



دانشگاه سوادکوه
پیت

مکانیک کوانتومی نوین

(رشته فیزیک)

تألیف و ترجمه دکتر جمیل آریایی

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمره کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

پنج	فهرست
هفت	یادداشت مترجم
نه	درآمد
یازده	پیشگفتار
سیزده	یادبود

۱	فصل اوّل مفاهیم بنیادی
۱	۱.۱ آزمایش اشترن و گرلاخ
۱۰	۲.۱ کت، برا، و عملگر
۱۷	۳.۱ کتهای پایه و نمایش ماتریسی
۲۵	۴.۱ اندازه‌گیری، مشاهده‌پذیرها، و روابط عدم قطعیت
۴۰	۵.۱ تغییر پایه
۴۶	۶.۱ مکان، اندازه حرکت، و انتقال
۵۷	۷.۱ توابع موج در فضای مکان و اندازه حرکت
۶۸	مسائل

۷۷	فصل دوّم دینامیک کوانتومی
۷۷	۱.۲ تحوّل زمانی و معادله شرودینگر
۹۰	۲.۲ تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ
۱۰۰	۳.۲ نوسانگر هماهنگ ساده
۱۱۳	۴.۲ معادله موج شرودینگر
۱۲۵	۵.۲ انتشارگرها و انتگرالهای مسیر فاینمن
۱۴۱	۶.۲ پتانسیلها و انتقالهای کاژ
۱۶۵	مسائل

۱۷۵	فصل سوّم نظریه اندازه حرکت زاویه‌ای
۱۷۵	۱.۳ دوران و روابط جابجایی اندازه حرکت زاویه‌ای

۱۸۱	۲.۳ دستگاههای اسپین $1/2$ و دورانهای متناهی
۱۹۲	۳.۳ $SU(2)$ ، $O(3)$ و دورانهای اولر
۱۹۹	۴.۳ عملگرهای چگالی و آنسامبلهای خالص و مخلوط
۲۱۷	۵.۳ ویژه مقادیر و ویژه حالت‌های اندازه حرکت زاویه‌ای
۲۲۹	۶.۳ اندازه حرکت زاویه‌ای مداری
۲۳۸	۷.۳ جمع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای
۲۵۵	۸.۳ مدل نوسانگر شوینگر اندازه حرکت زاویه‌ای
۲۶۳	۹.۳ اندازه گیری‌های همبستگی اسپین و نامساوی بل
۲۷۳	۱۰.۳ عملگرهای تانسوری
۲۸۴	مسائل
۲۹۱	پیوست ۱
۳۰۳	پیوست ۲
۳۰۵	کتابشناسی
۳۰۹	فهرست راهنما

این ترجمه را به پدر بزرگوارم
دکتر علی اصغر آریایی
تقدیم می‌کنم.

یادداشت مترجم

چند سال پیش در یکی از جلسات عمومی گروه فیزیک دانشگاه پیام‌نور پذیرفتم که برای درس مکانیک کوانتومی پیشرفته^۱ این دانشگاه کتابی تألیف کنم. طولی نکشید که از این کار منصرف شدم چون حیف بود دانشجویان این دانشگاه را از داشتن کتاب درسی محروم می‌کردم که آن را ساکورایی نوشته بود، آنهم به سبکی انتزاعی الهام گرفته از کتابهای دیراک و فاینمن. هرچند از کتاب ساکورایی دو ترجمه به‌بازار آمده است ولی برآن شدم که تمرینات متن کتاب و برخی از مسائل پایان فصلها را به مناسبت‌هایی به‌شکل خود آزمائیهایی حل کنم تا کتاب خودخوان‌تر شود که از ویژگیهای مهم کتابهای دانشگاه پیام‌نور خودخوان بودن آنهاست. حاصل این تلاش من کتابی است که پیش‌رو دارید. به دانشجویان توصیه می‌کنم که سعی کنند این تمرینات را خود حل کنند و چنانچه نتوانستند به نتیجه برسند آنگاه به حل آنها مراجعه کنند. چند کتاب درباره مکانیک کوانتومی هست که در بخش کتابشناسی به آنها اشاره نشده است. کتاب “آشنایی با مکانیک کوانتومی” تألیف دیوید گریفیس که کتابی است بسیار خواندنی در سطح کارشناسی^۱. دو کتاب دیگری “مبانی مکانیک کوانتومی” تألیف شانکار و دیگری “مکانیک کوانتومی” تألیف بلنتاین است که هر دو رهیافتی شبیه به رهیافت ساکورایی را دنبال می‌کنند و در سطح کارشناسی ارشد هستند. در پایان از دوست و همکار فاضلم آقای علیرضا بینش سپاسگزارم که همواره مشوق من بوده‌اند. از همکارم آقای دکتر سعید محمدی تشکر می‌کنم که ترجمه مرا ویراستند. هر بار که نوشته‌هایم را با نرم‌افزار تک فارسی نسخه دانشگاه صنعتی شریف آماده می‌کنم بی‌اختیار طراح (پروفسور نوٹ) و فارسی‌کنندگان آن (دکتر محمد قدسی و دانشجویانش از دانشگاه صنعتی شریف) را می‌ستایم.

جمیل آریایی

^۱ دیوید گریفیس دو کتاب دیگر نیز دارد که یکی “آشنایی با الکترودینامیک” و دیگری “فیزیک ذرات بنیادی” است. هر سه کتاب گریفیس به فارسی ترجمه شده‌اند. سبک نگارش شیوا و غنای فیزیکی این نوشته‌ها چنان است که همچون کتابهای فاینمن هرکس در هر سطحی از فیزیک که باشد حیف است آنها را نخواند.

درآمد

ساکورایی همیشه میهمان بسیار عزیزی در سرن بود چون او از آن دسته از نظریه پردازان نادری بود که داده‌های آزمایشگاهی برایش به همان اندازه خود بازی نظری جالب می‌نمود. ساکورایی تسلط زیادی بر فیزیک نظری داشت و از تدریس آن لذت می‌برد. از دیدگاه او تدریس فیزیک نظری صرف چندان محتوایی نداشت و به دور از کاربردها بود: "... هستند نظریه‌پردازانی که از فرمولبندی LSZ عملگرهای میدان هایزبرگ دم می‌زنند ولی نمی‌دانند که چرا اتم برانگیخته تابش می‌کند یا نمی‌تواند قانون ریلی را که آبی بودن آسمان را توضیح می‌دهد از راه مکانیک کوانتومی به دست آورند." وی تأکید می‌ورزید که دانشجو باید بتواند آنچه را آموخته است به کاربرد: "دانشجویی که کتاب را بخواند ولی نتواند تمرینات آن را انجام دهد چیزی نیاموخته است."

ساکورایی این اصول را در دو کتاب پرمحتوای خود مکانیک کوانتومی پیشرفته (۱۹۶۷) و اصول ناوردایی و ذرات بنیادی (۱۹۶۴) که در کتابخانه سرن از آنها زیاد استفاده می‌شود به کار بسته است. گمان می‌رود کتاب کنونی را که کتاب جدید ساکورایی است خوانندگان بیشتر و کم تخصص‌تری بخوانند. در سرتاسر کتاب به کاربردها پرداخته شده است. خوانندگان این کتاب آنچه را لازم داشته باشند در آن خواهند یافت و با تلاش مستمر و تمرینش آن را درک خواهند کرد.

