



دانشگاه سامان نور
په

مکانیک آماری

(رشته فیزیک)

دکتر مرتضی محسنی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

سیزده

پیش گفتار

۱

مقدمه

فصل ۱ احتمال

۴	۱.۱ مفهوم احتمال	۳.۱
۵	۱.۱.۱ احتمال کلاسیکی	
۵	۲.۱.۱ احتمال آماری	
۵	۲.۱ محاسبه احتمال	
۵	۱.۲.۱ رویداد مرکب	
۶	۲.۲.۱ رویدادهای مستقل	
۶	۳.۱ شمارش رویدادها	
۷	۱.۳.۱ آرایه ها	
۸	۲.۳.۱ جایگشت ها	
۸	۳.۳.۱ ترکیب ها	
۹	۴.۱ توزیع	
۱۰	۱.۴.۱ توزیع گسسته	
۱۲	۲.۴.۱ توزیع پیوسته	
۱۴	۳.۴.۱ مقدارهای میانگین	
۱۵	۴.۴.۱ انحراف معیار	
۱۷	۵.۱ تقریب استرلینگ	
۲۰	۶.۱ ضرایب نامعین لاگرانژ	
۲۱	۷.۱ توزیع چند جمله ای	
۲۱	۱.۷.۱ توزیع دو جمله ای	
۲۵	۲.۷.۱ توزیع چند جمله ای	
۲۶	۸.۱ توزیع گاوسی	
۲۶	۱.۸.۱ تعداد حالت ها	

فصل ۲ مفاهیم پایه	
۳۴	۱.۲ موضوع مکانیک آماری
۳۵	۱.۱.۲ میکرو حالت
۳۵	۲.۱.۲ ماکرو حالت
۳۸	۲.۲ آمار تمیز پذیر
۴۲	۳.۲ واگنی
۴۲	۱.۳.۲ واگنی ترازهای تک ذره ای
۴۲	۲.۳.۲ واگنی دستگاه
۴۵	۴.۲ آمار تمیز ناپذیر
۴۵	۱.۴.۲ مفهوم تمیز پذیری
۴۵	۲.۴.۲ مفهوم تمیز ناپذیری
۴۶	۳.۴.۲ شمارش حالت ها
۴۸	۵.۲ هنگردها
۴۸	۱.۵.۲ مفهوم هنگرد
۴۹	۲.۵.۲ هنگرد میکرو بندادی
۴۹	۳.۵.۲ هنگرد بندادی
۵۰	۴.۵.۲ هنگرد بندادی بزرگ
۵۰	۶.۲ آنتروپی
۵۰	۱.۶.۲ آنتروپی در هنگرد میکرو بندادی
۵۱	۲.۶.۲ آنتروپی در هنگرد بندادی
۵۳	۷.۲ نمونه هایی از کاربردها *
۵۳	۱.۷.۲ کاستی در بلورها
۵۵	۲.۷.۲ نوار کشسان

فصل ۳ تابع پارش	
۶۰	۱.۳ محتمل ترین توزیع
۶۱	۲.۳ توزیع بولتزمن
۶۵	۳.۳ تابع پارش بندادی
۶۷	۱.۳.۳ اهمیت تابع پارش
۶۹	۲.۳.۳ جمع روی حالت ها
۷۰	۳.۳.۳ تابع پارش دستگاه
۷۲	۴.۳.۳ توابع ترمودینامیکی بر حسب تابع پارش دستگاه
۷۲	۵.۳.۳ تابع پارش تک ذره ای ذرات با چند درجه آزادی
۷۳	۶.۳.۳ تابع پارش بر حسب ترازهای انرژی دستگاه

۷۳	پارامغناطیس	۴.۳
۷۳	برهم‌کنش با میدان مغناطیسی	۱.۴.۳
۷۳	تابع پارش پارامغناطیس	۲.۴.۳
۷۴	انرژی درونی پارامغناطیس	۳.۴.۳
۷۵	ظرفیت گرمایی پارامغناطیس	۴.۴.۳
۷۶	آنتروپی	۵.۴.۳
۷۷	انرژی آزاد	۶.۴.۳
۷۸	نوسانگر هماهنگ ساده	۵.۳
۷۸	تابع پارش نوسانگر هماهنگ ساده	۱.۵.۳
۷۹	انرژی درونی نوسانگر هماهنگ ساده	۲.۵.۳
۸۰	ظرفیت گرمایی نوسانگر هماهنگ ساده	۳.۵.۳
۸۰	مقایسهٔ هنگردها	۶.۳
۸۰	هنگرد میکروبندادی و بندادی	۱.۶.۳
۸۱	افت و خیز انرژی	۲.۶.۳

فصل ۴ گاز کامل

۸۸	حالت‌های ذره	۱.۴
۸۸	ذرهٔ محبوس در جعبه	۱.۱.۴
۹۰	شمارش حالت‌ها	۲.۱.۴
۹۲	گاز کامل	۲.۴
۹۴	تابع توزیع گاز کامل	۱.۲.۴
۹۷	توابع ترمودینامیکی گاز کامل	۳.۴
۹۸	گاز کامل تک‌اتمی	۴.۴
۹۸	تابع پارش گاز تک‌اتمی	۱.۴.۴
۱۰۰	انرژی درونی گاز تک‌اتمی	۲.۴.۴
۱۰۰	آنتروپی گاز تک‌اتمی	۳.۴.۴
۱۰۰	انرژی آزاد گاز تک‌اتمی	۴.۴.۴
۱۰۰	ظرفیت گرمایی گاز تک‌اتمی	۵.۴.۴
۱۰۰	معادلهٔ حالت	۶.۴.۴
۱۰۱	حالت‌های چرخندهٔ صلب	۵.۴
۱۰۵	دوران مولکول‌ها و تابع پارش	۶.۴
۱۰۵	تابع پارش و انرژی کل	۱.۶.۴
۱۰۶	انرژی دورانی	۲.۶.۴
۱۰۷	حد دمای پایین	۳.۶.۴
۱۰۸	تابع پارش ارتعاشی گاز دواتمی	۷.۴
۱۰۹	انرژی	۱.۷.۴
۱۰۹	ظرفیت گرمایی	۲.۷.۴
۱۱۰	دیگر درجات آزادی	۳.۷.۴

۱۱۰	گاز کامل دواتمی	۸.۴
۱۱۰	تابع پارش گاز دواتمی	۱.۸.۴
۱۱۱	فرایند بی دررو	۲.۸.۴
۱۱۲	پارادوکس گیس	۹.۴

فصل ۵ نظریه جنبشی

۱۲۰	فضای فاز	۱.۵
۱۲۰	فضای فاز ذره	۱.۱.۵
۱۲۰	فضای فاز دستگاه	۲.۱.۵
۱۲۱	تابع پارش در فضای فاز	۳.۱.۵
۱۲۳	همپاری انرژی	۲.۵
۱۲۵	توزیع ماکسول - بولتزمن تندی	۳.۵
۱۲۵	تابع توزیع	۱.۳.۵
۱۲۶	مقدارهای میانگین	۲.۳.۵
۱۲۷	توزیع ماکسول - بولتزمن سرعت	۴.۵
۱۳۰	زمان برخورد	۵.۵
۱۳۰	سطح مقطع پراکندگی	۱.۵.۵
۱۳۱	زمان برخورد	۲.۵.۵
۱۳۲	تخمین بزرگی زمان برخورد	۳.۵.۵
۱۳۳	چسبندگی *	۶.۵
۱۳۳	نیروی چسبندگی	۱.۶.۵
۱۳۳	محاسبه چسبندگی	۲.۶.۵
۱۳۵	ضریب چسبندگی گازهای رقیق	۳.۶.۵
۱۳۷	رسانش گرمایی *	۷.۵
۱۳۷	رسانایی گرمایی	۱.۷.۵
۱۳۸	ضریب رسانایی گازهای رقیق	۲.۷.۵
۱۳۹	پخش *	۸.۵
۱۳۹	ضریب خودپخشی	۱.۸.۵
۱۳۹	ضریب خودپخشی گازهای رقیق	۲.۸.۵
۱۴۰	پخش در سه بعد	۳.۸.۵
۱۴۱	معادله پخش	۴.۸.۵

