



مکانیک کوانتومی ۱

(رشته فیزیک)

دکتر احمد آخوند دکتر داود افشار

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست

نه	پیشگفتار
۱	فصل ۱- پیدایش مکانیک کوانتومی
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های رفتاری
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ تابش جسم سیاه
۱۵	۳-۱ اثر فوتوالکتریک
۱۸	۴-۱ اثر کامپتون
۲۲	۵-۱ ساختار اتم
۲۷	۶-۱ خواص موجی الکترون
۳۰	۷-۱ مسائل فصل اول
۳۵	فصل ۲- بسته‌های موج و رابطه‌ی عدم قطعیت
۳۵	هدف کلی
۳۵	هدف‌های رفتاری
۳۶	۱-۲ مقدمه
۳۶	۲-۲ موج دوبروی
۳۷	۳-۲ بسته‌های موج جایگزیده
۴۱	۴-۲ پهنای بسته‌ی موج
۴۳	۵-۲ انتشار بسته‌ی موج
۴۵	۶-۲ سرعت‌های گروه و فاز
۴۹	۷-۲ پاشندگی بسته‌ی موج
۵۳	۸-۲ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ
۵۴	۹-۲ کاربردهای اصل عدم قطعیت
۶۰	۱۰-۲ مسائل فصل دوم

۶۵	فصل ۳- معادله‌ی شرودینگر
۶۵	هدف کلی
۶۵	هدف‌های رفتاری
۶۵	۱-۳ مقدمه
۶۶	۲-۳ احتمال در مکانیک کوانتومی
۷۴	۳-۳ معادله‌ی شرودینگر
۷۵	۴-۳ شرط بهنجارش و رابطه‌ی پایستگی شار
۸۱	۵-۳ نمایش دیراک
۸۵	۶-۳ عملگرها
۹۰	۷-۳ مقدار چشم‌داشتی عملگرهای مکان و اندازه‌حرکت
۹۶	۸-۳ تحول زمانی
۱۰۰	۹-۳ مسائل فصل سوم

۱۰۵	فصل ۴- جواب‌های معادله‌ی شرودینگر
۱۰۵	هدف کلی
۱۰۵	هدف‌های رفتاری
۱۰۶	۱-۴ مقدمه
۱۰۶	۲-۴ عملگرهای خطی
۱۰۸	۳-۴ معادله‌ی ویژه‌مقداری
۱۱۳	۴-۴ معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان
۱۱۶	۵-۴ اصل برهم‌نهی
۱۱۸	۶-۴ ضرایب بسط
۱۲۵	۷-۴ ذره‌ی آزاد
۱۳۱	۸-۴ چاه پتانسیل بی‌پایان
۱۴۲	۹-۴ پاریته
۱۴۶	۱۰-۴ واگنی
۱۴۷	۱۱-۴ اندازه‌گیری
۱۵۲	۱۲-۴ مسائل فصل چهارم

۱۵۹	فصل ۵- مسائل یک‌بُعدی
۱۵۹	هدف کلی
۱۵۹	هدف‌های رفتاری
۱۶۰	۱-۵ مقدمه
۱۶۰	۲-۵ حالت‌های مقید و نا مقید
۱۶۳	۳-۵ شرایط مرزی
۱۶۴	۴-۵ پله‌ی پتانسیل
۱۷۱	۵-۵ چاه پتانسیل متناهی
۱۸۵	۶-۵ سد پتانسیل
۱۹۷	۷-۵ پتانسیل تابع دلتا
۲۰۸	۸-۵ مسائل فصل پنجم

