر مستقل) و y (متغیر وابسته) و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل نامیم و با نماد $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ نشان می دهیم. در مورد معادله دیفرانسیل نیز می توان دو سؤال طرح کرد:

الف) آیا تابع $f(x,y)=0$ جواب معادله دیفرانسیل می باشد؟

ب) جواب های معادله دیفرانسیل را پیدا کنید؟

جواب دادن به سؤال «الف» ساده است (با جایگذاری) مثلاً آیا تابع $y=e^{2x}$ جواب معادله $y''-5y'+6y=0$ می باشد؟

$$\text{چون } y''=4e^{2x}, y'=2e^{2x} \text{ و } y''-5y'+6y=4e^{2x}-10e^{2x}+6e^{2x}=0$$

بنابراین $y=e^{2x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''-5y'+6y=0$ است. همچنین $y=e^{3x}$ نیز جوابی از معادله بالا است زیرا

$$y''-5y'+6y=9e^{3x}-15e^{3x}+6e^{3x}=0, y''=9e^{3x}, y'=3e^{3x}$$

جواب های $y=e^{2x}$ و $y=e^{3x}$ را جواب های خاص یا خصوصی گوئیم.

۱-۲ تمرین : آیا تابع داده شده جواب معادله مزبور می باشد ؟

الف) $y = cx^r$ $xy' = ry$

ب) $y^r = e^{rx} + c$ $yy' = e^{rx}$

ج) $y = c_1 \sin rx + c_2 \cos rx$ $y'' + ry = 0$

د) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ $y'' - ry = 0$

هـ) $y = c_1 \sinh rx + c_2 \cosh rx$ $y'' - ry = 0$

و) $y = \sin^{-1} xy$ $xy' + y = y' \sqrt{1 - x^r y^r}$

ز) $y = x \tan x$ $xy' = y + x^r + y^r$

ح) $x^r = ry^r Lny$ $y' = \frac{xy}{x^r + y^r}$

ط) $y^r = x^r - cx$ $y = c_1 \sinh rx + c_2 \cosh rx$

ی) $y + \sin y = x$ $(y \cos y - \sin y + x)y' = y$

ک) $x + y = \tan^{-1} y$ $1 + y^r + y^r y' = 0$

(پاسخ خود را با ۱-۱-۲ مقایسه کنید)

جواب دادن به سؤال «ب» مشکل می باشد و بستگی به نوع معادله و طبقه بندی آن دارد. با تعریف مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل به سراغ سؤال «ب» می رویم.

۱-۳ تعریف: بیشترین تکرار مشتق در هر معادله را مرتبه آن و توان بیشترین تکرار مشتق را درجه معادله دیفرانسیل نامیم. مثلاً :

۱) معادله $(y')^r + y^r = x^0$ مرتبه اول ، درجه سوم می باشد.

۲) معادله $\frac{d^r y}{dx^r} + \left(\frac{d^r y}{dx^r} \right)^r = x$ مرتبه سوم ، درجه اول می باشد.

۳) معادله $y^{(r)} + y^{(r)} = y^r$ مرتبه سوم ، درجه اول می باشد.

۲-۱ معادله دیفرانسیل جدا شدنی

مشابه معادله معمولی باتوجه به تعریف مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل می توان آنها را طبقه بندی کرد. بنابر این ساده ترین معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت

$$f(x, y, y') = 0$$

می باشد که اگر توان y' برابر با یک باشد آنگاه معادله مرتبه اول درجه اول می باشد که به صورت کلی

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = F(x, y)$$

می باشد. مثلاً

$$y' = \frac{x^2 + y}{y^2 + x}, \quad y' = \frac{x^2 + x}{y^2 + y}$$

معادلات درجه اول می باشند. ولی معادله اولی ساده تر از معادله دومی می باشد زیرا معادله اولی را می توان به صورت کلی $y' = f(x)/g(y)$ در نظر گرفت.