با فوت ناگهانی ساکورایی در روز اول نوامبر سال ۱۹۸۲ این کتاب ناتمام ماند. من و راینهولد برتلنن به خانم ساکورایی کمک کردیم تا نوشته‌های شوهرش در سرن را جمع و جور کند. در میان این نوشته‌های به نسخه دستنوشته بیشتر این کتاب و تعداد زیادی مسئله برخوردیم. هرچند ساکورایی فقط سه فصل از کتاب را کامل نوشته بود ولی آشکار بود که بیشتر این کار خلاق انجام یافته باشد. بنظر می‌آمد که پر کردن شکافهای موجود در کتاب و ویراستن آن و به‌نظم کشیدن محتوی آن کار زیادی ببرد.

مصمم بودن خانم نوریکو ساکورایی و ارادت سن فوتوان به ساکورایی سبب شد که این کتاب به شکل کنونی خود درآید. پس از فوت ساکورایی همسرش بیدرنگ دریافت که نباید بگذارد آخرین تلاش شوهرش به‌در رود. در نهایت شجاعت و بزرگواری نیروی پیشران این پروژه شد و توانست بر تمام مشکلات فائق آید و سنگ تمام گذاشت. سن فوتوان با کمال میل وقت و انرژی صرف کرد تا کار ساکورایی را ویرایش و کامل کند. شاید آنهایی که در رشته فیزیک نظری انرژیهای بالا کار می‌کنند درک کنند که انجام این مهم مستلزم چقدر از خودگذشتگی است.

برای من ساکورایی سالهاست که بیش از یک همکار برجسته ویژه است. غمگینم که دیگر نخواهیم توانست دوتایی به فیزیک و فیزیکدانها و به‌طور کلی به زندگی بخندیم و نیز ساکورایی شاهد توفیق آخرین کار خود نخواهد بود. با وجود این خوشحالم که این کار به‌ثمر رسیده است.

جان اس بل

سرن، ژنو

پیشگفتار

با مرگ نابهنگام ج ج ساکورایی در نوامبر سال ۱۹۸۲ دستنوشته‌هایش که قرار بود کتابی درباره مکانیک کوانتومی شود ناتمام ماند. این دستنوشته‌ها براساس درسی بود که وی اغلب اوقات در دانشگاه کالیفرنیا در لوس آنجلس تدریس می‌کرد. گرچه چند کتاب عالی درباره مکانیک کوانتومی موجود بود ولی ساکورایی احساس می‌کرد که در این کتابها به پیشرفتهای اخیر مکانیک کوانتومی پرداخته نشده‌است. اهدافی که وی در نوشتن این کتاب، مثل تدریسش دنبال می‌کرد ارائه روان، نگرش دقیق به مفاهیم مهم، و پرداختن به پیشرفتهای تجربی و نظری اخیر مکانیک کوانتومی (از جمله آزمایشهای تداخل سنج نوترونی، انتگرالهای مسیر فاینمن، اندازه‌گیریهای همبستگی، و نامساوی بل) بود.

این اهداف آشکارا در بخشی از دستنوشته‌های ساکورایی که پیش از مرگش کامل کرده است برآورده شده‌اند. پیشنهاد می‌شود مابقی کتاب و یادداشتهای دقیقی که وی برای درسش آماده کرده بود اساس کار من و براسرار شد و تا توانستم از نوشته‌های خود ساکورایی در کارم استفاده کردم. گاهی نگران می‌شدم که نتوانم به آن معیار بالای ساکورایی در نوشتن سه فصل اول کتاب (که کامل شده بود) دست یابم ولی یقین دارم که با پابندی به نوشته‌های اصلی و رهیافت او در کارم موفق بوده‌ام.

این کتاب برای دانشجوی سال اول کارشناسی ارشد نوشته شده‌است که مکانیک کوانتومی را در سطح کارشناسی خوانده‌است. این کتاب جهت آشنایی با مکانیک کوانتومی برای مبتدیان نیست. خواننده باید بتواند معادلات موج وابسته به زمان و مستقل از زمان را حل کند. آشنایی خواننده با حرکت بسته موج گوسی در ناحیه‌ای عاری از نیرو و نیز روش حل مسائل عبور و بازتابش یک بعدی ضروری است. دانشجویی که از این کتاب استفاده می‌کند باید برخی از خواص کلی و ویژه‌توابع انرژی و ویژه‌مقادیر انرژی را نیز بداند.

این کتاب رهیافت مستقیمی به دستگاههای کوانتومی دارد و بیدرنگ به معرفی فرمولبندی کوانتومی می‌پردازد. جزئیات مباحث بنیادی معمول و نیز پیشرفتهای جدید در مکانیک کوانتومی منجمله دینامیک کوانتومی، تقریب JWKB، فرمولبندی انتگرال مسیر، پتانسیل برداری، تقارن، روشهای تقریب، اصل پائولی، جداول یانگ، و نظریه پراکندگی شرح داده شده‌اند. چکیده‌ای از جوابهای ساده معادله موج شرودینگر در پیوست ۱ آمده‌است. کتابشناسی توصیفی کتابهای مقدماتی مکانیک کوانتومی گردآوری شده‌است. سرانجام مسائل زیادی را می‌توان در سرتاسر کتاب یافت. این مسائل بخش مهم کتاب محسوب می‌شوند و در مکانیک کوانتومی نیز مثل هر قلمرو دیگر فیزیک با به کار بردن نظریه در عمل است که دانشجو درس را می‌آموزد. حل المسائل این کتاب در اختیار مدرّسینی قرار داده خواهد شد که آن را کتاب درسی کلاس خود انتخاب کرده باشند.

سان فوتوان

یادبود

جون جان ساکورایی در سال ۱۹۳۳ در توکیو به دنیا آمد و در سال ۱۹۴۹ که دانش آموز دبیرستانی بود به ایالات متحده آمریکا آمد. در دانشگاه هاروارد و کرنل تحصیل کرد و در سال ۱۹۵۸ از دانشگاه کرنل دکترا گرفت. آنگاه در دانشگاه شیکاگو با سمت استادیاری استخدام شد و در سال ۱۹۶۴ به درجه استادی نایل آمد. تا سال ۱۹۷۰ در شیکاگو ماند و سپس به دانشگاه کالیفرنیا در لوس آنجلس نقل مکان کرد و تا زمان فوتش در آنجا بود. ساکورایی در طول عمر خود تعداد ۱۱۹ مقاله علمی درباره فیزیک نظری ذرات بنیادی و نیز تعدادی کتاب و رساله درباره نظریه کوانتومی و نظریه ذرات نوشت.

