



دانشگاه ساری
پیم نور

مکانیک کوانتومی پیشرفته ۳

(کارشناسی ارشد فیزیک)

دکتر فرین پاینده

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

یازده

پیشگفتار

۱	فصل اوّل: مقدمه‌ای بر مکانیک کوانتومی نسبیتی
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۱	مقدمه
۳	۱-۱ معادله کلاّین - گوردون
۸	۲-۱ معادله دیراک
۱۱	۳-۱ ذرات آزاد دیراک
۱۳	۴-۱ حالت‌های انرژی منفی و نظریه الکترون - حفره دیراک
۱۵	۵-۱ ذره دیراکی واقع در یک میدان ایستا
۱۹	۶-۱ ذره دیراکی واقع در یک پتانسیل کولنی - ساختار ریز در هیدروژن
۲۳	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اوّل

۲۷	فصل دوّم: آشنایی با نظریه گروه و مروری بر نظریه نسبیت خاصّ
۲۷	هدف کلی
۲۷	هدف‌های یادگیری
۲۸	مقدمه
۲۸	۱-۲ تعریف گروه
۲۹	۱-۱-۲ نمایش گروه
۳۱	۲-۱-۲ پارامترهای گروه
۳۱	۲-۲ گروه‌های لی
۳۴	۳-۲ گروه دوران
۳۵	۴-۲ نمایش‌های دوران
۳۸	۵-۲ گروه $SO(N)$

۶۲	۶-۲ گروه‌های یکانی
۵۷	۷-۲ اصول نظریه نسبیت خاص
۵۸	۸-۲ فرمول‌بندی نظریه نسبیت خاص
۶۴	۹-۲ تبدیلات لورنتز
۶۸	۱۰-۲ شکل ماتریسی تبدیلات لورنتز
۸۷	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۸۸	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم
۹۱	فصل سوم: معادله موج برای ذرات اسپین صفر: معادله کلاین - گوردون
۹۱	هدف کلی
۹۱	هدف‌های یادگیری
۹۱	مقدمه
۹۳	۱-۳ نمادگذاری نسبیتی
۱۱۰	۲-۳ استخراج معادله کلاین - گوردون
۱۱۵	۳-۳ خواص معادله کلاین - گوردون
۱۲۱	۴-۳ حد غیرنسبیتی معادله کلاین - گوردون
۱۲۵	۵-۳ ذرات آزاد اسپین صفر
۱۳۲	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم
۱۳۵	فصل چهارم: فرمالیسم لاگرانژی برای نظریه میدان‌های کلاسیک؛ تانسور انرژی - تکانه
۱۳۵	هدف کلی
۱۳۵	هدف‌های یادگیری
۱۳۶	مقدمه
۱۳۷	۱-۴ معرفی میدان اسکالر
۱۳۹	۲-۴ فرمالیسم لاگرانژی و اصل کمترین کنش
۱۴۴	۳-۴ فرمالیسم لاگرانژی برای نظریه میدان‌های کلاسیک
۱۵۳	۴-۴ فرمالیسم هامیلتونی نظریه میدان
۱۶۴	۵-۴ میدان کلاین - گوردون باردار
۱۷۰	۶-۴ تانسور انرژی - تکانه برای میدان کلاین - گوردون
۱۷۵	۷-۴ محاسبه تانسور انرژی - تکانه برای چگالی لاگرانژی کلی $\mathcal{L}(\psi_\sigma, \partial_\mu \psi_\sigma)$
۱۹۳	۸-۴ شکل شرویدینگری معادله کلاین - گوردون
۲۰۶	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۲۰۷	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۲۰۹	فصل پنجم: معادله موج برای ذرات اسپین $\frac{1}{2}$: معادله دیراک
۲۰۹	هدف کلی
۲۰۹	هدف‌های یادگیری

۲۰۹	مقدمه
۲۱۰	۱-۵ معادله دیراک
۲۱۱	۲-۵ روش اول برای استخراج ماتریس‌های دیراک
۲۱۵	۳-۵ روش دوم برای یافتن ماتریس‌های دیراک
۲۲۳	۴-۵ نمایش قطری ماتریس‌های دیراک
۲۲۶	۵-۵ ماتریس γ^5
۲۳۰	۶-۵ معادله پیوستگی و چهاربردار چگالی جریان برای معادله دیراک
۲۳۲	۷-۵ شکل هموردای معادله دیراک و معادله پیوستگی
۲۳۶	۸-۵ شکل شرو دینگری معادله دیراک
۲۳۷	۹-۵ استخراج اسپین از معادله دیراک
۲۴۲	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۲۴۲	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل پنجم