۲۱۳	فصل ۶- نوسانگر هماهنگ
۲۱۳	هدف کلی
۲۱۳	هدف‌های رفتاری
۲۱۴	۱-۶ مقدمه
۲۱۵	۲-۶ نوسانگر هماهنگ کلاسیکی
۲۱۶	۳-۶ نوسانگر هماهنگ کوانتومی
۲۴۰	۴-۶ تحول زمانی عملگرهای نردبانی
۲۴۶	۵-۶ مسائل فصل ششم
۲۵۱	فصل ۷- سیستم‌هایی با N درجه‌ی آزادی
۲۵۱	هدف کلی
۲۵۱	هدف‌های رفتاری
۲۵۲	۱-۷ مقدمه
۲۵۳	۲-۷ معادله‌ی شرودینگر سیستم N ذره‌ای در یک بعد
۲۵۴	۳-۷ سیستم‌های منفرد
۲۵۹	۴-۷ تأثیر نیروی خارجی بر ذرات غیربرهم‌کنشی
۲۶۰	۵-۷ ذرات یکسان (غیر قابل تشخیص)
۲۶۴	۶-۷ تابع موج سیستم‌های چند ذره‌ای
۲۷۳	۷-۷ معادله‌ی شرودینگر سیستم تک ذره‌ای در سه بعد
۲۹۲	۸-۷ مسائل فصل هفتم
۲۹۵	پیوست
۲۹۷	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
۲۹۹	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
۳۰۱	مراجع

پیشگفتار

درس مکانیک کوانتومی با آموخته‌هایی که دانشجویان در مشاهدات روزمره از طبیعت و همچنین طی دوره‌ی تحصیلی دبیرستان فرا گرفته‌اند، متفاوت است. این تفاوت ناشی از این حقیقت است که تجربیات روزمره در دنیای فیزیک کلاسیک اتفاق افتاده و با قوانین این علم نیز قابل تفسیر و درک هستند؛ ولی در بسیاری از مسائل میکروسکوپی، قوانین علم کلاسیک با نتایج آزمایشگاهی مطابقت ندارند. این مسئله باعث تولد مکانیک کوانتومی شد که در قرن گذشته با وضع قوانین جدید، موفق به تفسیر نتایج آزمایشگاهی مذکور شده است. البته همان‌گونه که انتظار داریم مکانیک کوانتومی ناقض فیزیک کلاسیک نبوده بلکه کامل‌کننده‌ی آن است. به دلیل تفاوت نتایج به‌دست آمده از این دانش با تجربیات روزمره ممکن است دانشجو در یادگیری این درس با مشکل مواجه شود. توصیه می‌شود که ابتدا مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی را از کتاب‌هایی که روابط ریاضی کمتری دارند مطالعه و درک کند و سپس به مطالعه‌ی کتاب‌هایی پرداخته شود که این مفاهیم را به زبان ریاضی فرمول‌بندی کرده‌اند. بدیهی است در صورتی موفقیت کامل در این درس حاصل می‌شود که دانشجو پس از مطالعه‌ی کتاب خودش به حل مثال‌ها و مسائل بپردازد، سپس پاسخ آن‌ها را خوانده و نتایجی را که به‌دست آورده با پاسخ‌های مذکور مقایسه نماید.

کتاب حاضر برابر برنامه‌ی درسی « مکانیک کوانتومی ۱ » شورای عالی برنامه‌ریزی درسی به رشته‌ی تحریر درآمده است. پیش‌نیازهای این کتاب، ریاضی فیزیک، فیزیک جدید و مکانیک تحلیلی در نظر گرفته شده‌اند. نگارندگان سعی نموده‌اند که این کتاب تمامی عناوین بحث شده در کتاب مکانیک کوانتومی گازیوریچ را، که در اکثر دانشگاه‌های ایران تدریس می‌شود، پوشش دهد. بدیهی است کتاب حاضر همانند هر نوشته‌ای بدون نقص نمی‌باشد و نظرات انتقادی خوانندگان می‌تواند راه‌گشای مؤلفین باشد.

فرصت را مغتنم شمرده و از جناب آقای پروفیسور محمد فرهاد رحیمی به‌خاطر دقتی که در ویرایش علمی این کتاب به‌کار برده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنیم.

احمد آخوند

استادیار دانشگاه پیام نور ahmadakhound@yahoo.com

داود افشار

استادیار دانشگاه شهید چمران da_afshar@yahoo.com

فصل اول

پیدایش مکانیک کوانتومی

هدف کلی

آشنایی با برخی از آزمایش‌هایی که نتایج آن‌ها مفاهیم فیزیک کلاسیک را به چالش کشیدند و معرفی مفاهیم بنیادینی که برای توجیه آن‌ها مطرح شدند.