هدف اصلی شاخه فیزیک نظری فرمولبندی توصیفهایی نظری از جهان فیزیکی است که هم جمع و جور و هم جامع هستند. از آنجا که طبیعت دقیق و پیچیده است دنبال کردن فیزیک نظری مستلزم دست یازی جسورانه و اشتیاق آمیز به جبهه پدیده‌هایی است که جدیداً کشف می‌شوند. ساکورایی با بینش فیزیکی و درک مستقیم مثال زدنی خود و نیز توانایی که در تبیین این پدیده‌ها با عبارتهای ساده فیزیکی به مبتدیان دارد حکمران مطلق قلمرو فیزیک نظری است. فقط باید کتابهای درسی بسیار روان او چون اصول ناوردایی و ذرات بنیادی و مکانیک کوانتومی پیشرفته و نیز جزوه‌های مدارس تابستانی و مقالات مروری او را خواند تا این نکته را درک کرد. اغراق نکرده‌ام اگر گفته باشم که آنچه من از فیزیک ذرات می‌دانم از این کتابها و جزوه‌ها و مقالات و تدریس خصوصی ساکورایی نصیب شده‌است..

زمانی که ساکورایی هنوز دانشجوی دوره دکترایی بیش نبود مستقل و همزمان با ریچارد فاینمن، موری گلמן، رابرت مارشاک، و جورج سودراشان، چیزی را پیشنهاد کرد که امروزه به نظریه $V-A$ برهمکنشهای ضعیف معروف است. او در سال ۱۹۶۰ در مجله آنالز آف فیزیکس شاید مهمترین مقاله خود را به چاپ رساند. این مقاله نخستین تلاش جدی برای ساختن نظریه برهمکنشهای قوی براساس ناوردایی پیمانه‌ای آبلای و غیر آبلای (یانگ و میلز) بود. این کاربدیع او نظریه پردازان را برانگیخت تا به درک سازوکارهای تولید جرم در میدانهای پیمانه‌ای (بردار) بکوشند که آموزه به سازوکار هیگز مشهور است. گذشته از اینها این مقاله دانشمندان را برآن داشت که به جستجوی وحدت واقعی نیروها تحت اصل پیمانه‌ای بپردازند که در حال حاضر در طرح وحدت گلاشو، واینبرگ، و سلام نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی با موفقیت به‌ثمر نشسته است. از دیدگاه پدیده شناختی ساکورایی مدل غالب بودن مزونها در دینامیک هادرون را با جدیت دنبال کرد. او نخستین دانشمندی بود که مخلوط شدن حالت‌های مزون ω و ϕ را شرح داد. برآستی که ساکورایی در پدیده‌شناختی فیزیک ذرات سهم بسزایی دارد چون همیشه قلبش با فعالیتهای آزمایشگاهی بود. قریب به بیست و پنج سال بود که جون جان را می‌شناختم و او را نه فقط به‌خاطر توانایی فوق‌العاده‌اش در فیزیک نظری بلکه همچنین به‌خاطر گرمی و سخاوتمندی روحش می‌ستودم. گرچه خود او نیز بین سالهای ۱۹۵۷ و ۱۹۵۸ دانشجوی دوره دکتری بود ولی دست از تحقیقات درجه اول خود درباره روابط پاشندگی نوکلئون K می‌کشید تا از طریق مکاتبات طولانی مرا که به نوشتن رساله دکترایم درباره موضوع در برکلی مشغول بودم یاری دهد. هم ساندیپ پاکواسا و هم من مفتخریم که در نوشتن یکی از آخرین مقاله‌های او درباره جفت‌شدگیهای ضعیف کوارکهای سنگین، که یکبار دیگر شیوه قابل درک انجام فیزیک او را نمایش می‌دهد، با ساکورایی همکار بوده‌ایم.

از دست رفتن جون جان ساکورایی برای جامعه فیزیک بسیار سنگین بود و برای شخص من از آن هم سنگینتر. از این رو فرصتی که دست داد تا دستنوشته‌های مکانیک کوانتومی نوین او را برای چاپ ویرایش و کامل کنم بسیار خرسندم. برای من هیچ هدیه‌ای با ارزش‌تر از این فرصت نبود که با انجام خدمتی درخور دین خود را به جون جان ساکورایی ادا کنم.

سان فوتوان

فصل اول

مفاهیم اساسی

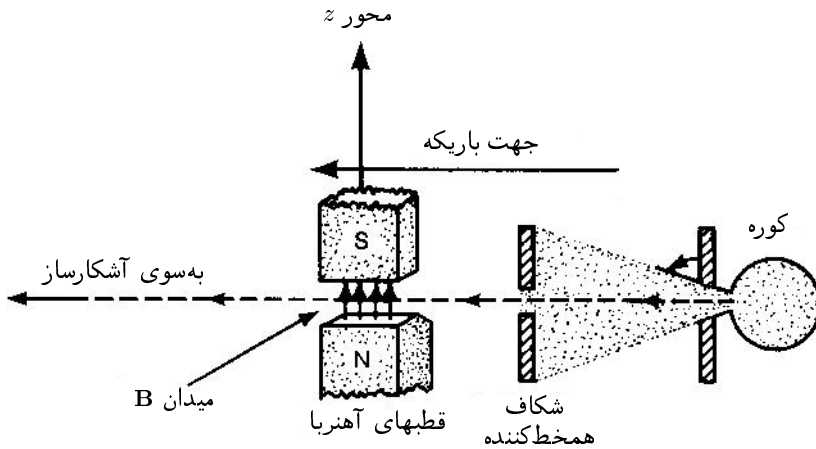
درک ما از پدیده‌های میکروسکوپیکی طی بیست و هفت سال اوّل قرن بیستم دستخوش چنان دگرگونی ژرفی شد که در تاریخ علوم طبیعی بی‌سابقه بود. ما نه تنها شاهد کاستیهای جدّی در اعتبار فیزیک کلاسیک بودیم بلکه دریافتیم نظریهٔ جدیدی که جایگزین نظریه‌های فیزیک کلاسیک شد اهدافی بس غنیتر و کاربردی بس گسترده‌تر دارد.

متداولترین شیوه مطالعهٔ مکانیک کوانتومی این است که سیر تاریخی آن را توصیف کنیم، یعنی به مطالبی از قبیل قانون تابش پلانک، نظریهٔ انیشتین—دبی گرمای ویژه، اتم بوهر، امواج مادّی دو بروی، و غیره همراه با چند آزمایش مهم چون اثر کمپتون، آزمایش فرانک هرتز، و آزمایش داویسون—جرمر—تامسون بپردازیم. بدینگونه می‌توان دریافت که چگونه فیزیکدانها در ربع اوّل قرن بیستم مجبور شدند اندک اندک مفاهیم جاافتادهٔ فیزیک را کنار بگذارند و چگونه بزرگ مردانی چون هایزنبرگ، شرودینگر، و دیراک همراه با دیگران توانستند مکانیک کوانتومی را علیرغم پیچ و خمهای نادرست آغازین به شکل امروزی آن فرمولبندی کنند.