فصل ششم: ناوردایی لورنتز معادله دیراک، اسپینورهای دیراک و هموردهای دوخطی

۲۴۵	هدف کلی
۲۴۵	هدف‌های یادگیری
۲۴۶	مقدمه
۲۴۶	۱-۶ ناوردایی لورنتز معادله دیراک
۲۶۰	۲-۶ حل معادله دیراک در دستگاه ساکن و متحرک
۲۶۵	۱-۲-۶ حل معادله دیراک در دستگاه ساکن
۲۶۹	۲-۲-۶ حل معادله دیراک در دستگاه متحرک از روی جواب‌های دستگاه ساکن
۲۷۳	۳-۶ روش مستقیم برای حل معادله دیراک در دستگاه متحرک (روش ماتریسی)
۲۸۷	۴-۶ محاسبه ضریب بهنجارش برای اسپینورهای دیراک
۲۹۳	۵-۶ عملگرهای تصویرگر برای انرژی
۲۹۸	۶-۶ هلیسیتی یا عملگر تصویرگر برای اسپین
۳۰۰	۱-۶-۶ خواص هلیسیتی یا عملگر مصور اسپین
۳۰۴	۲-۶-۶ عملگر مصور هلیسیتی
۳۰۸	۷-۶ اسپینورهای وایل
۳۱۱	۸-۶ هموردهای دوخطی اسپینورهای دیراک، اسپینورهای الحاقی و خواص تبدیلی
۳۲۲	خودآزمایی تشریحی فصل ششم
۳۲۳	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل ششم

فصل هفتم: اندرکنش ذرات اسپین صفر و اسپین $\frac{1}{2}$ با میدان الکترومغناطیسی

۳۲۹	هدف کلی
۳۲۹	هدف‌های یادگیری
۳۳۰	مقدمه

- ۳۳۰ ۱-۷ اندرکنش ذره اسپین صفر با میدان الکترومغناطیسی
- ۳۳۷ ۲-۷ معادله کلاین - گوردون برای حالات ساکن با پتانسیل الکتروستاتیک
- ۳۴۰ ۳-۷ اندرکنش ذره دیراکی اسپین $\frac{1}{2}$ با میدان الکترومغناطیسی
- ۳۴۵ ۴-۷ حد غیرنسبیتی معادله دیراک: معادله پائولی
- ۳۵۵ خودآزمایی تشریحی فصل هفتم
- ۳۵۶ خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هفتم

فصل هشتم: ذرات دیراکی واقع در پتانسیل‌های خارجی؛ حل معادله دیراک برای اتم هیدروژن و

- ۳۵۷ پارادوکس کلاین
- ۳۵۷ هدف کلی
- ۳۵۷ هدف‌های یادگیری
- ۳۵۸ مقدمه
- ۳۵۸ ۱-۸ معادله دیراک برای اتم هیدروژن
- ۳۵۹ ۲-۸ یادآوری نکاتی از مکانیک کوانتومی
- ۳۶۵ ۳-۸ حل معادله دیراک برای اتم هیدروژن
- ۳۸۱ ۴-۸ بحث درباره ویژه‌مقادیر انرژی حاصل از حل معادله دیراک برای اتم هیدروژن
- ۳۸۶ ۵-۸ مروری کوتاه بر پارادوکس کلاین
- ۳۸۸ ۶-۸ پارادوکس کلاین
- ۳۹۰ ۱-۶-۸ پارادوکس کلاین از معادله کلاین - گوردون
- ۳۹۲ ۲-۶-۸ پارادوکس کلاین از معادله دیراک
- ۳۹۵ ۷-۸ حل پارادوکس کلاین
- ۳۹۷ خودآزمایی تشریحی فصل هشتم
- ۳۹۸ خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل هشتم

فصل نهم: تقارن‌های گسسته در فیزیک: پاریته، مزدوج بار، وارونی زمانی

- ۴۰۱ هدف کلی
- ۴۰۱ هدف‌های یادگیری
- ۴۰۱ مقدمه
- ۴۰۲ ۱-۹ تقارن‌های پیوسته و گسسته
- ۴۰۳ ۲-۹ اعداد کوانتومی جمع‌پذیر و ضرب‌پذیر
- ۴۰۴ ۳-۹ پاریته
- ۴۰۹ ۴-۹ مزدوج بار
- ۴۱۲ ۵-۹ عملگر CP و نقض آن
- ۴۱۵ ۶-۹ قضیه CPT
- ۴۱۸ خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل نهم