فصل ۶ توزیع گیس

۱۴۶	پتانسیل شیمیایی	۱.۶
۱۴۶	تعریف پتانسیل شیمیایی	۱.۱.۶
۱۴۷	پتانسیل شیمیایی بر حسب انرژی آزاد	۲.۱.۶
۱۴۷	پتانسیل شیمیایی در گاز کامل	۳.۱.۶

۱۴۸	۴.۱.۶	انرژی آزاد گیس
۱۴۹	۲.۶	شرایط تعادل
۱۵۲	۳.۶	تعادل، آنتروپی، و انرژی آزاد
۱۵۴	۴.۶	پتانسیل ترمودینامیکی
۱۵۵	۱.۴.۶	انرژی آزاد هلمهولتز
۱۵۵	۲.۴.۶	انرژی آزاد گیس
۱۵۶	۳.۴.۶	پتانسیل ترمودینامیکی و تعادل
۱۵۶	۵.۶	واکنش‌های شیمیایی
۱۵۶	۱.۵.۶	تعادل شیمیایی
۱۵۷	۲.۵.۶	ثابت تعادل
۱۶۱	۶.۶	توزیع گیس
۱۶۱	۱.۶.۶	تابع توزیع
۱۶۳	۲.۶.۶	محاسبه آنتروپی دستگاه بزرگ
۱۶۴	۷.۶	هنگرد بندادی بزرگ
۱۶۵	۱.۷.۶	توابع ترمودینامیکی
۱۶۶	۲.۷.۶	سطح جاذب

فصل ۷ آمار بوز - اینشتین

۱۷۲	۱.۷	آمار کوانتومی
۱۷۲	۱.۱.۷	بوزونها و فرمیون‌ها
۱۷۳	۲.۱.۷	اصل طرد
۱۷۴	۲.۷	آمار بوز - اینشتین
۱۷۴	۱.۲.۷	تابع توزیع
۱۷۶	۲.۲.۷	توزیع پلانک
۱۷۷	۳.۲.۷	پتانسیل شیمیایی گاز بوزونی
۱۷۸	۳.۷	گاز فوتونی*
۱۷۸	۱.۳.۷	توزیع فوتونها
۱۸۰	۲.۳.۷	محاسبه تعداد فوتونها
۱۸۰	۳.۳.۷	محاسبه فشار
۱۸۲	۴.۷	تابش جسم سیاه*
۱۸۲	۱.۴.۷	انرژی کل فوتونها
۱۸۳	۲.۴.۷	جسم سیاه
۱۸۳	۳.۴.۷	شدت تابش
۱۸۵	۵.۷	فونونها*
۱۸۵	۱.۵.۷	محاسبه بسامد دبای
۱۸۶	۲.۵.۷	انرژی فونونها
۱۸۸	۶.۷	چگالش بوز - اینشتین*

۱۸۸	توزیع ذرات	۱.۶.۷
۱۹۰	دمای بحرانی	۲.۶.۷
۱۹۲	تابع پارش	۷.۷
۱۹۳	محاسبه توزیع به کمک تابع پارش	۱.۷.۷
۱۹۴	تابع پارش بزرگ دستگاهی از بوزونها	۲.۷.۷
۱۹۵	محاسبه فشار گاز فوتونی	۳.۷.۷

فصل ۸ آمار فرمی - دیراک

۲۰۰	توزیع فرمی - دیراک	۱.۸
۲۰۰	تابع توزیع	۱.۱.۸
۲۰۲	انرژی فرمی	۲.۱.۸
۲۰۳	الکترون‌ها در فلزات	۲.۸
۲۰۳	چگالی حالت‌ها	۱.۲.۸
۲۰۳	محاسبه انرژی فرمی	۲.۲.۸
۲۰۴	عددهای اشغال در گاز فرمی *	۳.۸
۲۰۴	حد دمای بالا	۱.۳.۸
۲۰۵	دماهای معمولی	۲.۳.۸
۲۰۶	حد دمای پایین	۳.۳.۸
۲۰۷	گاز فرمی در دمای پایین *	۴.۸
۲۰۷	فشار گاز فرمی	۱.۴.۸
۲۰۷	ظرفیت گرمایی	۲.۴.۸
۲۰۸	مقایسه با نتیجه آمار کلاسیکی	۳.۴.۸
۲۰۹	تابع پارش	۵.۸
۲۱۱	استخراج توزیع ذرات از تابع پارش	۱.۵.۸
۲۱۱	محاسبه تعداد کل ذرات	۲.۵.۸
۲۱۲	پتانسیل شیمیایی در دمای بالا	۳.۵.۸
۲۱۳	آنتروپی گاز فرمی *	۶.۸
۲۱۵	گذار از آمار کوانتومی به کلاسیکی *	۷.۸
۲۱۵	مقایسه آمارها با توجه به تعداد حالت‌ها	۱.۷.۸
۲۱۶	مقایسه آمارها با توجه به دما و چگالی تعداد	۲.۷.۸
۲۱۷	آمار گاز کامل	۳.۷.۸
۲۱۸	مقایسه آمارها با توجه به فاصله ذرات	۴.۷.۸

فصل ۹ گذارهای فاز

۲۲۴	مراتب گذار	۱.۹
۲۲۴	گذار فاز	۱.۱.۹
۲۲۴	گذار مرتبه اول	۲.۱.۹
۲۲۴	گذار مرتبه دوم	۳.۱.۹

۲۲۵	۴.۱.۹ پارامتر نظم	
۲۲۶	۲.۹ فرو مغناطیس	
۲۲۷	۳.۹ تقریب میدان متوسط	
۲۲۸	۱.۳.۹ مغناطش خودبه خود	
۲۲۸	۲.۳.۹ گذار فاز	
۲۳۰	۴.۹ مدل آیزینگ *	
۲۳۱	۵.۹ تابع پارش مدل دو بعدی آیزینگ *	
۲۳۱	۱.۵.۹ شمارش اشیاء	
۲۳۳	۲.۵.۹ انرژی دستگاه	
۲۳۴	۶.۹ شکل صریح تابع پارش *	
۲۳۶	۷.۹ گذار فاز در مدل دوبعدی آیزینگ *	
	راهنمای حل تمرین ها	پیوست
۲۴۱	فصل ۱	
۲۴۴	فصل ۲	
۲۴۶	فصل ۳	
۲۴۷	فصل ۴	
۲۵۰	فصل ۵	
۲۵۲	فصل ۶	
۲۵۳	فصل ۷	
۲۵۵	فصل ۸	
۲۵۶	فصل ۹	
۲۵۹		کتابنامه
۲۶۱		نمایه