۱-۲-۱ تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول به صورت

$$y' = \frac{f(x)}{g(x)}$$

را معادله جدا شدنی نامیم (مرحله شناخت). هر معادله مرتبه اول درجه اول جدا شدنی را اختصاراً معادله جدا شدنی (جدایی پذیر) نامیم. هر معادله جدا شدنی را می توان به صورت کلی $M(x)dx + N(y)dy = 0$ تبدیل کرد.

حل معادله دیفرانسیل جداشدنی: با انتگرال گیری از معادله جدا شدنی

$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

می توان جواب آن را محاسبه کرد.

تذکر: هدف از حل معادله دیفرانسیل محاسبه جواب عمومی معادله دیفرانسیل می باشد. جوابی را جواب عمومی نامیم هرگاه تعداد پارامترها به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل باشد که بعداً آن را دقیقاً تعریف خواهیم کرد.

مثال ۱. معادله $y' = \frac{x^2 + x}{y^2 - y}$ را حل می کنیم.

$$\text{داریم: } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x}{y^2 - y} \quad \text{آنگاه}$$

$$(x^2 + x) dx + (y - y^2) dy = 0$$

در نتیجه

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = c \text{ و یا } \int (x^2 + x) dx + \int (y - y^2) dy = \int \cdot$$

جواب (عمومی) معادله است.

معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول ممکن است به ظاهر جدا شدنی نباشد ولی با تقسیم بر عباراتی می توان آن را تبدیل به جدا شدنی نمود. با یک مثال توضیح می دهیم:

مثال ۲. معادله $(y+1)(x^2+1)dx + (x+1)(y^2+1)dy = 0$ به ظاهر جدا شدنی نیست، ولی با تقسیم بر حاصلضرب عبارات اضافی $(x+1)(y+1)$ داریم:

$$\frac{x^2+1}{x+1} dx + \frac{y^2+1}{y+1} dy = 0 \text{ که جدا شدنی است پس با انتگرال گیری داریم:}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x+1} dx + \int \frac{y^2+1}{y+1} dy = \int \cdot$$

$$\int (x-1 + \frac{2}{x+1}) dx + \int (y-1 + \frac{2}{y+1}) dy = 0 \text{ و یا}$$

$$\text{پس، } c = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}y^2 - y + 2\ln(y+1) \text{ جواب معادله است.}$$

تذکر: منظور از جواب معادله، جواب عمومی می باشد مگر اینکه قید شود.

۲-۲-۱ تمرین: جواب معادلات دیفرانسیل های زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف) } y' = e^{rx} - x & \text{ب) } xy' = 1 \\ \text{ج) } y' = xe^x & \text{د) } y' = \sin^{-1} x \end{array}$$

(پاسخ خود را با ۲-۲-۱ مقایسه کنید)

۳-۲-۱ تمرین: برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر، جوابی خاص با شرایط اولیه داده شده بیابید.

$$\begin{array}{lll} \text{الف) } y' = xe^x, & y = 3 & \text{وقتی } x = 1 \\ \text{ب) } y' = 2 \sin x \cos x, & y = 1 & \text{وقتی } x = 0 \\ \text{ج) } y' = \ln x, & y = 0 & \text{وقتی } x = 1 \end{array}$$

(پاسخ خود را با ۳-۲-۱ مقایسه کنید)

۴-۲-۱ تمرین: جواب معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

الف) $(1+e^x)yy' = e^x$	ب) $y' \sin x = y \ln y$
ج) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$	د) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$
هـ) $(y^2 + 1)y' = (x+1)y$	و) $(1+y^2)dx = xdy$
ز) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$	ح) $(1-y^2)dx + 2xydy = 0$
ط) $y' + \sin(\frac{x+y}{2}) = \sin(\frac{x-y}{2})$	ی) $e^{x+y}dx + e^{x-y}dy = 0$
ک) $x \ln x dy + \sqrt{1+y^2}dx = 0$	ق) $(y^2 - 1)dx - (2y + xy)dy = 0$

(پاسخ خود را با ۴-۲-۱ مقایسه کنید)

۵-۲-۱ تمرین: نشان دهید که تغییر متغیر $z = ax + by + c$ معادله دیفرانسیل $y' = f(ax + by + c)$ را به معادله جدا شدنی تبدیل می کند و معادلات زیر را حل کنید.