۴۲۳	فصل دهم: معادله وایل - نوترینو
۴۲۳	هدف کلی
۴۲۳	هدف‌های یادگیری
۴۲۴	مقدمه
۴۲۵	۱-۱۰ عملگر مزدوج بار و پادذرات
۴۳۲	۲-۱۰ معادله وایل - نوترینو
۴۴۱	۳-۱۰ تبدیل نظریه دو مؤلفه‌ای وایل - نوترینو به نظریه چهار مؤلفه‌ای
۴۵۰	خودآزمایی تشریحی فصل دهم
۴۵۱	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دهم
۴۵۳	فصل یازدهم: مقدمه‌ای بر نظریه الکترودینامیک کوانتومی و پراکندگی کولنی ذرات
۴۵۳	هدف کلی
۴۵۳	هدف‌های یادگیری
۴۵۴	مقدمه
۴۵۶	۱-۱۱ ناوردایی پیمانه‌های QED و
۴۵۹	۲-۱۱ معرفی ماتریس پراکندگی
۴۶۵	۳-۱۱ تصویر اندرکنشی
۴۶۹	۴-۱۱ نظریه اختلال
۴۷۸	۵-۱۱ اساس قواعد فاینمن
۴۸۳	۶-۱۱ محاسبه دامنه‌های پراکندگی
۴۸۵	۷-۱۱ قدم‌های لازم برای ساختن یک دامنه
۴۸۶	۸-۱۱ ثابت‌های جفت‌شدگی
۴۸۷	۹-۱۱ انتشارگرها
۴۹۲	۱۰-۱۱ نرخ‌های واپاشی و طول عمرها
۴۹۳	۱۱-۱۱ قواعد فاینمن برای QED
۵۰۸	خودآزمایی تشریحی فصل یازدهم
۵۰۹	خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل یازدهم
۵۱۵	پاسخنامه
۵۱۹	منابع

تقدیم به سه بی‌همتا

استاد فرزانه دکتر مهدی گلشنی

مهندس حسین سیدی مسلمی

روانشاد دکتر ابراهیم پاینده

پیشگفتار

کتابی که در پیش‌رو دارید، بر طبق سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای درس مکانیک کوانتومی پیشرفته^۳ تنظیم شده است و تا حد امکان سعی بر این بوده است که علاوه بر توضیحات فیزیکی لازم و گنجانیدن تعداد زیادی تمرین حل شده، تمامی روابط ریاضی به‌طور کامل و گام‌به‌گام اثبات شوند تا فرایند یادگیری خودآموز درس برای دانشجویانی که حداقل دسترسی به کلاس و آموزش سنتی را دارند، به آسانی فراهم گردد. البته، مسلم است که هیچ اثری خالی از نقص و اشکال نمی‌باشد. لذا، هرگونه نظر و پیشنهادی از سوی خوانندگان محترم در راستای رفع ایرادها و بهبود کمی و کیفی مطالب کتاب، و از جمله اشکالات تایپی مژمر ثمر خواهد بود.^۱ توصیه مفید به خوانندگان این است که پس از فراگیری مطالب این کتاب به سایر منابع موجود برای این درس مراجعه کرده و با مطالعه مطالب و تحلیل مسائل بیشتر و متنوعی که به دلیل محدود بودن حجم این کتاب از بیان آن‌ها چشمپوشی گردیده است، عمق یادگیری خود را به‌ویژه در مسائل فیزیکی بیازمایند.

۱. خوانندگان گرامی می‌توانند نظرات و پیشنهادات خود را به آدرس fnphysics.com@gmail.com ارسال نمایند.

نهایت سپاس قلبی و قدردانی ویژه تقدیم استاد فرزانه دکتر مهدی گلشنی است که همواره زیبایی‌های دنیای فیزیک را به اعجاب به تصویر کشیده‌اند و از مکتب ایشان بسیاری آموخته‌اند. امید است که شوق یادگیری شمع راه شوریدگان دانشی باشد که والا‌مردشان مشاهده و معاینه شگفتی‌های جهان اسرارآمیزی است که در پس نقاب روابط غامض ریاضیات رنگ باخته‌اند.