هدف‌های رفتاری

دانشجو پس از مطالعه‌ی این فصل باید،

۱. با تابش جسم سیاه و نظریات وین^۱ و رایلی^۲ برای توجیه آن آشنا شده، موارد نارسایی این نظریات را فرا گرفته و نظریه‌ی پلانک^۳ را در توجیه نتایج تجربی بیاموزد.

۲. با اثر فوتوالکتریک و توجیه آن به کمک ایده‌ی فوتون‌ها آشنا شود.

۳. با اثر کامپتون آشنا شده و با استفاده از ایده‌ی فوتون‌ها، بقای اندازه حرکت و بقای انرژی بتواند آن را توضیح دهد.

۴. با مدل سیاره‌ای برای اتم آشنا شده و بتواند به کمک نظریه‌ی کوانتش اندازه حرکت زاویه‌ای و ایده‌ی جذب و گسیل فوتون، بیناب اتمی را توضیح دهد.

۵. نظریه‌ی دوپروی در مورد خواص موجی ذره را فرا گرفته و با آزمایش داویسون^۱ و ژرمر^۲ در تأیید آن آشنا شود.

۱-۱ مقدمه

سال‌های میانی قرن نوزدهم دوران طلایی فیزیک کلاسیک بود. موفقیت‌های مکانیک کلاسیک، الکترومغناطیس و ترمودینامیک، که سه شاخه‌ی مهم فیزیک در آن زمان بودند، این تصور را ایجاد کرده بود که فیزیک کلاسیک توصیف نهایی طبیعت است. اما به تدریج با پیشرفت فنون تجربی دقیقتر، نتایجی از آزمایش‌ها به دست آمد که مفاهیم کلاسیک را به چالش می‌کشید. نتایج آزمایش‌های مایکلسون^۳ و مورلی^۴ بر روی سرعت نور با اصلاحاتی در مکانیک کلاسیک (نظریه‌ی نسبیت خاص - ۱۹۰۵) قابل توجیه بود. اما از آزمایش‌هایی که بر روی پدیده‌های اتمی و زیر اتمی صورت گرفت نتایجی به دست آمد که صرفاً با اصلاحاتی در فیزیک کلاسیک قابل توضیح نبودند. مفاهیم جدیدی که برای توجیه این پدیده‌ها مطرح شد به تدریج شالوده‌ی یکی از بزرگ‌ترین انقلاب‌های علمی را پایه‌ریزی کرد و در نتیجه‌ی آن دانشی به وجود آمد که مکانیک کوانتومی نام گرفت. ما در این فصل ناتوانی فیزیک کلاسیک در توضیح پدیده‌هایی همچون تابش جسم سیاه، اثر فوتوالکتریک و اثر کامپتون^۵ را بررسی کرده و مفاهیم بنیادینی که برای توجیه این پدیده‌ها مطرح شد را توضیح می‌دهیم.

۲-۱ تابش جسم سیاه

در اواخر قرن نوزدهم آزمایش‌های بسیاری بر روی بیناب اجسام داغ صورت گرفت. از آنجایی که در این آزمایش‌ها برهم‌کنش ماده و تابش مورد مطالعه قرار می‌گرفت،

1. Davisson
2. Germer
3. Mikelson
4. Morly
5. Compton

در نتیجه الکترومغناطیس و ترمودینامیک (که دو شاخه‌ی مهم فیزیک کلاسیک در آن زمان بودند) برای توجیه نتایج تجربی به دست آمده به کار گرفته شدند. اما همه‌ی تلاش‌ها برای توضیح نتایج تجربی با شکست مواجه شد. به نظر می‌رسید چیزی در اساس دانش‌های ترمودینامیک و الکترومغناطیس برای توضیح چگونگی مبادله‌ی انرژی بین تابش و ماده ناشناخته مانده است.