الف) $y' = (y + 4x - 1)^2$	ب) $y' = \cos(x + y) - 1$
ج) $y' = (x + y)^2$	د) $y' = \sin^2(x - y + 1)$

(پاسخ خود را با ۵-۲-۱ مقایسه کنید)

۶-۲-۱ تمرین: نشان دهید که تغییر متغیر $z = a_1x + b_1y$ معادله دیفرانسیل

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

با شرط $a_1b_2 = a_2b_1$ را به معادله جدا شدنی تبدیل می کند و معادلات زیر را حل کنید.

الف) $y' = -\frac{2x - 6y + 3}{x - 3y + 1}$	ب) $y' = -\frac{2x + 3y - 1}{2x + 3y + 2}$
ج) $y' = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}$	

(پاسخ خود را با ۶-۲-۱ مقایسه کنید)

۳-۱ معادله دیفرانسیل همگن

ملاحظه شد معادله مرتبه اول درجه اول به صورت $y' = f(x, y)/g(x, y)$ و یا به صورت $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ می باشد. مثلاً معادلات

$$y' = \frac{x^2 + y}{y^2 + x}, \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

معادلات مرتبه اول درجه اول می باشند که هیچکدام جدا شدنی نیستند، ولی معادله اولی دارای خاصیتی می باشد که معادله دومی نیست. در معادله دیفرانسیل اول تمام جملات توابع $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ از توان یکسان دو می باشد ولی معادله دومی چنین نیست. این مفهوم را با نماد ریاضی تعریف می کنیم.

۱-۳-۱ تعریف: تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ را تابع همگن از درجه n نامیم هرگاه در شرط زیر صدق کند.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

مثال ۱. تابع $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ تابع همگن از درجه دو می باشد، زیرا:

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(x^2 + xy + y^2) = t^2 f(x, y)$$

مثال ۲. تابع $f(x, y) = xe^{(y/x)} + y \sin(y/x)$ تابع همگن از درجه یک می باشد، زیرا:

$$f(tx, ty) = txe^{\frac{ty}{tx}} + ty \sin \frac{ty}{tx} = t \left(xe^{\frac{y}{x}} + y \sin \frac{y}{x} \right) = tf(x, y)$$

مثال ۳. تابع $f(x, y) = x/y + y/x$ تابع همگن از درجه صفر می باشد، زیرا:

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} + \frac{ty}{tx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t^0 f(x, y)$$

۱-۳-۲ تعریف: معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)/g(x, y)$ را معادله همگن نامیم، هر گاه توابع دو متغیره f, g توابع همگن از درجه یکسان باشند. به عبارت دیگر معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ را معادله همگن نامیم هر گاه توابع دو متغیره M و N توابع همگن از درجه یکسان باشند.

مثال ۱. معادله $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$ معادله همگن می باشد.

مثال ۲. معادله $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ معادله همگن می باشد.

مثال ۳. معادله $xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ معادله همگن می باشد.

مثال ۴. معادله $(x - y)dx + (x - y^2)dy = 0$ معادله همگن می باشد.

حل معادله دیفرانسیل همگن: فرض کنیم $y' = f(x, y)/g(x, y)$ معادله همگن باشد. با فرض تغییر متغیر $v = y/x$ داریم $y = vx$ پس $y' = v'x + v$ آنگاه با جایگذاری در معادله نتیجه می شود که

$$v'x = \frac{f(v, 1)}{g(v, 1)} - v \Rightarrow \frac{dv}{dx} x = \frac{f(v, 1)}{g(v, 1)} - v = F(v) \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{dx}{x}$$