شایسته است کمال سپاسگزاری و امتنان ویژه به مدیریت محترم تدوین آقای دکتر مهران فرج‌اللهی، معاونت محترم تدوین مهندس حمیدرضا فرنیاء، کارشناسان محترم تدوین آقای امیر عالی و خانم‌ها اشرف شوریابی، آتنا عسگری‌فر، آریتا ابراهیم‌نیا، فاطمه ردایی، فاطمه بنی‌جمالی، اکرم مبارکی، فرزانه خرّمی مهاجر، مینا حاجی‌انزهایی، خدیجه علی‌نژاد، سپیده‌سادات مدنی، فریده قطبی و به‌ویژه سرکار خانم سحر ملّاح به‌خاطر راهنمایی‌های ارزنده و زحمات بی‌دریغ‌شان در راستای چاپ این کتاب، همچنین آقای دکتر قاسم فروزانی که ویراستاری علمی این کتاب را با حوصله و دقتی درخور انجام داده‌اند، اساتید گرانقدرم دکتر محمدمهرآفرین، دکتر محمدوحید تکیوک و دکتر پرویز حوائی که همواره مدیون زحمات آنانم، معاونت محترم آموزشی و مدیر گروه فیزیک آقای دکتر مرتضی محسنی و کارشناس محترم گروه فیزیک خانم پروا مرادی به‌خاطر تمامی زحماتشان در گروه فیزیک، همکار ارجمندم آقای دکتر احمد آخوند، مدیریت محترم دفتر تحقیقات خانم دکتر خدیجه دیده‌بان و معاونت محترم پژوهشی آقای دکتر محمدعلی کریمی، دوستان بسیار عزیزم دکتر محبوبه عبداللهی، دکتر معصومه عابدینی، سپیده صدرمحرر، اشرف نوری، سیده فاطمه حسینی رئوف، گلنوش مظلومی، الهه توانگر، میترا قدس، مریم ملوندی، فاطمه فرجی، شهین اکبرنیا و نیلوفر عظیمی که همواره مشوّق من بوده‌اند و بالاخص عزیزان گرانقدرم مهندس مهری تقی‌زاده انور، مهندس جواد جم‌آذری و امیرحسین جم‌آذری که بدون وجود گهربار آنان و زحمات بی‌شائبه‌شان اتمام این اثر هرگز میسر نبود، و نیز آقای مهندس علی شوکتی که با دقتی ستودنی زحمت تایپ و حروفچینی کتاب را برعهده داشته‌اند، تقدیم گردد.

با آرزوی توفیق

فرّین پاینده

فصل اوّل

مقدمه‌ای بر مکانیک کوانتومی نسبیتی

هدف کلی

در این فصل، انتظار می‌رود دانشجو یک دید کلی نسبت به مکانیک کوانتومی نسبیتی و مباحث عمده آن به دست آورد.

هدف‌های یادگیری

- در این فصل، انتظار می‌رود دانشجو پس از مطالعه بتواند:
۱. با معادله اسپین صفر یا معادله کلاین-گوردن آشنا شود.
 ۲. با معادله اسپین $\frac{1}{2}$ یا معادله دیراک آشنا شود.
 ۳. مفهوم ذرات آزاد دیراکی را دریابد.
 ۴. مفهوم حالت‌های انرژی منفی را دریابد.
 ۵. با طیف انرژی یک ذره دیراکی واقع در میدان ایستا آشنا گردد.
 ۶. با طیف انرژی یک ذره دیراکی واقع در یک پتانسیل کولنی (ساختار ریز در هیدروژن) آشنا گردد.

مقدمه

چنانچه می‌دانیم، معادلات مکانیک کلاسیک در سرعت‌های نزدیک به سرعت نور صادق نبوده و باید تصحیح گردند. معادله شرودینگر نیز در سرعت‌های نزدیک به سرعت نور برای حرکت ذره‌ای مانند ذره آزاد نیاز به تصحیح دارد و می‌بایست از معادله شرودینگر

نسبیتی استفاده شود. معادله شرودینگر نسبیتی که معادله کلاین-گوردون^۱ نام دارد، مانند سایر معادلات نسبیتی باید تحت تبدیلات لورنتز ناوردا باقی بماند و به سادگی می توان ثابت کرد که چنین است. در واقع، در یک بحث دقیق در مورد نظریه کوانتومی نسبیتی، از فرمول بندی هموردایی^۲ استفاده می شود که در آن تمام قوانین فیزیکی در فضا-زمان چهاربعدی تخت مینکوفسکی یا به عبارتی فضا-زمان نسبیت خاص، بیان می شوند. مزیت این فرمالیسم یا صورت بندی^۳ در این است که متغیرهای زمانی و فضایی، خود به خود به طور متقارن در نظر گرفته می شوند و قوانین به دست آمده تحت تبدیلات لورنتز^۴ ناوردا باقی می ماند. یادآوری می کنیم که تبدیلات لورنتز، تبدیلاتی هستند که ارتباط میان مشاهده پذیرهای فیزیکی را از دید دو ناظر که نسبت به یکدیگر در حال حرکت با سرعت ثابت هستند، برقرار می کنند.