ما در این کتاب رهیافت تاریخی مکانیک کوانتومی را دنبال نمی‌کنیم و مکانیک کوانتومی را با مثالی آغاز می‌کنیم که شاید بیش از هر مثال دیگری نارساییهای بنیادی مفاهیم کلاسیکی را برملا می‌سازد. امیدواریم خواننده‌ای که در آغاز راه با چنین بررسی تکان دهنده‌ای روبرو شده‌است با آنچه ما آن را “طرز فکر کوانتومی” می‌نامیم در آوان کاراجین شود.

۱.۱ آزمایش اشترن—گرلاخ

مثالی که در این بخش می‌زنیم آزمایش اشترن—گرلاخ است که در آغاز اشترن در سال ۱۹۲۱ مطرح کرد و در سال ۱۹۲۲ با همکاری گرلاخ آن را در فرانکفورت انجام داد. نتایج این آزمایش را نمی‌توان با مفاهیم مکانیک کلاسیک توجیه کرد. در بخشهای بعدی مکانیک کوانتومی را با در نظر گرفتن مثال آزمایش اشترن—گرلاخ به شیوهٔ اصل موضوعی فرمولبندی می‌کنیم. چنین دستگاه دو حالتی از نوع دستگاه اشترن—گرلاخ به هیچ‌روی کلاسیکی نیست بلکه از هر نظر کوانتومی به حساب می‌آید. دانشجویی که این رهیافت را دنبال کند مسائل دستگاههای دو حالتی را بهتر درک خواهد کرد. به همین دلیل در سرتاسر این کتاب به مسائل دو حالتی به کرات اشاره خواهیم کرد.



شکل ۱.۱ آزمایش اشترن گِراخ

شرح آزمایش

حال آزمایش اشترن-گِراخ را به اختصار شرح می‌دهیم. هر کتابی دربارهٔ فیزیک نوین این آزمایش را شرح می‌دهد^۱. نخست اتمهای نقره (Ag) را در کوره‌ای گرم می‌کنند. کوره سوراخ ریزی دارد که تعدادی از اتمهای نقره از آن بیرون می‌آیند. چنانچه شکل ۱.۱ نشان می‌دهد باریکه از همخط‌سازی می‌گذرد و آنگاه وارد میدان مغناطیسی ناهمگنی می‌شود که آن را دو قطب آهنربایی بوجود آورده‌اند که یکی از آنها لبهٔ تیزی دارد.

اینک اثر میدان مغناطیسی را روی اتمهای نقره بررسی می‌کنیم. برای مقاصدی که داریم مدل سادهٔ زیر برای اتم نقره کفایت می‌کند. اتم نقره از هسته‌ای تشکیل شده‌است و تعداد ۴۷ الکترون دارد که ۴۶ تای آنها ابرالکترونی کروی متقارنی را می‌سازند که اندازه حرکت زاویه‌ای خالص آن صفر است. اگر اسپین ذره را در نظر نگیریم که به بحث ما هم مربوط نمی‌شود، می‌بینیم که اتم رویهمرفته اندازه حرکت زاویه‌ای دارد که ناشی از همان تک الکترون ۴۷ ام (۲s) است. تعداد ۴۷ الکترون به هسته‌ای چسبیده‌اند که در حدود 2×10^5 مرتبه از الکترون سنگینتر است و بنابراین گشتاور مغناطیسی کل این اتم سنگین با گشتاور مغناطیسی الکترون ۴۷ ام برابر است. به بیان دیگر گشتاور مغناطیسی اتم μ با اسپین الکترون متناسب است

$$\mu \propto S \quad (۱.۱.۱)$$

که در آن ضریب تناسب با دقتی در حدود دو دهم درصد برابر است با $e/m_e c$ (در این کتاب $e < 0$).

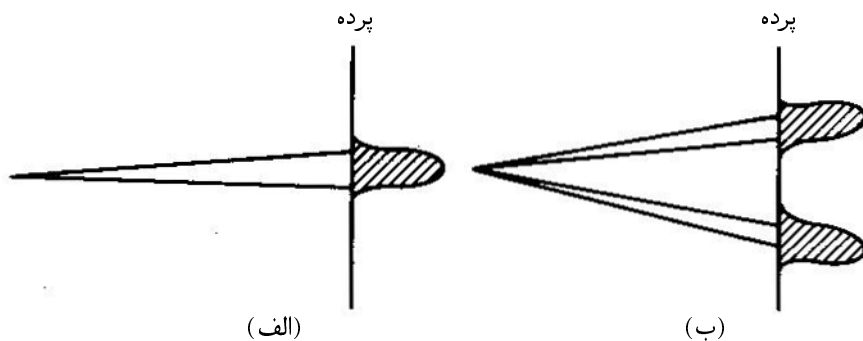
^۱ برای شرح مقدماتی ولی خواندنی از آزمایش اشترن-گِراخ به کتاب آشنایی با فیزیک کوانتومی فرنچ و تیلور صفحه ۴۲۸ رجوع کنید.

چون انرژی برهمکنش گشتاور مغناطیسی با میدان مغناطیسی برابر است با $\mu \cdot B$ ، مؤلفه z نیرویی که بر اتم می‌شود برابر است با

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\mu \cdot B) \cong \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.1.1)$$

که در آن از مؤلفه‌های B در راستاهایی غیر از راستای z چشم‌پوشی کرده‌ایم. از آنجا که اتم خیلی سنگین است انتظار داریم که بتوانیم مفهوم کلاسیکی مسیر را به کار ببریم. این نکته را می‌توانیم با استفاده از اصل عدم قطعیت که در بخش‌های آتی بدست خواهیم آورد، تأیید کرد. در آزمایش شکل ۲.۱ برای آن $\mu_z > 0$ ($S_z < 0$) باشد نیرویی بسوی پائین و برآثمی که برای آن $\mu_z < 0$ ($S_z > 0$) باشد نیرویی بسوی بالا وارد می‌شود^۲. آنگاه انتظار داریم که بسته به مقادیر μ_z باریکه شکافته شود، یعنی وسیله SG (اشترن-گرلاخ) مؤلفه z گشتاور مغناطیسی μ یا هم‌ارز آن مؤلفه z اسپین S را "اندازه می‌گیرد".

سمتگیری اتمهای درون کوره کاتوره‌ای است، یعنی سمتگیری خاصی برای μ وجود ندارد. اگر الکترون شیئی چرخان کلاسیکی بود انتظار داشتیم که μ_z همه مقادیر بین $|\mu|$ و $-|\mu|$ را بپذیرد و در نتیجه مطابق شکل ۲.۱ الف کلاف پیوسته‌ای از باریکه‌ها از وسیله اشترن-گرلاخ خارج می‌شد. اما آنچه آزمایش نشان می‌دهد وضعیتی است شبیه به شکل ۲.۱ ب، یعنی وسیله اشترن-گرلاخ باریکه اولیه اتمهای نقره را که از کوره می‌آیند به دو مؤلفه متمایز می‌شکافد. این پدیده در روزهای آغازین نظریه کوانتومی "کوانتش فضا" نامیده می‌شد. اگر $|\mu|$ با اسپین الکترون S متناسب باشد مشاهده می‌کنیم که فقط دو مقدار برای مؤلفه z اسپین S مجازند، یکی S_z بالا و دیگری S_z پائین که ما آنها را به ترتیب $S_z +$ و $S_z -$ می‌نامیم. این دو مقدار مجاز S_z ضرایب نوعی یکای بنیادی اندازه حرکت زاویه‌ای هستند که مقدار عددی آن چنان است که S_z با $\hbar/2$ و $-\hbar/2$ برابر می‌شود



شکل ۲.۱ باریکه‌هایی که از دستگاه اشترن گرلاخ بیرون می‌آیند. (الف) آنچه از فیزیک کلاسیک انتظار می‌رود، و (ب) آنچه آزمایش نشان می‌دهد.