برای بررسی چگونگی اندرکنش ماده و تابش از یک مفهوم نظری مفید به نام جسم سیاه استفاده می‌شود. هر جسم مقداری از تابش فرودی بر خود را جذب و مقداری را بازتاب می‌کند. نسبت تابش جذب شده به تابش فرودی را با A نشان می‌دهیم و برای تمام مواد $0 \leq A \leq 1$ است. جسم سیاه بنا به تعریف جسمی است که تمام تابش فرودی را جذب کرده، بنابراین بازتابی نداشته و سیاه به نظر می‌رسد (یعنی $A = 1$). به عنوان مثال جعبه‌ای را در نظر بگیرید که بر روی یکی از جدارهای آن روزنه‌ای کوچک قرار دارد. وقتی تابش از روزنه وارد جعبه می‌شود در درون آن گیر می‌افتد و پس از بازتاب‌های متوالی از دیواره‌های درونی آن بالاخره کاملاً جذب می‌گردد. بنابراین روزنه مانند یک جسم سیاه رنگ دیده می‌شود، یعنی تمام تابش ورودی بر خود را جذب می‌کند. از سوی دیگر هنگامی که جعبه داغ می‌شود در نتیجه‌ی حرکت شتاب‌دار الکترون‌ها بر روی دیواره‌ی جعبه، تابش صورت می‌گیرد و این تابش از روزنه خارج می‌شود. روزنه که پیش از این یک جذب کننده‌ی کامل بود این بار به صورت یک گسیلنده‌ی کامل است. انرژی گسیل شده توسط جسم سیاه، تابش جسم سیاه نامیده می‌شود. در حالت تعادل گرمایی، مثلاً در دمای T ، میزان انرژی جذب شده و تابش شده توسط جسم سیاه با یکدیگر برابر هستند. انرژی تابشی به بسامد ν که از روزنه‌ی جعبه‌ای به دمای T خارج می‌شود، و در واحد زمان از واحد سطح عبور می‌کند، توان تابشی است که آن را با $\mathcal{E}(\nu, T)$ نشان می‌دهیم. گوستاو کیرشهف^۱ با آزمایش نشان داد که برای یک جسم سیاه (یعنی $A = 1$)، توان تابشی به شکل جسم

و ترکیب شیمیایی آن بستگی ندارد بلکه فقط تابع دما و بسامد تابش است. توان تابشی کل همه بسامدها فقط تابع دما است، که آن را با $\mathcal{E}(T)$ نمایش می‌دهیم. در سال ۱۸۷۹ استفان^۱ به‌طور تجربی توان گسیلی کل را به‌صورت زیر یافت:

$$\varepsilon = A \sigma T^4 \quad (۱.۱)$$

که در آن $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ (erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-4})$ است. پنج سال بعد بولتزمن^۲ رابطه‌ی فوق را با ترکیب ترمودینامیک و نظریه‌ی الکترومغناطیس ماکسول به‌گونه‌ی نظری یافت.

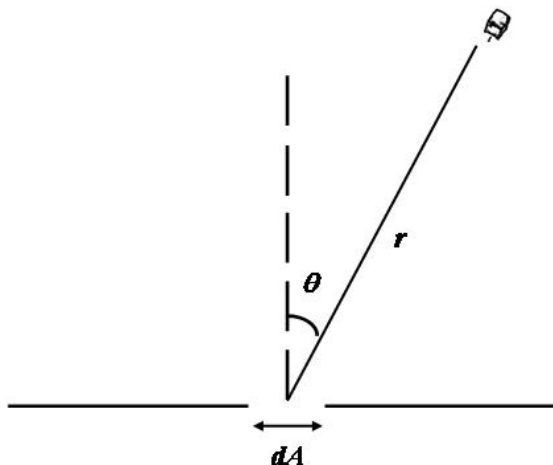
بیناب خروجی از جعبه، اطلاعاتی در مورد انرژی درون جعبه می‌دهد. می‌توان فرض کرد تابش در درون جعبه مستقل از جهت، یعنی همسانگرد و در تمام نقاط دارای خواص یکسان، یعنی همگن است (همسانگرد بودن فضا به معنای آن است که سیستم تحت یک چرخش اختیاری تغییر نکند. اما همگن بودن فضا به معنای آن است که سیستم تحت یک انتقال اختیاری تغییر نکند). همچنین انرژی تابشی با یک بسامد خاص، برای همه‌ی جعبه‌هایی که در دمای T می‌باشند یکسان است. با استفاده از فرض‌های فوق می‌توان رابطه‌ی ساده‌ای بین توان گسیلی و چگالی انرژی درون جعبه یافت.

$$u(\nu, T) = \frac{\mathcal{E}(\nu, T)}{c} \quad (۲.۱)$$

چگالی انرژی تابشی کل برای همه‌ی بسامدها، یعنی $u(T)$ ، برابر با انرژی کل درون جعبه E تقسیم بر حجم جعبه V است.

۱-۲-۱ مثال رابطه‌ی (۲.۱) را اثبات کنید.

جواب: انرژی که از درون جعبه در طول موج λ از واحد سطح در واحد زمان گسیل می‌شود با $\mathcal{E}(\lambda, T)$ نشان داده می‌شود. کل انرژی گسیلی از جعبه که از روزه‌ی dA خارج می‌شود برابر است با: $\mathcal{E}(\lambda, T) dA \Delta t$.



شکل ۱-۱ انرژی گسیل شده از روزنه‌ی جعبه.

اگر چگالی انرژی درون جعبه را با $u(\lambda, T)$ نشان دهیم، چگالی انرژی در مکان جزء dA نشان داده شده در شکل (۱-۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(\lambda, T) \left(\frac{dA}{4\pi r^2} \right) \cos \theta$$

در نتیجه انرژی گسیلی کل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda, T) dA \Delta t &= \int \left[u(\lambda, T) \left(\frac{dA}{4\pi r^2} \right) \cos \theta \right] dv \\ &= \int \left[u(\lambda, T) \left(\frac{dA}{4\pi r^2} \right) \cos \theta \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= u(\lambda, T) \left(\frac{dA}{4\pi} \right) \int_0^{\Delta t} dr \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

که پس از انتگرال‌گیری و ساده‌سازی به صورت زیر خواهد شد:

$$\varepsilon(\lambda, T) \Delta t = c \Delta t \frac{u(\lambda, T)}{4\pi} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} \right)_0^{\pi} 2\pi$$

$$u(\lambda, T) = \frac{\epsilon \epsilon(\lambda, T)}{c}$$

همچنین به طور مشابه داریم:

$$u(v, T) = \frac{\epsilon \epsilon(v, T)}{c}$$

بنابراین به جای توان تابشی می توان چگالی انرژی درون جعبه را مطالعه کرد.

مشاهدات تجربی نشان می دهد که تابش گرمایی اجسام جامد یک بیناب پیوسته از فروسرخ تا فرابنفش است (بر خلاف بیناب اجسام جامد که شامل همه ی بسامدهاست، تابش گرمایی گازها به صورت گسسته است یعنی شامل بسامدهای خاصی است). ویلهلم وین در سال ۱۸۹۴ با در نظر داشتن شکل بیناب تابش گرمایی و با استفاده از ترمودینامیک، رابطه ی (۱.۱) را تعمیم داد و شکل تابع $\epsilon(v, T)$ و در نتیجه $u(v, T)$ را به گونه ی زیر یافت:

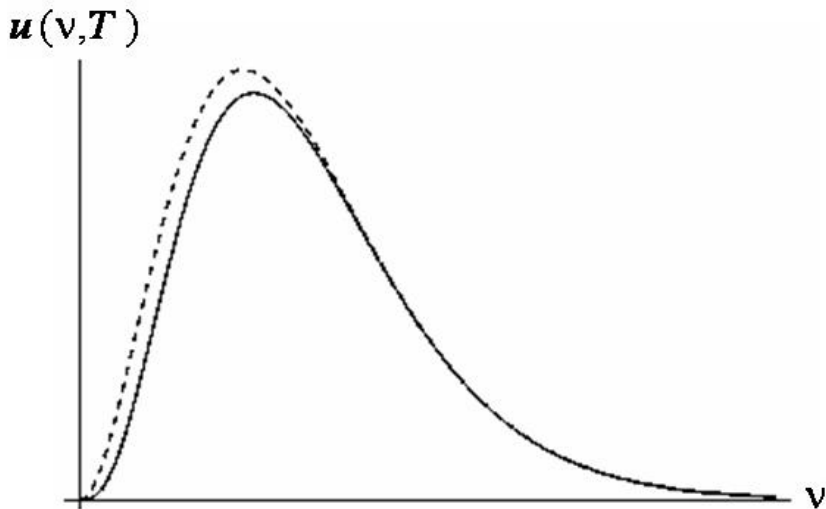
$$u(v, T) = C v^3 e^{-\frac{\beta v}{T}} \quad (۳.۱)$$

که در آن C و β دو پارامتری بودند که با تطبیق داده های آزمایشگاهی در بسامدهای بالا تعیین می شدند. وجود جمله ی نمایی تضمین می کند که در بسامدهای بزرگ $u(v, T)$ واگرا نشود. اما نتایج تجربی به دست آمده از بسامدهای پایین با رابطه ی (۳.۱) سازگاری نداشت. شکل (۱-۲) توزیع چگالی انرژی که از آزمایش و رابطه ی (۳.۱) به دست آمده است را نشان می دهد. شکل (۱-۳) بیناب چگالی انرژی را به ازای دماهای مختلف نشان می دهد. سطح زیر نمودار، که نشان دهنده ی چگالی انرژی کل برای همه بسامدها است، با افزایش دما زیاد می شود. با استفاده از رابطه ی (۲.۱) می توان فهمید که افزایش دما باعث افزایش توان تابشی کل شده است، که در توافق با رابطه ی (۱.۱) است. همچنین مشاهده می شود که با افزایش دما بیشینه ی چگالی انرژی در بسامدهای بزرگتر (یا طول موج های کوچک تر) خواهد بود. این نتیجه با مشاهدات تجربی سازگار است. به عنوان مثال وقتی یک فلز را گرم می کنیم، ابتدا قرمز و سپس زرد و در

نهایت سفید رنگ می‌شود که نشان دهنده‌ی کم شدن طول موج مربوط به بیشینه‌ی بیناب انرژی تابشی با دما است. به‌طور کمی وین به رابطه‌ی زیر دست یافت:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad (۴.۱)$$

که در آن $b = 0.2898 \text{ cmK}$ است. این رابطه به قانون جابه‌جایی وین معروف است.



شکل ۲-۱ توزیع چگالی انرژی در یک دمای معین به صورت تابعی از بسامد. خط پیوسته نتیجه‌ی به‌دست آمده توسط وین (رابطه‌ی (۳.۱)) و خط چین نتیجه‌ی به‌دست آمده از آزمایش را نشان می‌دهد.

۲-۲-۱ مثال قانون جابه‌جایی وین را اثبات کنید.

جواب: با مشتق گرفتن از چگالی انرژی نسبت به بسامد، $\lambda_{\max}$ را به‌صورت زیر می‌یابیم.