توجه به این نکته ضروری است که در مکانیک کوانتومی نسبیتی، باور بر این است که رفتارهای نسبیتی ذرات، در واقع، باعث به وجود آمدن اسپین می شود.^۵ معادله شرودینگر نسبیتی دو نوع می باشد:

(۱) معادله اسپین صفر یا معادله کلاین-گوردون، که برای توصیف ذرات بدون اسپین نظیر ذرات پيون^۶ و کائون^۷ به کار می رود.

(۲) معادله اسپین $\frac{1}{2}$ یا معادله دیراک^۸، که برای توصیف ذرات دارای اسپین $\frac{1}{2}$ نظیر الکترون به کار می رود.

لازم به ذکر است که به منظور جلوگیری از پیچیدگی های یک بررسی هموردا و جهت سهولت، تمام کمیت های نسبیتی را به جای مختصات یا فضای چهاربعدی نسبیت

1. Klein - Gordon

2. Covariant formulation

3. Formalism

4. Lorentz Transformation

۵. در صورتی که مکانیک کلاسیک در یک فضای مختلط بررسی شود، تمام نتایج مکانیک کوانتومی استاندارد از یک

معادله کلاسیک هامیلتون-ژاکوبی مختلط حاصل شده و اسپین نیز خودبخود از درون فرمالیسم مختلط و بدون

هرگونه بررسی نسبیتی حاصل می گردد. علاقه مندان جهت مطالعه بیشتر، می توانند به مقالات Ciann-Dong Yang

در این زمینه از جمله مراجع (۴-۱۸) ذکر شده در فهرست منابع مراجعه نمایند.

6. Pion

7. Kaon

8. Dirac

خاص، در فضای سه بعدی معمولی بیان خواهیم نمود (سُل ویدر، ۱۳۶۸: ۴۰۸). نتایج به‌دست آمده، در صورتی صحیح فرض می‌شوند که:

(الف) با نظریه‌های کلاسیکی خود، سازگار باشند.

(ب) نسبت به متغیرهای زمانی و فضایی، متقارن باشند.

(ج) به‌ازای سرعت‌های بسیار پائین، $u \ll c$ ، به نتایج حاصل از نظریه شرودینگر منتهی شوند.

در این فصل، اهمّ مطالبی را که در فصل‌های آتی به‌طور کامل به مطالعه و بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت، مروری اجمالی می‌کنیم تا دانشجو بتواند قبل از مطالعه دقیق مطالب، نخست به یک دیدگاه کلی نسبت به درس مکانیک کوانتومی نسبیتی دست یابد.^۱

۱-۱ معادله کلاین - گوردون

چنانچه می‌دانیم، معادله شرودینگر به‌طور طبیعی یک معادله غیرنسبیتی است و هیچ‌گونه اثبات دقیقی برای این معادله موجود نیست و صرفاً از طریق یک سری استدلال‌های اقبایی می‌توان به معادله شرودینگر رسید و پس از آن، معادله مذکور را به‌عنوان یک اصل اساسی در مکانیک کوانتومی پذیرفت. برای به‌دست آوردن معادله شرودینگر، کافی است یک ذره آزاد را در غیاب پتانسیل‌های خارجی در نظر بگیریم که دارای انرژی جنبشی $E_k = \frac{p^2}{2m}$ و لذا انرژی کل $E = \frac{p^2}{2m}$ (زیرا $V = 0$) است. برای استخراج یک معادله کوانتومی از این معادله کلاسیک، کافی است به جای انرژی و تکانه، عملگرهای متناظرشان را جاگذاری نموده و طرفین را در ψ ضرب کنیم تا معادله شرودینگر تابع زمان برای ذره آزاد به‌دست آید:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad \left(\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad , \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \xrightarrow{\times \psi} \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

و در صورتی که ذره آزاد نبوده و در قید پتانسیلی نظیر $V(\vec{r})$ باشد، معادله حرکت شرودینگر که یک معادله ویژه مقداری است، به شکل زیر حاصل می‌شود:

۱. تمامی مطالب ذکر شده در این فصل، دوباره در فصل‌های آتی کتاب به تفصیل مورد بحث قرار خواهند گرفت.