^۲ برای توضیح بیشتر به فصل ۷ کتاب فیزیک نوین کرین رجوع کنید.

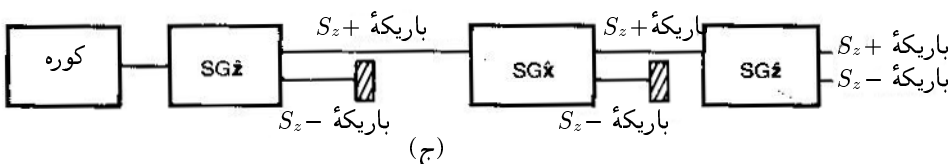
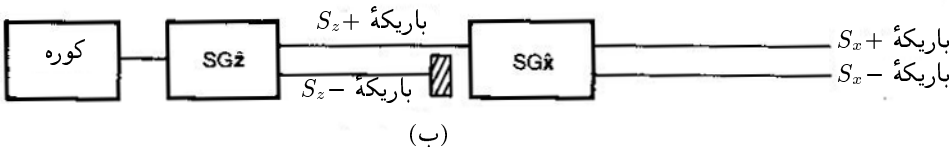
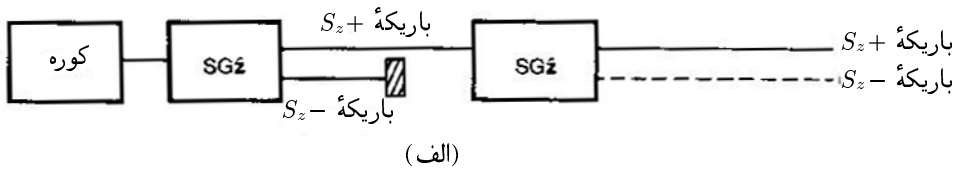
$$\begin{aligned}\hbar &= 1.0546 \times 10^{-27} \text{ erg-s} \\ &= 6.5822 \times 10^{-16} \text{ eV-s}\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

نخستین ویژگی مهمی که از آزمایش اشترن-گرلاخ استنتاج می‌کنیم همین “کوانتش” اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی الکترون است.

البته راستای بالا، پائین یا راستای محور z برتری ویژه‌ای بر راستاهای دیگر ندارند. می‌توانستیم میدان مغناطیسی ناهمگن را در راستای افقی مثلاً در راستای x انتخاب کنیم که در آن صورت باریکه در راستای y حرکت می‌کرد. اگر چنین می‌کردیم باریکه‌ای را که از کوره می‌آید به مؤلفه $S_x +$ و $S_x -$ تجزیه کنیم.

آزمایشهای اشترن-گرلاخ متوالی

اینک آزمایش اشترن-گرلاخ متوالی را شرح می‌دهیم که در آن باریکه اتمی پشت سر هم از دو یا چند وسیله اشترن-گرلاخ می‌گذرد. نخستین ترتیبی را که در نظر می‌گیریم بسیار ساده است. باریکه‌ای را که از کوره بیرون می‌آید از ترتیب شکل ۳.۱ الف می‌گذرانیم که در آن SG_z وسیله‌ای است که میدان مغناطیسی ناهمگن آن طبق معمول در راستای z است. آنگاه مؤلفه $S_z -$ باریکه‌ای را سد می‌کنیم که از اولین وسیله SG_z آمده است و به مؤلفه $S_z +$ اجازه می‌دهیم تا به وسیله SG_z بعدی وارد شود. این بار فقط یکی از مؤلفه‌های باریکه از وسیله دوم بیرون می‌آید



شکل ۳.۱ آزمایشهای اشترن-گرلاخ متوالی

که همان $S_z +$ است زیرا اگر اسپینهای اتمها روبه بالا باشند، مشروط بر این که بین وسیله $SG\hat{z}$ و دوم هیچ میدان خارجی نباشد که اسپینها را بچرخاند، انتظار داریم که همچنان رو به بالا بمانند.

ترتیب شکل ۳.۱ ب جالبتر است. در اینجا وسیله اشترن-گلاخ اول مثل سابق است ولی میدان مغناطیسی ناهمگن در وسیله دوم ($SG\hat{x}$) در راستای x است. باریکه $S_z +$ ای که وارد وسیله دوم ($SG\hat{x}$) می شود به دو مؤلفه با شدتهای برابر شکافته می شود که یکی مؤلفه $S_x +$ و دیگری مؤلفه $S_x -$ است. چگونه می توانیم این نتیجه را تبیین کنیم؟ آیا نیمی از اتمهای مؤلفه $S_z +$ که از وسیله اول ($SG\hat{z}$) می آید از اتمهایی با هر دو مشخصه $S_x +$ و $S_z +$ و نیم دیگر آن از اتمهایی با هر دو مشخصه $S_x -$ و $S_z +$ تشکیل شده است؟ چنانچه خواهیم دید معلوم شده است که چنین تصویری درست نیست.

اینک به مرحله سوم می پردازیم که ترتیب شکل ۳.۱ ج است و به بنیادی ترین وجه ویژگیهای دستگاههای کوانتومی را نمایش می دهد. این بار به ترتیب شکل ۳.۱ ب وسیله سومی از نوع $SG\hat{z}$ اضافه می کنیم. آزمایش نشان می دهد که دو مؤلفه از وسیله سوم بیرون می آید نه یک مؤلفه و دیده می شود که مؤلفه ای که بیرون می آید هم مؤلفه $S_z +$ دارد و هم مؤلفه $S_z -$. جای بسی شگفتی است زیرا پس از آن که اتمها از وسیله اول بیرون آمدند ما راه مؤلفه $S_z -$ را سد کردیم. پس چگونه ممکن است که مؤلفه $S_z -$ ای که فکر می کردیم قبلاً آن را حذف کرده ایم دوباره پدیدار شود؟ مدلی که در آن تصوّر می شود اتمهایی که از وسیله سوم بیرون می آیند هم مؤلفه $S_z +$ دارند و هم مؤلفه $S_x -$ ، به هیچ روی رضایت بخش نیست.

در مکانیک کوانتومی بارها از این مثال استفاده می کنیم تا نشان دهیم که همزمان نمی توان هر دو مؤلفه S_x و S_z را تعیین کرد. دقیقتر بگوئیم، انتخاب باریکه $S_x +$ با وسیله دوم ($SG\hat{x}$) هرگونه اطلاعات پیشین درباره S_z را از بین می برد.