پیش گفتار

نسخه آزمایشی و اول کتاب حاضر در تیر ۱۳۸۴ منتشر شد و به مدت پنج سال منبع درس مکانیک آماری دوره کارشناسی فیزیک در دانشگاه پیام نور و برخی دیگر مؤسسات آموزش عالی بوده است. انتخاب مطالب و چگونگی عرضه آنها بر اساس اصول کلی حاکم بر متون درسی دانشگاه پیام نور انجام شده است؛ یعنی، پوشش کامل سرفصل مصوب و (تا حد امکان) خودآموز بودن اثر. در نگارش کتاب، کوشش شده با وجود تنوع مطالب، انسجام موضوع حفظ شود. بنابراین، بر اهمیت تابع پارش که مفهومی اساسی در مکانیک آماری است تأکید شده، و هر جا که امکان پذیر بوده، نتایج مستقیماً از تابع پارش استخراج شده است. حتی در سه فصل آخر کتاب هنگام معرفی توزیع های بوز-اینشتین، فرمی-دیراک، و گذارهای فاز (موضوعاتی که معمولاً در کتاب های سطح کارشناسی بدون اشاره به تابع پارش معرفی می شوند)، تابع پارش و چگونگی استخراج نتایج فیزیکی از آن بررسی شده است. این درجه از تأکید بر اهمیت تابع پارش نوآوری آموزشی این کتاب محسوب می شود.

ترتیب عرضه مطالب به صورت زیر است. در مقدمه راهنمایی مختصری برای علاقه مندان به تعقیب موضوع مکانیک آماری مطرح می شود. در فصل ۱، برخی مقدمات ریاضی مورد نیاز مرور می شود. این مقدمات شامل مفاهیم اولیه احتمال، توابع توزیع، تقریب استرلینگ، و ضرایب نامعین لاگرانژ است. در فصل ۲، برخی مفاهیم پایه مکانیک آماری شامل میکرو حالت، ماکرو حالت، واگنی، هنگرد، تمیز (نا) پذیری معرفی می شود. فصل ۳ به معرفی تابع پارش و برخی ویژگی های آن اختصاص دارد. کاربرد تابع پارش در بررسی دو دستگاه نمونه استاندارد، پارامغناطیس و نوسانگر هماهنگ، نیز نشان داده شده است. در فصل ۴، گاز کامل را بررسی می کنیم. تابع پارش مربوط به

درجات آزادی انتقالی، دورانی، و ارتعاشی گازی با مولکول‌های دواتمی را محاسبه می‌کنیم. پارادوکس گیبس را هم معرفی می‌کنیم. نظریه جنبشی موضوع فصل ۵ است. در آن فصل توزیع ماکسول-بولتزمن بررسی می‌شود. درباره همپاری انرژی، و پدیده‌های رسانش گرمایی، چسبندگی، و پخش نیز بحث می‌شود. در فصل ۶، به کمک توزیع گیبس، دستگاه‌هایی با تعداد متغیر ذرات بررسی می‌شوند. کاربرد تابع پارش در محاسبه ثابت تعادل واکنش‌های شیمیایی، یکی از بخش‌های فصل ۶ را تشکیل می‌دهد. فصل‌های ۷ و ۸ به بررسی آمار کوانتومی می‌پردازند. توزیع‌های بوز-اینشتین و فرمی-دیراک و کاربرد آنها در مطالعه آماری گازهای بوزونی یا فرمیونی، تابش جسم سیاه، فونون‌ها، چگالش بوز-اینشتین نیز بررسی می‌شود. توابع پارش مربوط و چگونگی استفاده از آنها نیز مطرح می‌شوند. در انتهای فصل ۸، به مقایسه آمارهای کلاسیکی و کوانتومی می‌پردازیم. گذارهای فاز نیز در فصل ۹ بررسی می‌شوند. مدل آیزینگ دوبعدی نمونه‌ای از دستگاه‌هایی است که گذار فاز انجام می‌دهند. تابع پارش مربوط را در تقریب براگ-ویلیامز به دست می‌آوریم.

ممکن است، مطالعه همه مطالب کتاب در یک نیم‌سال تحصیلی میسر نباشد. در این صورت می‌توان در اولین مطالعه، از بخش‌های ستاره‌دار چشم‌پوشی کرد.

نسخه قطعی کتاب مکانیک آماری، اکنون پس از رفع اشکالات نسخه آزمایشی تقدیم می‌شود. تغییرات این نسخه نسبت به نسخه آزمایشی عبارت است از بازنویسی برخی بخش‌ها، جابه‌جایی ترتیب عرضه برخی مطالب، افزودن چند شکل و رسم مجدد برخی از شکل‌ها، و ریزتر کردن بخش‌بندی مطالب به منظور کمک به دانشجویان در تفکیک مطالب و روش‌ها. کتابنامه به‌روز شده و مراجع بیش‌تری معرفی شده است.

در خاتمه، از همه اشخاصی که با بیان نظرات خود راهنمای این جانب بوده‌اند تشکر می‌کنم. به ویژه، از آقای دکتر علیرضا صفارزاده که زحمت ویرایش علمی نسخه آزمایشی کتاب را کشیده‌اند، و از آقایان دکتر عبدالرسول قرائتی، دکتر علی‌اصغر شکری، و دکتر علیرضا رازقی‌زاده به دلیل نظرات ارزشمندشان سپاسگزاری می‌کنم. آقای دکتر رازقی‌زاده کتاب را نقد کردند و نظرات ایشان موجب ارتقای کیفی کتاب شده است. همچنین از سرکار خانم زهرا جلال‌زاده برای ویرایش زبانی- صوری کتاب تشکر می‌کنم. بدیهی است مسئولیت کاستی‌های احتمالی کتاب با مؤلف است. از همکاران

مدیریت تدوین و تولید محتوا و تجهیزات آموزشی و انتشارات دانشگاه پیام نور برای
زحماتی که در انتشار این کتاب متحمل شده‌اند تشکر می‌کنم.
در مقایسه با دروس اصلی دیگر، در زمینه مکانیک آماری کتاب‌های کمتری به زبان
فارسی منتشر شده است. امید است این اثر سهمی در پرکردن این خلأ داشته باشد.

مرتضی محسنی

دانشگاه پیام نور

اسفند ۱۳۸۹

مقدمه

مکانیک آماری قدمتی دست کم صد ساله دارد. امروزه، این حوزه بخشی از دروس اصلی فیزیک (به ویژه در دوره‌های تحصیلات تکمیلی) را تشکیل می‌دهد و در عین حال در زمره شاخه‌های پژوهشی بسیار فعال است. تقریباً در هر شاخه فیزیک، از فیزیک ماده چگال گرفته تا اخترفیزیک، کاربردهای گسترده مکانیک آماری را می‌توان دید. علاوه بر این کاربردهای سنتی، اخیراً استفاده از مکانیک آماری در حوزه‌های دور از انتظاری مانند تحلیل بازارهای مالی، شبکه‌های عصبی و طیف گسترده‌ای از سایر دستگاه‌های پیچیده رایج شده است. امید است مطالعه کتاب حاضر خواننده را ترغیب کند تا مکانیک آماری را در سطحی پیشرفته‌تر پیگیری کند و خود را آماده ورود به این حوزه پژوهشی جذاب نماید.