$$\hat{H}\psi = E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (۱)$$

اما با کمی دقت در معادله (۱)، می‌بینیم که معادله شرودینگر به‌عنوان یک معادله نسبیتی، قابل قبول نیست. زیرا، رفتار زمان با رفتار مکان در این معادله متفاوت است، به این معنی که مشتق نسبت به زمان از مرتبه اول است، $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ ، ولی مشتقات نسبت به مکان و یا به عبارتی مشتقات فضایی از مرتبه دوم، (∇^2) ، است و لذا واضح است که معادله شرودینگر تحت تبدیلات گالیله هموردا^۱ بوده و تغییر نمی‌کند ولی تحت تبدیلات لورنتز ناوردا نبوده و تغییر می‌کند. بنابراین، برای حل مشکل ناوردایی معادله شرودینگر تحت تبدیلات لورنتز، دو انتخاب می‌توانیم داشته باشیم. به این معنی که جهت ایجاد ناوردایی لورنتز برای معادله، می‌بایست مشتقات زمانی و مکانی هر دو از یک رتبه وارد شوند یعنی یا هر دو از رتبه اول باشند و یا هر دو از رتبه دوم. به بیان دیگر، یا معادله‌ای را ایجاد کنیم که نسبت به زمان از مرتبه دوم باشد (معادله کلاین - گوردون) و یا اینکه هامیلتونی را نسبت به عملگر تکانه، خطی کنیم (معادله دیراک). اما هر دو انتخاب باید در حد غیرنسبیتی به معادله شرودینگر تقلیل یابند، و نیز در مورد یک ذره واقع در یک میدان الکترومغناطیسی، هر دو باید با رابطه کلاسیکی - نسبیتی زیر سازگار باشند:

$$c^2\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^4 = (E - q\phi)^2 \quad (۲)$$

با دنبال کردن روش‌های کلاین و گوردون، جاگذاری‌های $E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ و $\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ را در معادله (۲) اعمال کرده و معادله کلاین - گوردون (KG) را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$\left[c^2\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^4 \right] \psi = \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right)^2 \right] \psi \quad (۳)$$

که این معادله در غیاب میدان الکترومغناطیسی خارجی، به شکل ساده

$$\left(\square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad \text{و با فرض } \hbar = c = 1 \text{ به شکل خلاصه تر } (\square + m^2) \psi = 0 \text{ بیان}$$

می‌شود (در این درس، از m به جای m_0 برای جرم در حال سکون استفاده می‌کنیم). اما قضیه تاریخی جالبی که در اینجا اتفاق افتاده، این است که معادلهٔ بالا نخستین بار توسط خود شرودینگر در سال ۱۹۲۵ حتی قبل از یافتن معادله‌ای که به نام خود شرودینگر معروف است، به دست آمد. ولی به علت اینکه معادلهٔ مذکور منجر به احتمالات منفی می‌شد و لایه‌های انرژی اتم هیدروژن را به‌طور صحیح به دست نمی‌داد، از روی شانس و یا بدشانسی توسط شرودینگر کنار گذاشته شد. لذا، شرودینگر معادلهٔ اصلی خودش را به دست آورد که بعدها منشاء تحولات زیادی گردید. اما کلاین و گوردون دوباره به این معادله بازگشتند و این معادله نیز جایگاه ویژهٔ خود را پیدا نمود. چون در حوالی سال‌های ۱۹۲۵، وضعیت اسپین هنوز چندان مشخص نبود و فیزیکدان‌ها صرفاً تا این حد می‌دانستند که موجودی به نام اسپین و به عبارت بهتر خاصیتی به نام اسپین وجود دارد که پس از تکمیل اطلاعات به دست آمده راجع به اسپین، بعدها ثابت شد که معادلهٔ کلاین-گوردون مربوط به ذرات اسپین صفر است که در طبیعت نیز دارای نمود است و ذراتی نظیر پيون و کائون از این معادله تبعیت می‌کنند (گلشنی، ۱۳۸۲). معادلهٔ کلاین-گوردون به دست آمده طبق معادلهٔ (۳) با شرایط (الف) و (ب) که قبلاً ذکر کردیم، سازگار است. برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی ایستا (ساکن و یا مانا)^۱، داریم $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ و معادلهٔ KG می‌شود:

$$\left[c^2 \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2 c^4 \right] \psi = \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i \hbar q \varphi \frac{\partial}{\partial t} + q^2 \varphi^2 \right] \psi \quad (4)$$