که معادله اخیر جداشدنی است، می توان آن را به روش جداشدنی حل کرد و با جایگذاری $v = y/x$ جواب معادله دیفرانسیل اولیه به دست می آید.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$ را حل می کنیم. با جایگذاری $y = vx$ و $dy = vdx + xdv$ داریم:

$$\begin{aligned}(x^2 - v^2 x^2)dx + xv x(vdx + xdv) &= 0 \\ (x^2 - v^2 x^2 + v^2 x^2)dx + x^2 v dv &= 0 \\ x^2 dx + x^2 v dv &= 0\end{aligned}$$

تذکر: x^n همیشه حذف می شود، بنابراین با تقسیم بر x داریم:

$$\frac{dx}{x} + v dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int v dv = \int 0$$

که جداشدنی است پس:

$$\ln x + \frac{1}{2} v^2 = c \Rightarrow \ln x + \frac{y^2}{2x^2} = c$$

و یا:

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

مثال ۲. معادله دیفرانسیل همگن $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ را حل می کنیم، با جایگذاری $y = vx$ و $dy = vdx + xdv$ داریم:

$$\begin{aligned}(x^2 + v^2 x^2)dx + xv x(vdx + xdv) &= 0 \\ (x^2 + v^2 x^2 + v^2 x^2)dx + x^2 v dv &= 0 \\ x^2 (1 + 2v^2)dx + x^2 v dv &= 0 \\ (1 + 2v^2)dx + x v dv &= 0\end{aligned}$$

با تقسیم بر حاصلضرب عبارات اضافی $x(1 + 2v^2)$ داریم:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{1 + 2v^2} dv = \int 0$$

$$\ln x + \frac{1}{4} \ln(1 + 2v^2) = \ln c$$

تذکر: برای ساده کردن به جای c معمولاً $\ln c$ را به عنوان پارامتر ثابت اختیار می کنیم.

$$\ln x(1 + 2v^2)^{\frac{1}{4}} = \ln c$$

$$x \sqrt[4]{(1 + 2v^2)} = c$$

$$x \sqrt[4]{(1 + \frac{2y^2}{x^2})} = c$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

تذکر: چنانکه ملاحظه می شود روند حل معادله دیفرانسیل جدا شدنی و همگن همیشه ثابت می باشد فقط در انتگرال گیری، فرق می کند.

۱-۳-۳ تمرین: نشان دهید که معادلات دیفرانسیل زیر همگن هستند و سپس آنها را حل کنید.

$$(x^2 - 2y^2)dx + (xy)dy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y' - 3xy - 2y^2 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y' = 2(x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x} + xy \quad (\text{ج})$$

$$x \sin \frac{y}{x} \cdot y' = y \sin \frac{y}{x} + x \quad (\text{د})$$

$$xy' = y + 2xe^{\frac{-y}{x}} \quad (\text{هـ})$$

(پاسخ خود را با ۱-۳-۳ مقایسه کنید)

۱-۳-۴ تمرین: جواب خصوصی را که در شرایط اولیه داده شده صدق می کند، پیدا کنید.

$$y(1) = 3 \quad \text{با شرط} \quad (16x + 5y)dx + (3x + y)dy = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y(1) = 0 \quad \text{با شرط} \quad y' - \frac{y}{x} + \csc \frac{y}{x} = 0 \quad (\text{ب})$$

(پاسخ خود را با ۱-۳-۴ مقایسه کنید)

۱-۳-۵ تمرین: هرگاه $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$ ، نشان دهید که مقادیر k, h را می توان طوری انتخاب کرد که با جایگذاری $x = X + h$ ، $y = Y + k$ معادله

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

به معادله همگن تبدیل شود و معادلات زیر را حل کنید.

الف) $y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}$

ب) $(2x - y + 1)dx + (y + x)dy = 0$

ج) $(x + 2y)dx + (y - 1)dy = 0$

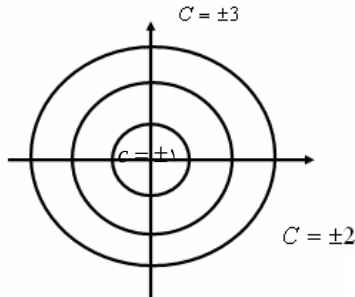
د) $(x + y - 2)dx - (x - y - 4)dy = 0$

(پاسخ خود را با ۱-۳-۵ مقایسه کنید)

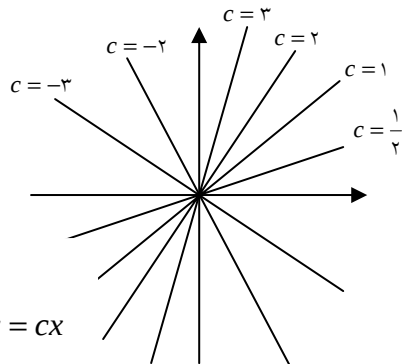
۴-۱ دسته منحنی ها و دسته منحنی های متعامد

ملاحظه شد که جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول معمولاً شامل یک ثابت اختیاری موسوم به پارامتر است. وقتی مقادیر مختلفی به این پارامتر نسبت داده می شود، یک دسته منحنی به دست می آید هر یک از این منحنی ها یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض است و همه آنها با هم جواب عمومی آن را تشکیل می دهند. بنابراین معادله $f(x, y, c) = 0$ جواب عمومی آن را تشکیل می دهند. بنابراین معادله $f(x, y, c) = 0$ یک دسته منحنی می باشد. حال می خواهیم دسته منحنی های متعامد بریک دسته منحنی مفروض را با استفاده از معادله دیفرانسیل به دست آوریم که کاربردی از معادله دیفرانسیل می باشد. به عنوان مثال تعدادی دسته منحنی را در زیر

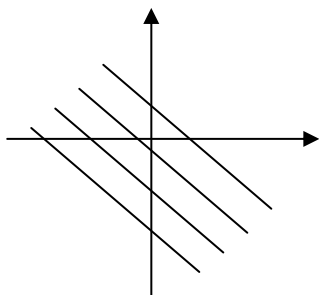
رسم می کنیم :



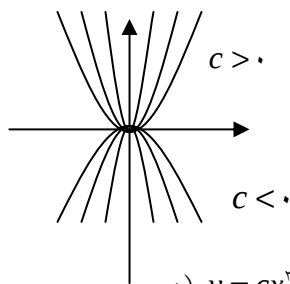
الف) $x^2 + y^2 = c^2$



ب) $y = cx$

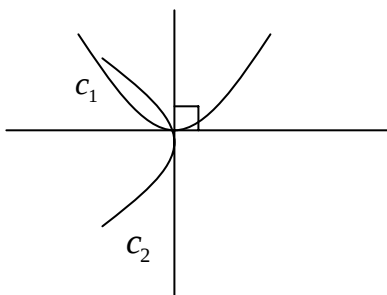


ج) $x + y = c$



د) $y = cx^2$

دو منحنی را بر هم عمود گوئیم هرگاه در نقطه تقاطع خطوط مماس برهم عمود باشد (شکل زیر).



به عبارت ریاضی :

$$m_{l_1} m_{l_2} = -1 \rightarrow y'_{l_1} \cdot y'_{l_2} = -1 \rightarrow y'_{l_1} = \frac{-1}{y'_{l_2}}$$

حال با توجه به مطالب بالا و با استفاده از روند زیر می توان دسته منحنی های متعامد بریک دسته منحنی ها را پیدا کرد:

$$f(x, y, c) = 0 \longrightarrow f(x, y, y') = 0 \xrightarrow{y' \rightarrow -\frac{1}{y'}} f(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$$

$$\longrightarrow g(x, y, c) = 0$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی های متعامد $\longrightarrow$ معادله دیفرانسیل دسته منحنی ها $\longrightarrow$ معادله دسته منحنی ها

$\longrightarrow$ دسته منحنی های متعامد

تذکر: در مرحله تبدیل معادله دسته منحنی ها به معادله دیفرانسیل دسته منحنی ها با مشتق گیری، باید پارامتر c حذف شود، که می توان در صورت نیاز از معادله دسته منحنی ها دوباره استفاده کرد (تمرین ۱-۴-۵ ملاحظه شود).