برای خواننده‌ای که مایل باشد مطالب را از دیدگاه‌های دیگر (اما در همین سطح) نیز مرور کند کتاب‌های بولی و سانچز (۲۰۰۰)، گلیزر و وارک (۲۰۰۱)، و هوانگ (۲۰۰۹) را پیشنهاد می‌کنیم. برای فراگیری مکانیک آماری در سطح پیشرفته‌تر، کتاب‌های مناسب زیادی وجود دارند از جمله کتاب پتريا و بیل (۲۰۱۱) و کتاب هوانگ (۱۹۸۷). برای علاقه‌مندان به مطالعه اختصاصی (و در عین حال، فشرده) از موضوع گذارهای فاز نیز انتخاب‌های متنوعی وجود دارد از جمله کتاب یومانس (۱۹۹۲).

سرشت دستگاه‌هایی که نوعاً در مکانیک آماری بررسی می‌شوند به گونه‌ای است که کمتر امکان یافتن حل‌های تحلیلی و دقیق وجود دارد. بنابراین، روش‌های عددی ابزاری اساسی در این علم است. متأسفانه، در این کتاب مجالی برای بحث در این باره نیافتیم، اما نوشتار گسترده‌ای در این موضوع وجود دارد. برای نمونه در کتاب ساچز،

سن، و سکستون (۲۰۰۶) برخی روش‌های عددی مطرح شده است. خواننده‌ای که مایل است مثالی از کاربردهای مکانیک آماری در حوزه‌های نامتعارف (با استانداردهای سنتی فیزیک!) را ببیند، نگاهی به مقاله مروری یا کوونکو و راسر (۲۰۰۹) را توصیه می‌کنیم.

با توجه به گستردگی موضوعات مورد بررسی در مکانیک آماری و تحول دائمی آنها، امکان اشاره به همه موضوعات مهم در این مختصر وجود ندارد. بنابراین، اشاره به مراجع بالا تا حدودی به سلیقه مؤلف بازمی‌گردد، اما در هر حال مراجعه به آنها آشنایی با مراجع بیشتری را میسر خواهد کرد.

فصل ۱

احتمال

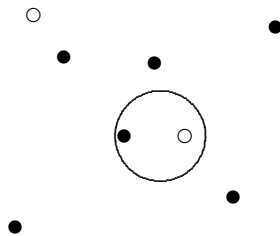
در این فصل مفاهیم و روش‌های زیر را بررسی می‌کنیم: احتمال و چگونگی محاسبه آن، توزیع احتمال، محاسبه میانگین‌ها به کمک تابع توزیع، محاسبه مقدار تقریبی لگاریتم $n!$ و بیشینه کردن توابع در حضور قیود. توزیع‌های مهم دوجمله‌ای و گاوسی را به کمک مثال‌های فیزیکی به دست می‌آوریم. پس از مطالعه این فصل باید بتوانید:

۱. احتمال را تعریف کنید و چگونگی محاسبه احتمال وقوع رویدادهای ساده، مرکب، و مستقل را توضیح دهید.
۲. روابط آرایه‌ها، جایگشت‌ها، و ترکیب‌ها را به کار برید.
۳. توزیع را تعریف کنید و چگونگی به دست آوردن تابع توزیع را در توزیع‌های گسسته و پیوسته توضیح دهید.
۴. برای یک توزیع داده شده، احتمال یافتن متغیر در بازه‌ای معین و نیز میانگین‌ها را محاسبه کنید.
۵. اهمیت انحراف معیار را توضیح دهید و برای یک توزیع داده شده آن را محاسبه کنید.
۶. تقریب استرلینگ را بیان کنید و از آن در محاسبه‌ها استفاده کنید.
۷. چگونگی استفاده از ضرایب نامعین لاگرانژ را توضیح دهید.
۸. توزیع‌های دوجمله‌ای و گاوسی را به دست آورید.

۱.۱ مفهوم احتمال

فرض کنید سکه‌ای را پرتاب کنیم. نتیجه پرتاب سکه ممکن است طرف پشت (t) یا روی (h) آن باشد. هر نتیجه را یک رویداد می‌نامیم. رویدادی مانند آوردن t رویدادی ساده است؛ یعنی؛ نمی‌توان آن را به رویدادهای دیگر تجزیه کرد. رویدادی که خود از چند رویداد ساده تشکیل شده باشد؛ مانند، نتیجه پرتاب سکه و تاس که ممکن است t (برای سکه) و ۳ (برای تاس) باشد، رویداد مرکب نام دارد.

برای نمایش رویدادها، می‌توان فضایی انتزاعی را در نظر می‌گیریم که در آن هر نقطه متناظر با رویدادی ساده است. به این فضا فضای نمونه گویند. در این فضا رویدادهای مرکب با مجموعه‌ای از نقاط نشان داده می‌شوند. شکل ۱.۱ فضای نمونه پرتاب سکه و تاس را نمایش می‌دهد.



شکل ۱.۱ فضای نمونه پرتاب سکه و تاس. دو نقطه درون دایره رویداد مرکب معینی را نشان می‌دهند.

نقاط فضای نمونه را با شاخص i ($1 \leq i \leq W$) که در آن W تعداد نقاط فضای نمونه است)، نامگذاری می‌کنیم. به نقطه i عدد p_i (احتمال وقوع رویداد i) را نسبت می‌دهیم، به گونه‌ای که ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1$$

در ادامه دو روش محاسبه احتمال را بررسی می‌کنیم که عبارت‌اند از احتمال کلاسیکی، و احتمال آماری.

۱.۱.۱ احتمال کلاسیکی

اگر در آزمایشی هیچ اطلاعی در مورد رویدادها نداشته باشیم، فرض می‌کنیم که همه آنها به یک اندازه محتمل‌اند و احتمال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$p_i = \frac{1}{W} \quad (۱.۱)$$

مثال ۱.۱:

در پرتاب یک سکه، داریم

$$W = ۲,$$

$$p_i = \frac{1}{۲}.$$

برای n بار پرتاب یک سکه داریم

$$W = ۲^n,$$

$$p_i = \frac{1}{۲^n}$$

که در آن p_i احتمال وقوع هر ترتیب معین را نشان می‌دهد. ■

۲.۱.۱ احتمال آماری

در بسیاری از وضعیت‌ها همه رویدادها به یک اندازه محتمل نیستند. در این موارد باید از مفهوم احتمال آماری استفاده کرد. برای محاسبه احتمال آماری نخست باید فراوانی نسبی رویدادها را مشخص کرد. فرض کنید در N بار آزمایش، رویداد i ، n_i بار پیش آید. احتمال آماری وقوع i ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N} \quad (۲.۱)$$

در عمل نمی‌توان آزمایش را بینهایت بار انجام داد، بنابراین معمولاً فراوانی نسبی وقوع رویدادها ($\frac{n_i}{N}$) را برای N محدود حساب می‌کنیم. از این به بعد، برای اختصار، به جای «احتمال آماری» می‌گوییم «احتمال».

۲.۱ محاسبه احتمال

۱.۲.۱ رویداد مرکب

در محاسبه احتمال وقوع رویدادی مرکب، از اصل زیر استفاده می‌شود:

اگر رویدادهای i و j نتوانند هم‌زمان در آزمایشی اتفاق بیفتند و رویداد مرکب عبارت باشد از وقوع رویداد i یا رویداد j ، در این صورت احتمال وقوع این رویداد مرکب، که با $i + j$ نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$p_{i+j} = p_i + p_j. \quad (3.1)$$

مثال ۲.۱:

فرض کنید روی ده کارت به ترتیب عددهای ۰ تا ۹ درج شده باشد. از میان این کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت بر می‌داریم. فرض کنید رویدادهای i و j به ترتیب عبارت باشند از برداشتن کارت ۳ و کارت ۶. این دو رویداد نمی‌توانند هم‌زمان پیش آیند. بنابراین، احتمال برداشتن کارت ۳ یا کارت ۶ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} p_{i+j} &= p_i + p_j \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

■

۲.۲.۱ رویدادهای مستقل

برخی رویدادها از یکدیگر مستقل‌اند؛ یعنی، روی دادن یکی از آنها، به وقوع بقیه بستگی ندارد. محاسبه احتمال وقوع توأم رویدادهای مستقل i و j با استفاده از رابطه زیر انجام می‌شود.

$$p_{i,j} = p_i \times p_j \quad (4.1)$$

مثال ۳.۱:

با پرتاب تاس و سکه، برای رویداد آوردن ۳ و t داریم

$$\begin{aligned} p_{3,t} &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

■

۳.۱ شمارش رویدادها

در محاسبه احتمال، به شمارش فراوانی رویدادها نیاز است. در ادامه روابط مربوط به پیکربندی‌های زیر را بررسی می‌کنیم: آرایه‌ها، جایگشت‌ها، و ترکیب‌ها.

۱.۳.۱ آرایه‌ها

تعداد راه‌های مرتب کردن n شیء مختلف برابر $n!$ است. برای مثال، تعداد راه‌های مرتب کردن سه علامت $\$, \#$ و $\&$ ، برابر است با

$$3! = 6.$$

این شش آرایه عبارت‌اند از

$$\$ \# \& \quad \$ \& \# \quad \& \$ \# \quad \& \# \$ \quad \# \$ \& \quad \# \& \$.$$

اکنون فرض کنید بخواهیم n شیء را که m شیء از آنها یکسان‌اند مرتب کنیم. تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$W = \frac{n!}{m!}. \quad (5.1)$$

این رابطه را با مثال زیر توجیه می‌کنیم.

مثال ۴.۱:

فرض کنید در مثال بالا، همه علامت‌های $\#$ را به $\&$ تبدیل کنیم. در این صورت نیمی از شش آرایه تکراری می‌شوند. برای جلوگیری از شمارش‌های تکراری باید تعداد کل آرایه‌ها (یعنی $3!$) را بر تعداد تکرار هر آرایه (یعنی $2!$) تقسیم کرد. بنابراین، تعداد آرایه‌ها برابر است با

$$\frac{3!}{2!} = 3.$$

این آرایه‌ها عبارت‌اند از

$$\$ \& \& \quad \& \$ \& \quad \& \& \$.$$



این نتیجه به حالتی که m شیء از یک نوع باشد، r شیء از یک نوع دیگر و به همین ترتیب تا آخر، تعمیم پذیر است. در این صورت تعداد آرایه‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$W = \frac{n!}{m!r!\dots} \quad (6.1)$$

۲.۳.۱ جایگشت‌ها

فرض کنید می‌خواهیم از بین n شیء m شیء را انتخاب کنیم. برای اولین انتخاب n راه مختلف وجود دارد. وقتی اولین انتخاب انجام شد، $n - 1$ شیء باقی می‌ماند. در نتیجه، برای دومین انتخاب $n - 1$ راه وجود دارد و به همین ترتیب تا آخرین انتخاب که برای آن $n + 1 - m$ راه وجود خواهد داشت. بنابراین، تعداد کل راه‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} W &= n(n-1)\cdots(n+1-m) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n-m)(n-m-1)\cdots 1} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \end{aligned} \quad (۷.۱)$$

این کمیت را جایگشت‌های m شیء از n شیء می‌نامند.

۳.۳.۱ ترکیب‌ها

در برخی موارد ترتیب انجام انتخاب‌ها اهمیتی ندارد. برای نمونه، فرض کنید در مثال انتخاب m شیء از بین n شیء، برایمان مهم نباشد که کدام شیء نخست انتخاب می‌شود، کدام شیء دوم و به همین ترتیب تا آخر. در چنین مواردی تعداد راه‌های ممکن در مقایسه با جایگشت‌ها به نسبت $m!$ کاهش می‌یابد، زیرا تعداد راه‌هایی که دیگر از نظر ما مختلف به حساب نمی‌آیند برابر $m!$ است. بنابراین، تعداد راه‌ها برابر است با

$$W = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (۸.۱)$$

مجموعه این راه‌ها را ترکیب‌های p شیء از n شیء می‌نامند. به همین ترتیب، می‌توان مجموعه ترکیب‌های $n_1, n_2, \dots, n_r$ شیء از N شیء را تشکیل داد. برای شمارش تعداد این ترکیب‌ها، رابطه (۸.۱) را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

$$W = \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} \quad (۹.۱)$$

که در آن

$$\sum_{i=1}^r n_i = N.$$

مثال ۵.۱:

هشت سکه را پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم احتمال آوردن حداقل شش h را حساب کنیم. نتیجه پرتاب هر سکه از نتیجه پرتاب سکه‌های دیگر مستقل است. تعداد نتایج مختلف پرتاب هشت سکه برابر است با

$$\begin{aligned} W &= 2^8 \\ &= 256. \end{aligned}$$

رویداد مورد نظر رویدادی مرکب از سه رویداد زیر است: آوردن شش h ، آوردن هفت h ، و آوردن هشت h . بنابراین، احتمال وقوع رویداد مورد نظر برابر جمع احتمال‌های وقوع این سه رویداد است. احتمال وقوع هر یک از این رویدادها برابر است با فراوانی نسبی وقوع آنها. از طرفی تعداد رویدادهای آوردن شش h برابر ترکیب‌های شش شیء از هشت شیء، تعداد رویدادهای آوردن هفت h برابر ترکیب‌های هفت شیء از هشت شیء، و تعداد رویدادهای آوردن هشت h برابر ترکیب‌های هشت شیء از هشت شیء است. بنابراین،

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 \\ &= \frac{W_1}{W} + \frac{W_2}{W} + \frac{W_3}{W} \\ &= \frac{1}{256} \left(\frac{8!}{6!2!} + \frac{8!}{7!1!} + \frac{8!}{8!0!} \right) \\ &= \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} \\ &= \frac{37}{256}. \end{aligned}$$

■

۴.۱ توزیع

توزیع، توصیفی از تعداد نسبی وقوع رویدادها در طی تعدادی آزمایش است. تابعی را که توزیع را توصیف می‌کند تابع توزیع احتمال می‌نامند. از این به بعد تابع توزیع احتمال را به اختصار تابع توزیع می‌نامیم. توزیع ممکن است گسسته یا پیوسته باشد، یعنی، ممکن است با تابعی گسسته و یا پیوسته مشخص شود.

۱.۴.۱ توزیع گسسته

فرض کنید آزمایشی عبارت از پرتاب شش سکه باشد. این آزمایش را بیست بار انجام می‌دهیم و هر بار تعداد وقوع t را ثبت می‌کنیم. فرض کنید نتیجه به صورت جدول ۱.۱ باشد.

جدول ۱.۱ نتیجه فرضی بیست بار پرتاب شش سکه

شماره آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد t	۱	۰	۳	۲	۲	۱	۲	۳	۳	۳
شماره آزمایش	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
تعداد t	۴	۳	۳	۴	۳	۴	۴	۲	۳	۴

با توجه به جدول ۱.۱ می‌توان فراوانی نسبی وقوع t را حساب کرد. برای نمونه، در طی بیست بار آزمایش یک بار نتیجه آزمایش آوردن صفر t بوده است. در نتیجه، فراوانی نسبی آن $\frac{1}{20} = 0.05$ است. به همین ترتیب، می‌توان فراوانی نسبی مقادیر دیگر را نیز محاسبه کرد. نتیجه این محاسبات را در جدول ۲.۱ مشاهده می‌کنید.

جدول ۲.۱ فراوانی نسبی در آزمایش بیست بار پرتاب شش سکه

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۱	۲	۴	۶	۴	۳	۰
فراوانی نسبی	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۲	۰/۱۵	۰

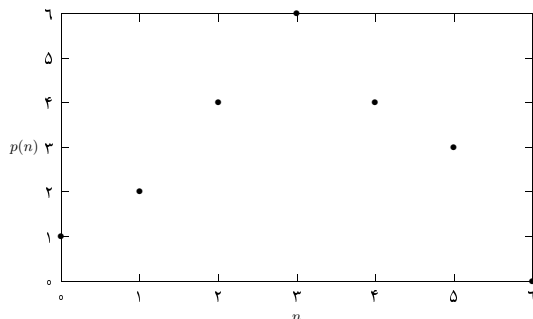
نتایج جدول ۲.۱ را می‌توان به صورت نمودار نیز نمایش داد. اگر مقادیر n را بر محور افقی و مقادیر فراوانی نسبی $p(n)$ را بر محور عمودی قرار دهیم، نمودار شکل ۲.۱ به دست می‌آید. در این مثال، صحبت از مثلاً $n = 0.5$ بی معناست. بنابراین، توزیع متناظر با آن توزیعی گسسته است.

در توزیع گسسته، احتمال وقوع مقدار $n = a$ را با $p(a)$ نمایش می‌دهیم. برای نمونه، در مثال بالا

$$p(2) = \frac{4}{20}$$

یعنی احتمال آوردن دو t برابر است با $0.2 = \frac{4}{20}$.

در حالت کلی برای تعیین تابع توزیع (گسسته) به روش زیر عمل می‌کنیم. رویدادها

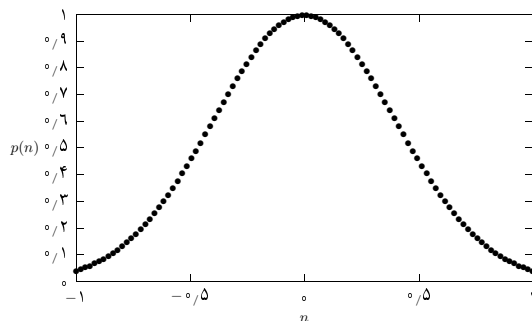


شکل ۲.۱ نمودار توزیعی گسسته

را از ۱ تا r به گونه‌ای شماره‌گذاری می‌کنیم که $n_1 < n_2 < \dots < n_r$. در رابطهٔ اخیر n_i فراوانی رویداد i را نشان می‌دهد. اگر تابع $W(n_i)$ تعداد وقوع n_i را نشان دهد، تابع توزیع عبارت است از

$$p(n_i) = \frac{W(n_i)}{\sum_{i=1}^r W(n_i)}. \quad (10.1)$$

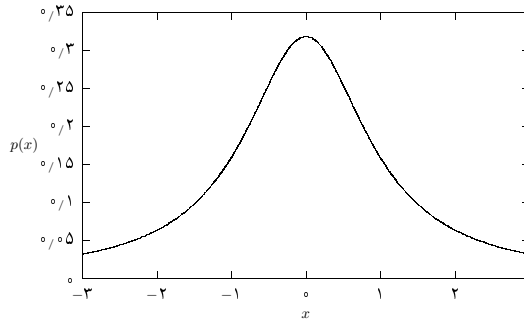
در مثال بالا فاصلهٔ تصویر نقاط روی محور افقی برابر یک است. ممکن است در مسئلهٔ دیگری این فاصله کمتر (یا بیشتر) باشد. هر چه این فاصله کمتر شود، چگالی نقاط روی نمودار بیشتر می‌شود، مانند شکل ۳.۱.



شکل ۳.۱ نمونه‌ای از نمودار توزیع گسستهٔ چگال

۲.۴.۱ توزیع پیوسته

در شکل ۳.۱ در حالت حدی می‌توان تعداد نقاط را به بینهایت میل داد و توزیع پیوسته‌ای مانند شکل ۴.۱ به دست آورد.



شکل ۴.۱ نمونه‌ای از نمودار توزیع پیوسته

فرض کنید در توزیع پیوسته‌ای مانند شکل ۴.۱، تابع توزیع به متغیر پیوسته x بستگی داشته باشد. در این حالت، تابع توزیع با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$p(x) = \frac{W(x)}{\int_a^b W(y)dy} \quad (۱۱.۱)$$

که در آن a و b دامنه تغییرات متغیر است و

$$p(x)dx$$

عبارت است از احتمال آنکه کمیت x مقداری بین x و $x + dx$ داشته باشد. بنابراین، احتمال آنکه x بین a و b باشد برابر است با

$$p = \int_a^b p(x)dx. \quad (۱۲.۱)$$

یعنی، مساحت زیر نمودار تابع توزیع از $x = a$ تا $x = b$.

مثال ۶.۱:

ذره‌ای کلاسیکی به جرم m بر اثر نیرویی با ثابت k بین دو نقطه $x = \pm l$ حرکت نوسانی هماهنگ ساده‌ای انجام می‌دهد. می‌خواهیم احتمال آنکه ذره بین x و $x + dx$ باشد را پیدا کنیم. به طور شهودی می‌دانیم که فراوانی نسبی مربوط به این اتفاق متناسب است

با نسبت مدت زمانی که این ذره در این بازه قرار دارد، به کل زمانی که طول می کشد تا یک نوسان کامل را انجام دهد. بنابراین، احتمال مربوط برابر است با

$$\frac{2dt}{T}$$

که در آن ضریب ۲ برای آن است که ذره می تواند در این بازه مکانی dx باشد و به طرف چپ یا راست حرکت کند. به عبارت دیگر، رویدادی مرکب داریم که از دو رویداد ساده تشکیل شده است و احتمال وقوع هر یک از این دو رویداد برابر است با

$$\frac{dt}{T}.$$

به این ترتیب، احتمال خواسته شده از رابطه زیر به دست می آید.

$$p(x)dx = \frac{2dt}{T} \quad (۱۳.۱)$$

از طرفی، در این نوسانگر هماهنگ ساده داریم

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}kl^2$$

که از آن نتیجه می شود

$$dt = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{dx}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

که در آن dx مثبت است. بنابراین، با توجه به رابطه

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

داریم

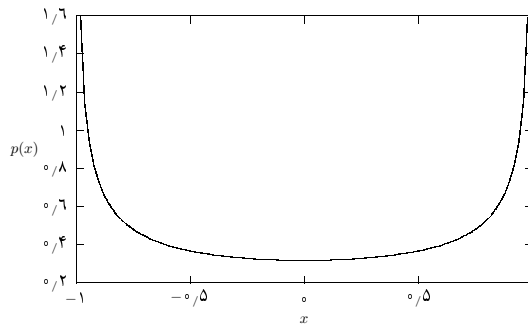
$$\frac{2dt}{T} = \frac{dx}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

از ترکیب این رابطه و رابطه (۱۳.۱) نتیجه می گیریم

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

برای اطمینان از درستی این رابطه، محاسبه زیر را انجام می دهیم.

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l p(x)dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$



شکل ۵.۱ توزیع x در مثال نوسانگر هماهنگ ساده برای $l = 1$

یعنی، احتمال یافتن ذره در دامنه نوسان ۱ است. نمودار این توزیع را در شکل ۵.۱ مشاهده می کنید. ■

۳.۴.۱ مقدارهای میانگین

با داشتن تابع توزیع می توان مقدارهای میانگین را حساب کرد. توزیع گسسته $p(n_i)$ را در نظر می گیریم که در آن n_i مقدارهای $n_1, n_2, \dots, n_r$ را می گیرد. میانگین تابع $f(n_i)$ با رابطه زیر تعریف می شود.

$$\overline{f(n_i)} = \sum_{i=1}^r p(n_i) f(n_i) \quad (۱۴.۱)$$

به همین ترتیب برای توزیع پیوسته $p(x)$ میانگین تابع $f(x)$ با رابطه زیر تعریف می شود

$$\overline{f(x)} = \int_a^b p(x) f(x) dx \quad (۱۵.۱)$$

که در آن a, b دامنه مقدارهای مجاز متغیر پیوسته x است.

مثال ۷.۱:

فرض کنید توزیع متغیر x با رابطه زیر باشد

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}$$

که در آن x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند. می خواهیم احتمال اینکه x مقداری بین $-a$ تا a داشته باشد و نیز میانگین x (یعنی $\bar{x}$) را حساب کنیم. این تابع بهنجار است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx$$

$$= ۱.$$

احتمال خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned} p &= \int_{-a}^a p(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{a}{x^2 + a^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

و میانگین x نیز عبارت است از

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{a}{x^2 + a^2} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

نتیجهٔ اخیر قابل پیش‌بینی است، زیرا احتمال وقوع x به اندازهٔ $-x$ است. بنابراین، در میانگین، همدیگر را حذف می‌کنند. ■

۴.۴.۱ انحراف معیار

برای توزیع گسستهٔ $p(n_i)$ یا توزیع پیوستهٔ $p(x)$ علاوه بر مقدارهای میانگین، کمیت مفید دیگری به نام انحراف معیار توزیع نیز تعریف می‌شود. تعریف این کمیت که با σ نشان داده می‌شود، در توزیع گسسته و پیوسته به ترتیب به صورت زیر است

$$\sigma = \sqrt{(n_i - \bar{n}_i)^2}, \quad (۱۶.۱)$$

$$\sigma = \sqrt{(x - \bar{x})^2}. \quad (۱۷.۱)$$

انحراف معیار نشان می‌دهد توزیع مقادیر x تا چه حد در اطراف $\bar{x}$ پراکنده است. گاهی بهتر است به جای تعریف بالا از نتیجهٔ زیر استفاده کنیم.

در توزیع پیوسته

$$\sigma = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2} \quad (۱۸.۱)$$

زیرا

$$\begin{aligned}
 \overline{(x - \bar{x})^2} &= \overline{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2} \\
 &= \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 \\
 &= \overline{x^2} - \bar{x}^2.
 \end{aligned}$$

در توزیع گسسته نیز رابطه مشابهی برقرار است. روابط (۱۷.۱) و (۱۷.۱) را می‌توان به ترتیب به صورت زیر نیز نوشت

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^r p(n_i)(n_i - \bar{n})^2}, \quad (۱۹.۱)$$

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b p(x)(x - \bar{x})^2 dx}. \quad (۲۰.۱)$$

مثال ۸.۱:

می‌خواهیم برای توزیع

$$p(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}$$

که در آن a یک عدد ثابت است، انحراف معیار را حساب کنیم. نخست میانگین x را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\
 &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2} dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

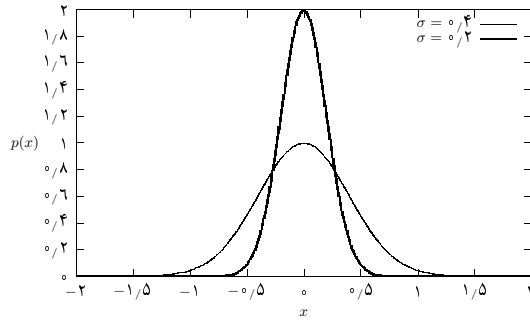
در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \\
 &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx \\
 &= \frac{1}{2a}.
 \end{aligned}$$

بنابراین، انحراف معیار این توزیع عبارت است از

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2a}}.$$

همان گونه که از شکل ۶.۱ پیداست، با افزایش انحراف معیار پهنای نمودار توزیع بیشتر می‌شود.



شکل ۶.۱ تأثیر انحراف معیار بر پهنای نمودار برای توزیع $p(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ax^2}$

■

۵.۱ تقریب استرلینگ

تعداد آرایه‌های n شیء و تعداد جایگشت‌ها یا ترکیب‌های m شیء از n شیء همگی شامل جمله‌هایی مانند $n!$ هستند. بنابراین، هنگام شمارش تعداد حالت‌ها، معمولاً با $n!$ سروکار داریم که در بیشتر دستگاه‌ها عدد بسیار بزرگی است. گاهی دانستن مقدار دقیق این عدد اهمیت چندانی ندارد و می‌توان بدون از دست دادن نتایج فیزیکی، از مقدار تقریبی آن استفاده کرد. این کار معمولاً به ساده‌تر شدن محاسبات می‌انجامد. قضیه استرلینگ چگونگی جایگزینی $n!$ با مقدار تقریبی آن را نشان می‌دهد. در ادامه این بخش صورت ساده‌ای از این قضیه را به دست می‌آوریم.

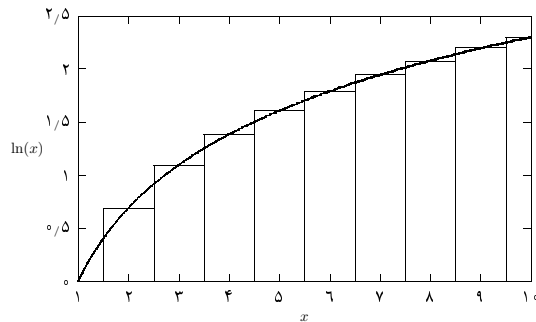
طبق تعریف داریم

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \ln n! &= \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \\ &= \sum_{m=1}^n \ln m. \end{aligned}$$

در n بزرگ می‌توان به جای جمع روی مقادیر گسسته m از انتگرال‌گیری روی متغیر پیوسته x استفاده کرد که تقریب خوبی را به دست می‌دهد. این ادعا در شکل ۷.۱ توجیه شده است.



شکل ۷.۱ نمودار $\ln x$ بر حسب x

در شکل ۷.۱ مساحت زیر منحنی در n بزرگ تقریباً با مساحت مستطیل‌ها برابر است. بنابراین،

$$\begin{aligned} \ln n! &\approx \int_1^n \ln x dx \\ &= (x \ln x - x) \Big|_1^n \\ &= n \ln n - n + 1. \end{aligned}$$

چون n بزرگ است می‌توان از ۱ نیز در مقابل دو جمله دیگر صرف‌نظر کرد. به این ترتیب قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه استرلینگ: در n بزرگ داریم

$$\ln n! \approx n \ln n - n. \quad (21.1)$$

در برخی کاربردها بهتر است تقریب استرلینگ را به صورت دیگری نوشت. صورت دیگر این تقریب عبارت است از^۱

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}. \quad (22.1)$$

۱. به کتاب ریاضی فیزیک نوشته جورج آرفکن مراجعه کنید.

یا

$$\ln n! \approx \left(n + \frac{1}{4}\right) \ln n - n + \frac{1}{4} \ln(2\pi). \quad (23.1)$$

جدول ۳.۱ مقادیر $\ln n!$ و تقریب استرلینگ آنها را در برخی مقادیر n نشان می‌دهد که در آن $s(n)$ مساوی عبارت سمت راست رابطه (۲۳.۱) است.

جدول ۳.۱ برخی مقدارهای $\ln n!$ و تقریب استرلینگ آنها

$s(n)$	$n \ln n - n$	$\ln n!$	n
۴/۷۷	۳/۰۵	۴/۷۹	۵
۲۷/۸۹	۲۵/۶۲	۲۷/۹۰	۱۵
۵۸/۰۰	۵۵/۴۷	۵۸/۰۰	۲۵
۹۲/۱۳	۸۹/۴۴	۹۲/۱۴	۳۵
۱۲۹/۱۲	۱۲۶/۳۰	۱۲۹/۱۲	۴۵
۱۶۸/۳۲	۱۶۵/۴۰	۱۶۸/۳۲	۵۵
۲۰۹/۳۴	۲۰۶/۳۳	۲۰۹/۳۴	۶۵

مثال ۹.۱:

می‌خواهیم با استفاده از قضیه استرلینگ نشان دهیم برای پرتاب N سکه، محتمل‌ترین نتیجه آن است که تعداد h و t هر یک برابر $\frac{N}{2}$ باشد. اگر تعداد h ها را n بنامیم، تعداد t ها $N - n$ خواهد بود. تعداد راه‌های ممکن عبارت است از

$$W = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود

$$\ln W = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)!.$$

اگر N بزرگ باشد n نیز بزرگ خواهد بود، زیرا حالت‌هایی مانند $n = 1$ چندان محتمل نیستند. بنابراین، از قضیه استرلینگ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \ln W &\approx N \ln N - N - n \ln n + n - (N-n) \ln(N-n) + (N-n) \\ &= N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n). \end{aligned}$$

برای یافتن بیشینه W ، n را متغیری پیوسته فرض می‌کنیم و از دو طرف رابطه بالا نسبت به آن مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d \ln W}{dn} \approx -\ln n + \ln(N-n)$$

$$= \ln \left(\frac{N-n}{n} \right)$$

که اگر آن را برابر صفر بگیریم،

$$\ln \left(\frac{N-n}{n} \right) = 0.$$

بنابراین

$$n = \frac{N}{2}.$$

■

۶.۱ ضرایب نامعین لاگرانژ

فرض کنید

$$f(n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^r n_i!}$$

که در آن

$$\sum_{i=1}^r n_i = N$$

و N و n_i همگی عددهای بزرگی باشند. بنابراین

$$\begin{aligned} \ln f(n_1, n_2, \dots, n_r) &\approx N \ln N - N - \sum_{i=1}^r (n_i \ln n_i - n_i) \\ &= N \ln N - \sum_{i=1}^r n_i \ln n_i. \end{aligned}$$

می‌خواهیم $\ln f(n_1, n_2, \dots, n_r)$ را بیشینه کنیم. در این گونه مسئله‌ها نمی‌توان به طور ساده از تابع مشتق گرفت و آن را برابر صفر قرار داد، زیرا روابط دیگری وجود دارند که باید هنگام بیشینه کردن تابع آنها را رعایت کرد. چنین روابطی را قیدهای مسئله می‌نامند. در این موارد می‌توان از روش ضرایب نامعین لاگرانژ استفاده کرد.

در مورد مثال یافتن بیشینه $\ln f(n_1, n_2, \dots, n_r)$ قید زیر وجود دارد

$$\sum_{i=1}^r n_i = N$$

که از آن نتیجه می شود

$$\sum_{i=1}^r dn_i = 0.$$

دو طرف این رابطه را در عدد دلخواه λ ضرب و آن را با دو طرف رابطه زیر جمع می کنیم.

$$\begin{aligned} d \ln f(n_1, n_2, \dots, n_r) &= - \sum_{i=1}^r dn_i \ln n_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

نتیجه می شود

$$\sum_{i=1}^r (\ln n_i + \lambda) dn_i = 0$$

که در آن تعداد dn_i مستقل برابراست با $r-1$ زیرا تعداد قیدها برابر ۱ است. برای برقرار بودن رابطه بالا لازم است $r-1$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\ln n_i + \lambda = 0.$$

همچنین، می توان λ را چنان برگزید که ضرایب dn_i باقیمانده نیز صفر شود. بنابراین، برای هر i داریم

$$n_i = e^{-\lambda}.$$

به این ترتیب، مقادیر n_i که تابع $\ln f(n_1, n_2, \dots, n_r)$ را بیشینه می کنند تعیین می شود. در این مثال λ ضریب لاگرانژ است. اگر تعداد قیدها بیشتر شود، تعداد ضرایب لاگرانژ نیز بیشتر می شود. در بخش های بعد، از این روش برای بیشینه کردن تعداد حالتها استفاده می کنیم.

۷.۱ توزیع چند جمله ای

۱.۷.۱ توزیع دو جمله ای

فرض کنید ذره ای در یک بعد در N گام متوالی به طور تصادفی جابه جا شود. می خواهیم احتمال یافتن ذره در مکان $x = nl$ را بیابیم که در آن l اندازه جابه جایی در هر گام، و n

عدد درستی بین $-N$ و N است. برای مثال، فرض کنید تعداد گام‌ها برابر ۴، مکان مورد نظر $x = ۲l$ ، و احتمال برداشتن یک گام به راست یا چپ یکسان و برابر $\frac{1}{۲}$ باشد. ذره برای برداشتن چهار گام شانزده راه مختلف دارد که عبارت‌اند از

$$\begin{array}{cccc} ++++ & +++- & ++-+ & +-++ \\ -+++ & -++- & -+-+ & --++ \\ +-+- & +--+ & ++-- & +--- \\ -+-- & --+- & ---+ & ---- \end{array}$$

که در آن $+$ نشان‌دهنده گام به طرف راست و $-$ نشان‌دهنده گام به طرف چپ است. احتمال وقوع هر یک از این شانزده حالت، یکسان و برابر $\frac{1}{۱۶}$ است. همچنین، برابر است با

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1.$$

از این شانزده انتخاب فقط در $۴ = \frac{4!}{۳!۱!}$ انتخاب

$$+++- \quad ++-+ \quad +-++ \quad -+++$$

ذره به $x = ۲l$ می‌رسد. بنابراین، احتمال رسیدن ذره به مکان مذکور برابر است با

$$۴ \times \frac{1}{۱۶} = \frac{4!}{۳!۱!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1.$$

محاسبه احتمال در حالت کلی به صورت زیر است. فرض کنید تعداد گام‌هایی که ذره به طرف راست یا چپ جابه‌جا می‌شود به ترتیب n_+ و n_- باشد. در این صورت

$$N = n_+ + n_- \quad (۲۴.۱)$$

و

$$n = n_+ - n_-. \quad (۲۵.۱)$$

در نتیجه

$$n = ۲n_+ - N.$$