بعداً نشان خواهیم داد که معادلهٔ KG به ازای $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ ، به معادلهٔ شرودینگر تقلیل پیدا می‌کند. در ضمن، یادآوری می‌کنیم که از نظر نسبیتی، انرژی کل E یک سیستم، شامل یک بخش سکون mc^2 است که باید در تابع حالت مکانیک کوانتومی منعکس شود. لذا، بستگی به mc^2 را، با بیان تابع حالت به شکل زیر، جدا می‌کنیم:

$$\psi = e^{-\frac{i mc^2 t}{\hbar}} \psi_{kin} \quad (5)$$

بخش جنبشی ψ_{kin} ، جمله‌ای است که باید با تابع حالت غیرنسبیتی شرودینگر مقایسه شود. با قرار دادن معادله (۵) در معادله (۴)، معادله KG برای بخش جنبشی حاصل می‌شود:

$$\left[c^2 \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2 c^4 \right] \psi_{kin} = \left[\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2i \hbar (mc^2 - q\phi) \frac{\partial}{\partial t} \right) - \{ q\phi(2mc^2 - q\phi) + m^2 c^4 \} \right] \psi_{kin}$$

و یا:

$$\left[c^2 \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \right] \psi_{kin} = \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2i \hbar (mc^2 - q\phi) \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(2mc^2 - q\phi) \right] \psi_{kin} \quad (۶)$$

اما اگر ذره غیرنسبیتی باشد، آن‌گاه انرژی سکون غالب بوده و جملاتی که در سمت راست رابطه (۶) شامل mc^2 نیستند، می‌توانند حذف شوند. لذا، به‌ازای $u \ll c$ داریم:

$$\left(\frac{\left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}{2m} + q\phi \right) \psi_{kin} = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{kin} \quad (۷)$$

که این معادله تحت عنوان معادله شرودینگر شناخته می‌شود. از آنجایی که ویژگی‌های اسپینی در معادله KG حضور ندارند، لذا این معادله حاکم بر رفتار بوزون‌های اسپین صفر نظیر مزون‌های π و ... خواهد بود (سُل ویدر، ۱۳۳۸: ۴۰۸).

می‌توانیم فرض کنیم که ویژه حالت‌های ایستای یک ذره کلاین-گوردون با زمان، به‌صورت زیر تحول پیدا می‌کنند:

$$\psi = e^{-\frac{i E_i t}{\hbar}} \psi_i(\vec{r})$$

با جاگذاری این عبارت در معادله (۴)، معادله ویژه مقداری انرژی KG به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left[c^2 \left(\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2 c^4 \right] \psi_i(\vec{r}) = (E_i - q\phi)^2 \psi_i(\vec{r}) \quad (۸)$$

اگر رابطه (۸) را در مورد یک الکترون هیدروژنی که در آن $q = -e$ ، $\vec{A} = 0$ و $\varphi = \frac{e}{r}$ است به کار ببریم، آن گاه می‌توانیم نشان دهیم که اثرات اسپینی ظاهر نمی‌شوند. از آنجایی که اتم هیدروژن یک مسئله نیروی مرکزی است، لذا تابع موج $\psi_i(\vec{r})$ را می‌توانیم مطابق زیر به دو بخش شعاعی و زاویه‌ای تفکیک کنیم:

$$\psi_i(\vec{r}) = R_{n\ell}(\vec{r}) Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$$

نظیر حالت غیرنسبیتی، معادله شعاعی طیف انرژی اتم را تعیین می‌کند. بدون اثبات، به این نکته اشاره می‌کنیم که $R_{n\ell}$ فقط در صورتی در شرایط حالت مقید صدق می‌کند که انرژی توسط رابطه زیر داده شده باشد:

$$E_{n\ell} = mc^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\left\{ n - \left(\ell + \frac{1}{2} \right) + \left(\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

با:

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

که در آن، $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ ثابت ساختار ریز است^۱. در حد غیرنسبیتی^۲، با استفاده از تقریب $\alpha \ll 1$ ، ترازهای هیدروژنی، برابر خواهند شد با:

$$E_{n\ell} \simeq mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right] + \alpha^6 \text{ جملاتی از مرتبه } \alpha^6 \quad (10)$$

1. Fine Structure

۲. در واقع، می‌توان ثابت کرد که سرعت الکترون در اولین مدار بوهر برابر است با $v = \frac{e^2}{\hbar}$. بنابراین، رابطه $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{v}{c} = \frac{1}{137}$ نشان می‌دهد که الکترون در یک حالت مقید از اتم هیدروژن، به‌وضوح غیرنسبیتی است.