جالب است که این مورد را با فرفره چرخان مکانیک کلاسیک مقایسه کنیم که در آن اندازه حرکت زاویه ای

$$L = I\omega \quad (4.1.1)$$

را می توان با تعیین مؤلفه های بردار سرعت زاویه ای ω اندازه گرفت. اگر تعیین کنیم که فرفره با چه سرعتی در چه راستایی می چرخد آنگاه می توانیم ω_x ، ω_y ، و ω_z را همزمان تعیین کنیم. اگر چگالی جرمی و شکل هندسی فرفره را بدانیم می توانیم گشتاور لختی فرفره I را حساب کنیم و بنابراین برای تعیین همزمان L_x و L_z در این مثال کلاسیکی مشکلی نخواهیم داشت.

باید بدانیم که ناتوانی ما در تعیین همزمان S_x و S_z بر اثر بی تجربگی آزمایشگر نیست. حتی با پیشرفته ترین تکنیکهای آزمایشگاهی نیز نخواهیم توانست مؤلفه S_z را از وسیله سوم در شکل ۳.۱ ج حذف کنیم. خود آزمایش است که ویژگیهای مکانیک کوانتومی را بر ما تحمیل می کند. در واقع این کاستی در سرشت پدیده های میکروسکوپی نهفته است.

تشابه با قطبش نور

چون موردی که عنوان کردیم تازگی دارد، تشابه با مورد آشنای کلاسیکی می‌تواند به درک آن کمک کند. از این رو قطبش امواج نور را بررسی می‌کنیم. موج نور تکفامی را در نظر می‌گیریم که در راستای z منتشر می‌شود. نور قطبیده خطی (یا صفحه‌ای) که بردار قطبش آن در راستای x است (به اختصار آن را نور قطبیده x می‌گوئیم) میدان الکتریکی نوسان کننده‌ای دارد که به فضا و زمان بستگی دارد

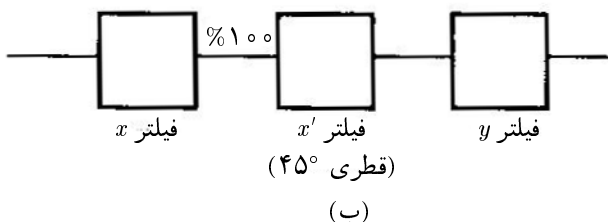
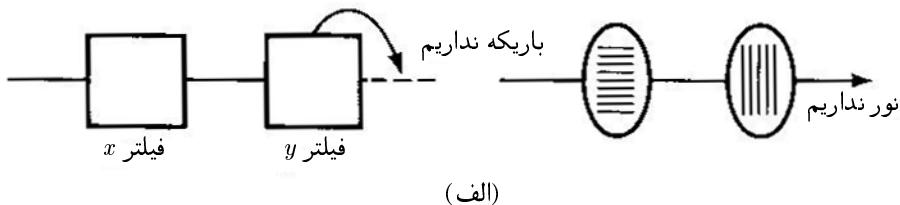
$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(kz - \omega t) \quad (5.1.1)$$

همین‌طور نور قطبیده y را در نظر می‌گیریم که در راستای z منتشر می‌شود

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(kz - \omega t) \quad (6.1.1)$$

باریکه‌های نور قطبیده از نوع (۵.۱.۱) یا (۶.۱.۱) را می‌توان با گذراندن باریکه نور ناقطبیده از صافی پلاروید بدست آورد. صافی‌ای که فقط باریکه قطبیده در راستای x را برمی‌گزیند صافی x می‌گوئیم. البته اگر صافی x را در راستای انتشار نور (z) به اندازه 90° بچرخانیم به صافی y تبدیل می‌شود. می‌دانیم که اگر باریکه نوری را از صافی x و سپس از صافی y بگذرانیم هیچ نوری بیرون نمی‌آید، البته مشروط بر این‌که با پلارویدهایی کار کنیم که کارایی آنها 100% است (شکل ۴.۱ الف).

مورد جالب‌ترین است که بین صافی x و y پلاروید دیگری قرار دهیم بنام صافی x' که با راستای x در صفحه xy زاویه 45° می‌سازد (شکل ۴.۱ ب). این بار علیرغم این‌که باریکه نوری که از صافی x می‌گذرد هیچ مؤلفه قطبشی در راستای y ندارد، باریکه نور از صافی y



شکل ۴.۱ باریکه‌های نور که از فیلترهای پلاروید می‌گذرند.

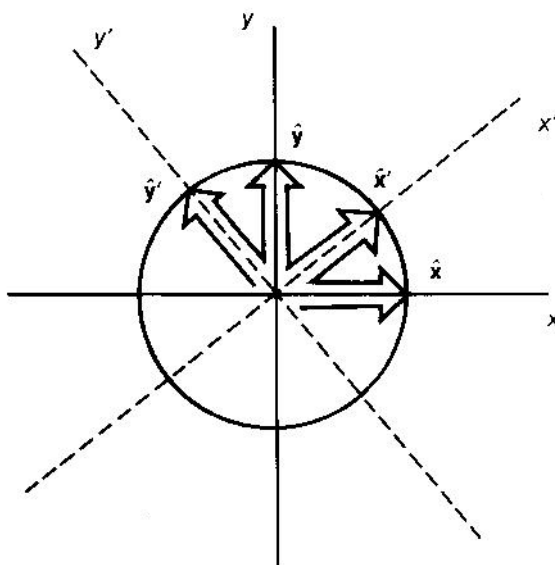
بیرون می آید، یعنی همین که صافی x' دخالت می کند و باریکه قطبیده x' را برمی گزیند، مهم نیست که باریکه قبلاً قطبیده x بوده باشد یا نه. انتخاب باریکه قطبیده x' با پلاروید دوم هر گونه اطلاعات قبلی درباره قطبش نور را از بین می برد. توجه کنید که این مورد دقیقاً شبیه موردی است که پیش از این در آزمایش اشترن-گرلاخ شکل ۳.۱ ب داشتیم، مشروط بر این که ارتباط زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned} S_z \pm \text{اتمهای } x \longleftrightarrow y \text{ نور قطبیده} \\ S_x \pm \text{اتمهای } x' \longleftrightarrow y' \text{ نور قطبیده} \end{aligned} \quad (۷.۱.۱)$$

که در آن محورهای x' و y' را در شکل ۵.۱ تعریف کرده ایم. اینک می خواهیم ببینیم که چگونه می توان بطور کمی رفتار باریکه های قطبیده 45° (یعنی باریکه های قطبیده x' و y') را در چارچوب الکترودینامیک کلاسیک بررسی کرد. از شکل ۵.۱ داریم

$$\begin{aligned} E_0 \hat{x}' \cos(kz - \omega t) &= E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right] \\ E_0 \hat{y}' \cos(kz - \omega t) &= E_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right] \end{aligned} \quad (۸.۱.۱)$$

باریکه ای که در ترتیب سه صافی شکل ۴.۱ ب از پلاروید اول خارج می شود باریکه قطبیده x است که می توان آن را ترکیبی خطی از باریکه های قطبیده x' و y' دانست. پلاروید دوم باریکه



شکل ۵.۱ سمتگیری محورهای x' و y' .

قطبیده x' را انتخاب می‌کند که این باریکه را نیز می‌توان ترکیبی از باریکه‌های قطبیده x و y پنداشت. سرانجام پلاروید سوّم مؤلفه y را انتخاب می‌کند.

اگر ارتباط (۷.۱.۱) از آزمایش اشترن-گرلاخ متوالی شکل ۳.۱ ج را درباره آزمایش سه صافی شکل ۴.۱ ب بکار ببریم می‌توانیم حالت اسپینی هراتم نقره را با نوعی بردار در فضای برداری دو بعدی انتزاعی جدیدی مشخص کنیم که نباید آن را با فضای برداری دو بعدی معمولی (x, y) اشتباه گرفت. همانگونه که $\hat{x}$ و $\hat{y}$ در رابطه (۸.۱.۱) بردارهای پایه‌ای بودند که برای تجزیه بردار قطبش $\hat{x}'$ نور قطبیده x' بکار رفتند، در اینجا نیز معقول است که حالت $S_x +$ را با برداری نمایش دهیم که در نمادگذاری دیراک آن را $\ket{S_x; +}$ می‌نامیم. در بخش بعد نمادگذاری دیراک را بتفصیل شرح می‌دهیم. این بردار را با نماد $\ket{S_x; +}$ نمایش می‌دهیم و آن را به شکل ترکیب خطی از دو بردار پایه $\ket{S_z; +}$ و $\ket{S_z; -}$ می‌نویسیم که به ترتیب با حالت‌های $S_z +$ و $S_z -$ متناظرند. بنابراین در تشابه با رابطه (۸.۱.۱) حدس می‌زنیم که

$$\ket{S_x; +} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \ket{S_z; +} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ket{S_z; -} \quad (۹.۱.۱ \text{ الف})$$

$$\ket{S_x; -} \stackrel{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}} \ket{S_z; +} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ket{S_z; -} \quad (۹.۱.۱ \text{ ب})$$

در بخش‌های بعدی این روابط را از فرمولبندی مکانیک کوانتومی بدست می‌آوریم. بنابراین با توجه به رابطه (۹.۱.۱ الف) مؤلفه سد نشده‌ای را که از دستگاه دوّم (SG $\hat{x}$) شکل ۳.۱ ج بیرون می‌آید می‌توانیم به شکل برهم‌نهی دو حالت $S_z +$ و $S_z -$ در نظر بگیریم. به همین دلیل است که دو مؤلفه از وسیله سوّم (SG $\hat{z}$) بیرون می‌آیند.

پرسش دیگری که بلادرنگ به ذهن خطور می‌کند این است که چگونه حالت‌های $S_y \pm$ را نمایش دهیم؟ براساس تقارن می‌توانیم بگوئیم که اگر باریکه $S_z \pm$ ای در راستای x حرکت کند و بردستگاه SG $\hat{y}$ بتابد آنچه رخ می‌دهد دقیقاً شبیه به موردی خواهد بود که در آن باریکه $S_z \pm$ ای در راستای y حرکت کند و بردستگاه SG $\hat{x}$ بتابد. آنگاه کتهای $S_y \pm$ را باید ترکیب خطی از $\ket{S_z; \pm}$ دانست، ولی روابط (۹.۱.۱) نشان می‌دهند که ما از همه امکانات موجود فضای برداری در نوشتن $\ket{S_x; \pm}$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین فرمولبندی فضای برداری ما چگونه خواهد توانست حالت‌های $S_y \pm$ را از حالت‌های $S_x \pm$ تمیز دهد؟

در اینجا نیز تشابه با نور قطبیده ما را نجات می‌دهد. این بار باریکه قطبیده دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که می‌توان آن را با گذراندن نور قطبیده خطی از ورقه یک چهارم موج بدست آورد. اگر نور قطبیده دایره‌ای را از صافی x یا y بگذرانیم باز هم باریکه قطبیده x یا y را بدست می‌آوریم که شدت آنها با هم برابر است. بعلاوه می‌دانیم که نور قطبیده دایره‌ای با نور قطبیده خطی 45° (نور قطبیده x' یا y') کاملاً فرق دارد.

معادله ریاضی نور قطبیده دایره‌ای چیست؟ نور قطبیده دایره‌ای راستگرد چیزی نیست جز ترکیب خطی نور قطبیده x و y که در آن نوسان میدان الکتریکی مؤلفه قطبیده y به اندازه 90° با

نوسان میدان الکتریکی مؤلفه قطبیده x اختلاف فاز دارد^۳

$$\mathbf{E} = E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \right] \quad (10.1.1)$$

بهتر است با معرّفی ϵ به شکل

$$\text{Re}(\epsilon) = \mathbf{E} \quad (11.1.1)$$

از نمادگذاری مختلط استفاده کنیم. آنگاه نور قطبیده دایره‌ای راستگرد را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\epsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{y} e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad (12.1.1)$$

که در آن از $i = e^{i\pi/2}$ استفاده کرده‌ایم.

اکنون می‌توانیم تناظری به شکل زیر با حالت‌های اسپینی اتم‌های نقره برقرار کنیم:

$$\begin{aligned} S_y + \text{اتم} &\longleftrightarrow \text{راستگرد} \\ S_y - \text{اتم} &\longleftrightarrow \text{چپگرد} \end{aligned} \quad (13.1.1)$$

اگر این تناظر را بر (۱۲.۱.۱) اعمال کنیم می‌بینیم که هرگاه بتوانیم ضرایب کتهای پایه قبلی را اعداد مختلط بگیریم آنگاه خواهیم توانست اتم‌های $S_y \pm$ را در فرمولبندی فضای برداری خود جای دهیم

$$|S_y; \pm\rangle \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle \quad (14.1.1)$$

آشکار است که این روابط با روابط (۹.۱.۱) فرق دارند. بنابراین می‌بینیم که فضای برداری دوبعدی که بتواند حالت‌های اسپینی اتم‌های نقره را توصیف کند باید فضای برداری مختلط باشد، یعنی هر بردار دلخواهی در فضای برداری را باید بتوان به شکل ترکیبی از بردارهای پایه $|S_z; \pm\rangle$ نوشت که در آن در حالت کلی ضرایب مختلط هستند. شگفتا که از همان آغاز کار لزوم اعداد مختلط در چنین مثال ساده‌ای هویدا است.

تاکنون باید پی برده باشید که ما آگاهانه از فوتون صحبت به میان نیاوردیم، یعنی از جنبه‌های کوانتومی نور چشم‌پوشی کردیم و هیچ‌جا از حالت‌های قطبش تک تک فوتونها بحث نکردیم. تشابهی که به آن متوسل شدیم تشابهی بود که کتهای فضای برداری انتزاعی که حالت‌های اسپینی تک تک اتم‌ها را توصیف می‌کردند، با بردارهای قطبش میدان مغناطیسی کلاسیک داشتند. در واقع می‌توانستیم با معرفی مفهوم فوتون و بحث درباره احتمال یافتن فوتونهای قطبیده دایره‌ای در

^۳ به فصل ۸ کتاب نور شناخت هخت رجوع کنید.

حالت قطبیده خطی و غیره این تشابه را دقیقتر کنیم ولی در اینجا به این گونه مطالب نیازی نداریم و بدون انجام چنین کاری به هدف اصلی این بخش دست یافته‌ایم که همانا نمایش حالت‌های کوانتوم مکانیکی با بردارهایی در فضای برداری انتزاعی موهومی بود.^۴

۲.۱ کت، برا، و عملگر

در بخشی که گذشت نشان دادیم که چگونه تحلیل آزمایش اشترن-گرلاخ ما را بر آن داشت تا فضای برداری مختلطی را در نظر بگیریم. در این بخش و بخش بعدی ریاضیات اساسی فضاهای برداری را به شکلی فرمولبندی می‌کنیم که در مکانیک کوانتومی بکار خواهیم برد. نمادگذاری ما در سرتاسر کتاب نمادگذاری کت و براست که دیراک آن را ابداع کرد. البته نظریه خطی فضاهای برداری پیش از تولد مکانیک کوانتومی معلوم شده بود ولی روشی که برای معرفی فضاهای برداری بکار برد برتریهای زیادی دارد، بالاخص از دیدگاه فیزیکدانها.

فضای کت

فضای برداری مختلطی را در نظر می‌گیریم که بُعد آن را طبیعت دستگاه فیزیکی مورد نظر ما تعیین می‌کند. در آزمایشهایی از نوع اشترن-گرلاخ که در آنها تنها درجه آزادی کوانتوم مکانیکی اسپین اتم است بُعد این فضای برداری را تعداد مسیرهای مختلفی تعیین می‌کنند که اتمها می‌توانند پس از خروج از دستگاه اشترن-گرلاخ طی کنند که در مورد اتمهای نقره بخش گذشته متناظر با دو مقدار مجاز S_z ، تعداد ابعاد فقط دو است.^۵ در بخش ۶.۱ طیفهای پیوسته را در نظر می‌گیریم (برای مثال، مکان یا اندازه حرکت ذره) که در آنها تعداد بینهایت حق انتخاب وجود دارد و در این مورد فضای برداری ما به افتخار هیلبرت که فضاهای برداری بینهایت بُعد را مطالعه می‌کرد، فضای هیلبرت نام دارد.

هر حالت فیزیکی در مکانیک کوانتومی، برای مثال اتم نقره‌ای با راستای اسپینی مفروض، را با بردار حالت در فضای برداری مختلط نمایش می‌دهیم. چنین برداری در نمادگذاری دیراک کت نام دارد و ما آن را با $|\alpha\rangle$ نمایش می‌دهیم. اصل موضوعه شده است که کت حالت شامل اطلاعات کاملی درباره حالت فیزیکی است و هر آنچه را بخواهیم درباره حالت بدانیم در کت نهفته است. دو کت را می‌توان با هم جمع کرد

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \quad (1.2.1)$$

حاصل جمع $|\gamma\rangle$ نیز کت دیگری خواهد بود. اگر $|\alpha\rangle$ را در عدد مختلط c ضرب کنیم، حاصل ضرب

^۴ خواننده‌ای که می‌خواهد با مطالعه دقیق قطبش فوتون به درک مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی بپردازد فصل اول کتاب بایم (۱۹۶۹) را مفید خواهد یافت.

^۵ در بسیاری از دستگاههای فیزیکی فضای حالت دارای ابعاد بی‌نهایت است. هرچند ما معمولاً فضای کت را N بعدی نمایش خواهیم داد ولی نتایج حاصل در ابعاد بینهایت نیز برقرارند

$c|\alpha\rangle$ نیز کت دیگری خواهد بود. عدد c می‌تواند در طرف راست یا چپ کت قرار گیرد که فرقی باهم ندارند

$$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c \quad (2.2.1)$$

در مورد خاصی که c برابر است با صفر، کت حاصل را کت صفر می‌گویند. یکی از اصول موضوعه فیزیک این است که کتهای $|\alpha\rangle$ و $c|\alpha\rangle$ که در آن $c \neq 0$ است، حالت فیزیکی یکسانی را نمایش می‌دهند، یعنی در فضای برداری فقط “جهت” مهم است. شاید ترجیح دهند بگویند که در اینجا ما به جای بردارها با پرتوها سروکار داریم. هر مشاهده‌پذیری مانند اندازه حرکت و مؤلفه‌های اسپین را می‌توان با عملگری مانند A در فضای برداری مورد نظر نمایش داد. به‌طور کلی هر عملگر از طرف چپ بر کت عمل می‌کند

$$A \cdot (|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle \quad (3.2.1)$$

که خود کت دیگری است. بعداً درباره ضرب بیشتر صحبت خواهیم کرد. به‌طور کلی $A|\alpha\rangle$ برابر با ثابتی ضربدر $|\alpha\rangle$ نیست. باوجوداین کتهای مهمی وجود دارند بنام ویژه کتهای عملگر A که آنها را با

$$|a'\rangle, |a''\rangle, |a'''\rangle, \dots \quad (4.2.1)$$

نمایش می‌دهیم و دارای خاصیت زیر هستند

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle, A|a''\rangle = a''|a''\rangle, A|a'''\rangle = a'''|a'''\rangle, \dots \quad (5.2.1)$$

که در آنها a' ، a'' ، a''' ، ... فقط عدد هستند. توجه کنید که اگر A را بر یکی از ویژه کتهایش عمل کنیم حاصل خود ویژه کت ضربدر ضریب ثابتی خواهد شد. مجموعه اعداد $\{a', a'', a''', \dots\}$ که آن را به اختصار $\{a'\}$ می‌نویسیم، مجموعه ویژه مقادیر عملگر A نام دارد. هر زمان لازم باشد که مجموعه ویژه مقادیر را به ترتیب خاصی مرتب کنیم به جای $\{a', a'', a''', \dots\}$ از $\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots\}$ استفاده خواهیم کرد.

حالت فیزیکی متناظر با هر ویژه کت را ویژه حالت می‌نامیم. در مورد دستگاههای ساده‌ای مانند دستگاههای اسپین $1/2$ ، رابطه بین ویژه مقدار با ویژه کت (۵.۲.۱) به شکل زیر است

$$S_z|S_z; +\rangle = \frac{\hbar}{2}|S_z; +\rangle, \quad S_z|S_z; -\rangle = -\frac{\hbar}{2}|S_z; -\rangle \quad (6.2.1)$$

که در آن $|S_z; \pm\rangle$ ویژه کتهای عملگر S_z با ویژه مقادیر $\pm\hbar/2$ است. در اینجا می‌توانستیم از $|\hbar/2\rangle$ به جای $|S_z; +\rangle$ استفاده کنیم که با نمادگذاری $|a'\rangle$ باشد (یعنی هر ویژه کت با