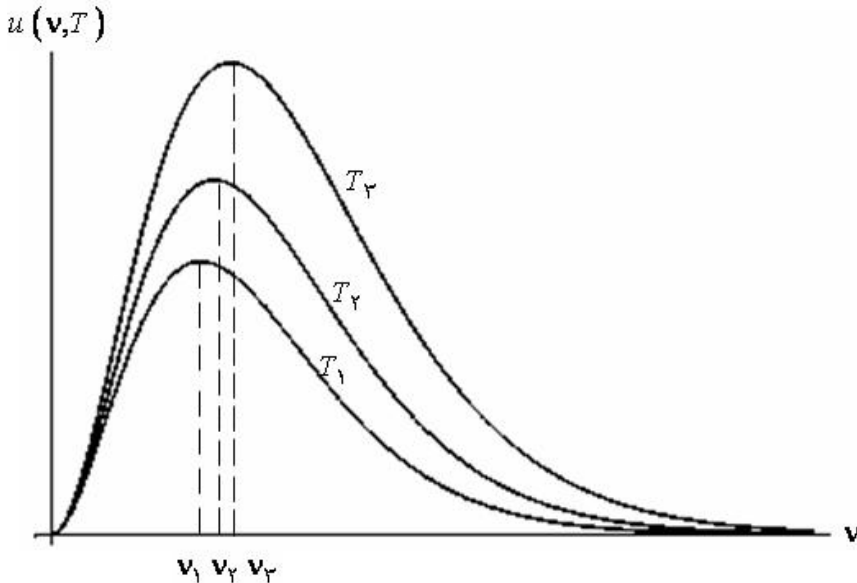
$$\frac{du(v, T)}{dv} = 0$$

$$C \left(3v^2 e^{-\frac{\beta v}{T}} + v^3 \left(\frac{-\beta}{T} \right) e^{-\frac{\beta v}{T}} \right) = 0$$

$$v \frac{\beta}{T} = \frac{c}{\lambda} \frac{\beta}{T} = \gamma$$

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

که در آن $b = \frac{c\beta}{\gamma}$ است.



شکل ۳-۱ بیناب چگالی انرژی برای سه دمای T_1, T_2, T_3 به طوری که $T_3 > T_2 > T_1$ مشاهده می‌گردد که با افزایش دما بیشینه‌ی انرژی در بسامدهای بالاتری خواهد بود.

با وجود موفقیت‌هایی که چگالی انرژی تابشی وین کسب کرد اما همچنان در بسامدهای پایین با داده‌های آزمایشگاهی ناسازگار بود. در سال ۱۹۰۰ رابلی به دنبال حل این مشکل بود. او جعبه‌ای به دمای T در نظر گرفت و فرض کرد که تابش درون جعبه به صورت امواج ایستاده باشد، به طوری که بر روی سطوح جعبه گره تشکیل شود. این امواج ایستاده را می‌توان به صورت نوسانگرهای هماهنگی در نظر گرفت که ناشی از نوسان هماهنگ بارهای الکتریکی (یعنی الکترون‌ها) بر روی

جدارهای جعبه است. همانند امواج ایستاده بر روی یک سیم مرتعش، امواج ایستاده‌ی درون جعبه نیز دارای حالت‌های مجاز می‌باشند که آن‌ها را **مُد های تابش** می‌نامیم. با در نظر گرفتن معادلات موج درون جعبه و شرایط مرزی، می‌توان تعداد مُدهای تابشی در بازه‌ی بسامد ν و $\nu + d\nu$ و در واحد حجم را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu \quad (5.1)$$

که در آن c سرعت نور است. $N(\nu)$ تعداد مدهای نوسانی در واحد حجم در واحد بسامد است. چگالی انرژی الکترومغناطیسی که از جعبه خارج می‌شود (در بازه‌ی بسامد ν و $\nu + d\nu$) برابر با حاصل ضرب تعداد مُدها (رابطه‌ی (5.1)) در انرژی متوسط برای هر مُد، $\langle E \rangle$ ، است.

$$u(\nu, T)d\nu = N(\nu)d\nu\langle E \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu\langle E \rangle \quad (6.1)$$

با توجه به این‌که تابش با بسامد ν ، ناشی از نوسان هماهنگ ذرات باردار باهمان بسامد در جدارهای جعبه است، می‌توان $\langle E \rangle$ را مقدار میانگین انرژی نوسانگرهای موجود بر روی جدارهای جعبه دانست. با استفاده از مکانیک آماری مقدار متوسط انرژی نوسانگر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/kT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE} = kT \quad (7.1)$$

که در آن $k = 1.3806 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ثابت بولتزمان است. نتیجه‌ی فوق را می‌توان این‌گونه نیز حدس زد: مقدار متوسط انرژی برای هر درجه‌ی آزادی $\frac{1}{2}kT$ است. در نتیجه با در نظر گرفتن دو جهت ممکن قطبش برای هر مُد موج الکترومغناطیسی