جمله اول، دقیقاً انرژی سکون ذره است. جمله بعدی نیز عبارت از $-\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2} = \frac{E_1}{n^2} = E_n$ می باشد که همان فرمول بوهر است. جملات آخر نیز از ساختار ریز ناشی می شوند و به شکل زیر در می آیند:

$$E_{fs} = E_n \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)} - \frac{3}{4n} \right) \quad (11)$$

از مقایسه این نتیجه با رابطه متناظر حاصل از معادله شرودینگر با در نظر گرفتن اثر اسپین - مدار:

$$E_{nj} = E_n + \alpha^2 E_n \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right] ; \quad \left(j = \ell \pm \frac{1}{2} \right) \quad (11-الف)$$

می بینیم که رابطه (۱۱) در صورتی صحیح خواهد بود که ℓ به جای عدد صحیح، یک عدد نیمه صحیح (یعنی، $\ell = j$) باشد. مسلم است که رابطه (۱۱) معرّف ساختار ریز بدون اسپین، نظیر مورد یک اتم مزونی (به عنوان مثال، یک اتم هیدروژن که به جای الکترون آن یک مزون π نشسته است) می باشد.

۱-۲ معادله دیراک

دیراک در یک مقاله کلاسیک به سال ۱۹۲۸، شق دیگری از معادله کلاین - گوردون را ارائه نمود. این معادله درحالی که تمام خواسته های نسبیتی را تأمین می کرد، وجود یک اسپین ذاتی را نیز در حد غیرنسبیتی ایجاب می نمود. جالب اینکه، این اسپین نه تنها برابر با $\frac{1}{2}$ بود، بلکه جملات ساختار ریز که برای یک ذره دیراکی واقع در یک میدان کولنی به دست می آمدند، با جملات مشاهده شده در طیف هیدروژن توافق داشتند. بدون شک، الکترون نسبیتی ذره ای است که از معادله دیراک پیروی می کند. یعنی، الکترون یک ذره دیراکی است. دیراک، شکل خطی معادله شرودینگر، یعنی معادله زیر را انتخاب کرد:

$$\hat{H}\psi = \hat{E}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (12)$$

چون عملگر هامیلتونی $\hat{H}$ باید نسبت به عملگر تکانه $\hat{p}$ خطی باشد، لذا دیراک شکل زیر را برای عملگر هامیلتونی پیشنهاد کرد:

$$\hat{H} = c \hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \hat{\beta} mc^2 \quad (13)$$

به ماهیت عملگرهای هرمیتی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ در ادامه اشاره خواهیم کرد. با استفاده از جاگذاری‌های زیر (که نسخه کمترین جفت شدگی^۱ نام دارند):

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \quad , \quad \hat{E} \rightarrow \hat{E} - q\phi \quad (14)$$

معادله حرکت دیراک (۱۲) برای ذره‌ای واقع در یک میدان الکترومغناطیسی، می‌شود:

$$\left(c \hat{\alpha} \cdot \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) + \hat{\beta} mc^2 \right) \psi = \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right) \psi \quad (15)$$

با مجذور کردن و یا تأثیر دادن مجلد عملگرها، از معادله (۱۵) نتیجه می‌گیریم:

$$\left[c \hat{\alpha} \cdot \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) + \hat{\beta} mc^2 \right]^2 \psi = \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right]^2 \psi \quad (16)$$

که در آن، طرف راست همان معادله کلاین-گوردون است. طرف چپ نیز در صورتی با رابطه (۳) مطابقت می‌کند که $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ با $\hat{p}$ و $\vec{r}$ جابجایی باشند و روابط زیر نیز برقرار باشند:

$$\{\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j\} = 2\delta_{ij} \hat{1} \quad , \quad \{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}\} = 0 \quad , \quad \hat{\beta}^2 = \hat{1} \quad (17)$$

این روابط جابجایی تضمین می‌کنند که جملات ضربدری ناشی از «مجذور کردن» طرف چپ رابطه (۱۶) حذف شوند. ویژگی‌های روابط جابجایی عملگرهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ کاملاً شبیه به روابط جابه‌جایی ماتریس‌های پائولی هستند. این شباهت پیشنهاد می‌کند که ماتریس‌های 4×4 زیر را بسازیم:

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} \quad (18)$$

که در آن، $\hat{\sigma}_i$ ها ماتریس‌های 2×2 پائولی می‌باشند. معادلات (۱۸) مخفف ماتریس‌های زیر هستند: