



دانشگاه سیام نور

نظریه عملگرها

(کارشناسی ارشد رشته ریاضی)

دکتر علی ظهري دکتر مرجان ادیب

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پیشگفتار مؤلف	۴
فصل اول. عملگرهای فشرده	
هدف کلی	۱
هدف‌های یادگیری	۱
مقدمه	۲
۱-۱ خواص عمومی عملگرهای فشرده و معیار فشردگی	۲
۲-۱ تماماً کرانداری	۱۲
۳-۱ زیر فضاهای پایای عملگرهای فشرده	۱۶
خودآزمایی تشریحی فصل اول	۲۲
فصل دوم. جبرهای باناخ و آنالیز طیفی عملگرهای خطی	
هدف کلی	۲۵
هدف‌های یادگیری	۲۵
مقدمه	۲۶
۱-۲ جبرهای باناخ	۲۷
۲-۲ عناصر معکوس‌پذیر و شبه معکوس‌پذیر در جبر باناخ	۳۲
۳-۲ طیف و خواص آن	۳۸
۴-۲ حسابان تابعی	۴۸
۵-۲ طیف عملگرهای خطی	۵۶
۶-۲ طیف عملگرهای فشرده	۵۹
۷-۲ جبرهای باناخ جابجایی	۶۴
خودآزمایی تشریحی فصل دوم	۷۲
فصل سوم. فضاهای هیلبرت	
هدف کلی	۷۷

۷۷	هدف‌های یادگیری
۷۸	مقدمه
۷۹	۱-۳ تعامد در فضای هیلبرت
۱۰۵	۲-۳ عملگرهای خاص روی فضاهاى هیلبرت
۱۱۳	۳-۳ خواص بیشتری از شبکه تصاویر
۱۲۲	۴-۳ عملگرهای مثبت در فضای هیلبرت
۱۲۷	۵-۳ جذر یک عملگر مثبت
۱۳۱	۶-۳ تجزیه قطبی عملگرها
۱۳۶	۷-۳ عملگرهای فرد هولم و طیف اساسی
۱۴۶	خودآزمایی تشریحی فصل سوم

فصل چهارم. قضیه طیفی عملگرهای خودالحاق روی فضای هیلبرت

۱۵۱	هدف کلی
۱۵۱	هدف‌های یادگیری
۱۵۱	مقدمه
۱۵۲	۱-۴ خانواده طیفی عملگرهای خطی کراندار و خودالحاق
۱۵۸	۲-۴ نمایش طیفی عملگرهای خطی کراندار و خودالحاق
۱۶۳	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم

فصل پنجم. C^* -جبرها

۱۶۵	هدف کلی
۱۶۵	هدف‌های یادگیری
۱۶۶	مقدمه
۱۶۶	۱-۵ خواص ابتدایی و مثال‌ها
۱۷۵	۲-۵ C^* -جبرهای جابجایی
۱۸۰	۳-۵ عناصر مثبت در C^* -جبرها
۱۸۹	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم

فصل ششم. عملگرهای نرمال و نمایش C^* -جبرهای آبلی

۱۹۳	هدف کلی
۱۹۳	هدف‌های یادگیری

۱۹۳	 مقدمه
۱۹۴	 ۱-۶ توپولوژی‌های فضای $B(\mathcal{H})$
۱۹۸	 ۲-۶ اندازه طیفی و نمایش C^* -جبرهای آبلی
۲۰۷	 ۳-۶ قضیه طیفی برای عملگرهای نرمال
۲۱۰	 خودآزمایی تشریحی فصل ششم
۲۱۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پیشگفتار مؤلف

ای زندگی تن و توانم همه تو جانی و دلی ای دل و جانم همه تو
تو هستی من شدی از آنی همه من من نیست شدم در تو از آنم همه تو

“مولانا”

نظریه عملگرها شاخه‌ای از آنالیز تابعی و با قدمت حدود صد سال است اما می‌توان گفت که طی دهه‌های اخیر به بلوغ خود رسیده است. این نظریه که در جهات مختلفی توسعه یافته است، روش‌های جدید و قدرتمندی ارائه داده که منجر به حل مسائلی اساسی شده است که قبلاً غیرقابل حل می‌نمودند. روش‌های جبری به کار رفته در نظریه عملگرها متنوع و در پهنه وسیعی از مباحث ریاضی ظاهر می‌شوند. به عنوان نمونه، می‌توان به معادلات دیفرانسیل جزئی، نظریه دستگاه، حساب ماتریس‌ها، توپولوژی جبری، نظریه شاخص و آنالیز مختلط و هارمونیک اشاره نمود. در فیزیک نوین، در مطالعه نظریه میدان کوانتوم، لازمه بحث درباره میدان‌های کوانتوم روی منحنی‌های فضا-زمان، کسب دانش درباره نظریه طیفی عملگرهای شرودینگر است. نظریه عملگرها در توصیف نظریه بسته‌های کروی، که الگوریتم‌های مورد استفاده گوگل و مایکروسافت بدان وابسته‌اند و همچنین در جستجوی تشابه، که گوگل وابسته به آن است، نقش بسیار مهم و زیبایی دارند. در نظریه قاب‌ها، که وابسته به نظریه عملگرهاست، مطالعه قاب‌های گراسمنی در مکالمات بی‌سیم و کدگذاری توصیفی چندگانه کاربرد دارند. جبرهای عملگری، که می‌توان آن‌ها را به عنوان تعمیمی از نظریه طیفی یک عملگر در نظر گرفت، کاربردهای مستقیمی در نظریه نمایش، هندسه دیفرانسیل و مکانیک آماری کوانتوم دارند. همچنین، در ارتباط با کاربرد نظریه عملگرها در علوم دیگر، کاربرد در علوم کامپیوتر، انتشار موج، الکترومغناطیس، شیمی و زیست‌شناسی نیز قابل ذکرند.

با این توصیف، تجربه چندین ساله‌ی تدریس درس نظریه عملگرها در پیام نور، مؤلفین را بر آن داشت تا کتابی متناسب با سر فصل شورای عالی برنامه‌ریزی و متناسب با دانشجویان پیام نور در هر دو مقطع کارشناسی ارشد و دکتری فراهم آورند. موضوعات کتاب شامل مباحث اصلی نظریه عملگرهاست و مفاهیم عمیق و جدی با شرح و بسط کافی مورد بحث قرار گرفته‌اند. این کتاب در هفت فصل تألیف شده است. در هر فصل متناسب با مطالب آن، مثال‌های متنوع و همچنین تمرین‌هایی در آخر هر فصل ارائه شده است که حل این تمرین‌ها به مهارت دانشجو در بکار بستن قضایا کمک شایانی می‌کند. در کل اهتمام کافی به عمل آمده است که کتاب نوعی “خودآموز” باشد. بدین معنی که دانشجو بتواند بدون استعانت استاد، آن را مطالعه کند.

بی‌تردید ویراستاری هر کتاب ریاضی بسیار حائز اهمیت است، لذا مؤلفین وظیفه خود می‌دانند که از زحمات آقای دکتر علی عبادیان برای ویراستاری کتاب تشکر و قدردانی نمایند. بدون شک رهنمودهای ایشان در بهتر شدن کتاب بسیار مؤثر بوده است. از مدیریت محترم تدوین جناب آقای دکتر فرج الهی و آقای راستگو کارشناس محترم تدوین برای پیگیری‌های مستمرشان در راستای مراحل اداری تشکر می‌نمایم. همچنین از خانم مهشید مرادی و آقای حسن قربانزاد بابت زحماتی که برای تایپ کتاب کشیدند، سپاسگزاریم.

بدیهی است کتاب حاضر خالی از نقص نیست، از این رو مؤلفین از دریافت نقطه نظرهای خوانندگان محترم، به ویژه اساتید گرامی و دانشجویان محترم، از طریق پست الکترونیکی m.adib.pnu@gmail.com استقبال می‌نمایند.

مرجان ادیب علی ظهري

فصل اول

عملگرهای فشرده

هدف کلی

آشنایی با عملگرهای فشرده و معرفی خواص آنها

هدف‌های یادگیری

بعد از مطالعه این فصل باید بتوانید:

۱. عملگر فشرده را تعریف و برای آن مثال بزنید.
۲. نشان دهید زیرفضای عملگرهای فشرده روی یک فضای باناخ X ، یک ایده‌آل بسته از فضای عملگرهای خطی کراندار روی X است.
۳. نشان دهید برد هر عملگر فشرده، تفکیک‌پذیر است.
۴. نشان دهید هر عملگر فشرده، به طور کامل پیوسته است.
۵. نشان دهید عملگر الحاقی هر عملگر فشرده، فشرده است.
۶. ثابت کنید در یک فضای هیلبرت، یک عملگر خطی، فشرده است اگر و فقط اگر حد دنباله‌ای از عملگرهای با بعد متناهی باشد.
۷. نشان دهید فضای پوچ یک عملگر فشرده، از بعد متناهی است.
۸. زیر فضای پایا را تعریف و برای آن مثال بزنید.
۹. نشان دهید هر عملگر فشرده دارای زیر فضای پایای غیر بدیهی است.
۱۰. عملگر فشرده ضعیف را تعریف و برای آن مثال بزنید.
۱۱. نشان دهید الحاقی هر عملگر فشرده ضعیف، فشرده ضعیف است.

مقدمه

مفهوم عملگرهای فشرده در آثار فردریک ریس و داوید هیلبرت وجود دارد. تعریف امروزی از عملگر فشرده که در متن کتاب ارائه می‌شود، توسط فردریک ریس در سال ۱۹۱۸ میلادی در مقاله‌ای ارائه شد. پیش از آن داوید هیلبرت در سال ۱۹۰۶ این مفهوم را به صورت زیر تعریف کرده بود:

”عملگر T را فشرده نامیم هرگاه به ازای هر مجموعه ضعیف فشرده K در X ، مجموعه $T(K)$ فشرده باشد.“ این مفهوم را امروزه کاملاً پیوستگی می‌نامند. از آنجا که هیلبرت به عملگرهای با دامنه ℓ^2 علاقمند بود، و چون در فضای بازتابی ℓ^2 مفاهیم فشردگی و کاملاً پیوستگی با هم معادل‌اند، اغلب ریاضی‌دانان، فردریک ریس و داوید هیلبرت را مشترکاً واضع نظریه عملگرهای فشرده می‌دانند. به علاوه، مفهوم عملگرهای ضعیف فشرده توسط دو ریاضی‌دان ژاپنی به اسامی کوساکو یوشیدا و شیزو کاکوتانی در سال ۱۹۳۸ معرفی شد.

عملگرهای خطی فشرده از نظر کاربرد دارای اهمیت فراوانی هستند. به عنوان مثال، این نوع عملگرها در حل معادلات انتگرالی و نیز در حل مسائل متنوعی از ریاضی فیزیک کاربرد دارند. همانطور که خواهیم دید هر عملگری که برد آن از بعد متناهی باشد، فشرده است. لذا فشردگی خاصیت مهمی است که در مورد عملگرهای خطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. علاوه بر این خواهیم دید که هر عملگر خطی فشرده، کراندار و در نتیجه پیوسته است یعنی از خواص عملگرهای پیوسته نیز بهره‌مند می‌باشند. این ویژگی که برد هر عملگر فشرده، تفکیک‌پذیر است و خواصی که از تفکیک‌پذیری برد حاصل می‌شود، بر اهمیت عملگرهای فشرده می‌افزاید. همچنین فضاهاى پوچ عملگرهای فشرده و مقادیر ویژه آن‌ها نقش مهمی در حل معادلات دیفرانسیل ایفا می‌کنند.

۱-۱ خواص عمومی عملگرهای فشرده و معیار فشردگی

۱-۱-۱ یادآوری

یک زیر مجموعه M از یک فضای توپولوژیک X ، فشرده نسبی^۱ نامیده می‌شود هرگاه بستار آن فشرده باشد.

1. Relatively Compact

۲-۱-۱ تعریف

فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. عملگر خطی $T : X \rightarrow Y$ فشرده^۱ نامیده می‌شود هرگاه هر زیرمجموعه کراندار از X را به یک زیرمجموعه فشرده نسبی از Y تصویر نماید.

به عبارت دیگر، عملگر خطی $T : X \rightarrow Y$ فشرده است هرگاه به ازای هر زیرمجموعه کراندار M از X ، زیر مجموعه $\overline{T(M)}$ در Y فشرده باشد.

۳-۱-۱ تذکر

برای سهولت در تعریف یک عملگر فشرده می‌توان مجموعه کراندار $M \subset X$ را با گوی یکه باز $ball\ X$ جایگزین کرد.

۴-۱-۱ نمادگذاری

در سراسر این کتاب فرض کنید $B(X, Y)$ ، جبر همه عملگرهای خطی و کراندار از X به Y و $B_{\bullet\bullet}(X, Y)$ و $B_{\bullet}(X, Y)$ ، زیر جبرهایی از $B(X, Y)$ ، به ترتیب شامل همه عملگرهای از بعد متناهی و عملگرهای فشرده باشند.

در حالتی که $X = Y$ ، $B(X, Y)$ ، $B_{\bullet}(X, Y)$ و $B_{\bullet\bullet}(X, Y)$ را به ترتیب با $B(X)$ ، $B_{\bullet}(X)$ و $B_{\bullet\bullet}(X)$ نشان می‌دهیم.

۵-۱-۱ مثال

فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. در این صورت عملگر صفر $o : X \rightarrow Y$ فشرده است.

۶-۱-۱ مثال

فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. اگر $\dim X < \infty$ آنگاه عملگر همانی روی X ، فشرده است.

در ادامه این بخش مثال‌های بیشتری از عملگرهای فشرده بیان می‌کنیم.

می‌دانیم در عملگرهای خطی، کراندار و پیوستگی معادلند. در لم زیر رابطه بین فشردگی و کراندار را می‌بینیم.

۷-۱-۱ لم

فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. در این صورت هر عملگر فشرده $T : X \rightarrow Y$ کراندار است.

اثبات. برای اثبات کرانداري T کافی است نشان دهیم که تصویر گوی یک

$$\text{ball } X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

کراندار است. چون T فشرده است پس $\overline{T(\text{ball } X)}$ فشرده است و چون هر زیرمجموعه فشرده از یک فضای متری کراندار است بنابراین $\overline{T(\text{ball } X)}$ کراندار است. لذا $\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| < \infty$ یعنی T کراندار است. $\square$

۸-۱-۱ نتیجه

هر عملگر فشرده، پیوسته است.

در اینجا به یادآوری از دو مفهوم از آنالیز ۱ می‌پردازیم که از آن‌ها در اثبات لم‌ها و قضایای بعد، مکرر استفاده می‌نماییم.

۹-۱-۱ یادآوری

یک زیرمجموعه M از فضای متریک X ، فشرده است اگر هر دنباله در M دارای زیر دنباله همگرایی باشد به طوری که حد آن در M است.

۱۰-۱-۱ یادآوری

فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد به طوری که گوی یکه بسته، فشرده باشد. در این صورت X از بعد متناهی است.

۱۱-۱-۱ لم

اگر $\dim X = \infty$ ، آنگاه عملگر همانی $I : X \rightarrow X$ فشرده نیست.

اثبات. گوی یکه بسته $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ کراندار است. هرگاه M فشرده باشد لازم است که X با بعد متناهی باشد بنابراین M فشرده نیست یعنی $I(M) = M = \overline{M}$ فشرده نیست لذا طبق تعریف، I فشرده نیست. $\square$

با توجه به اهمیت فشردگی، استفاده از تعریف این مفهوم در همه موارد ساده به نظر نمی‌رسد بنابراین لازم است معیاری برای فشردگی آورده شود.

۱۲-۱-۱ قضیه (۱ معیار فشردگی)

فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار و $T : X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. T فشرده است اگر و فقط اگر هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در X دارای یک زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_k}\}$ در Y همگرا باشد.

اثبات. هرگاه T فشرده و $\{x_n\}$ کراندار باشد آنگاه بستانار $\{Tx_n\}$ در Y فشرده است و لذا دارای یک زیر دنباله همگرا است.

برعکس: فرض کنیم هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}$ است به طوری که $\{Tx_{n_k}\}$ در Y همگراست. یک زیر مجموعه کراندار $B \subset X$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در $T(B)$ باشد در این صورت $\{x_n\} \in B$ وجود دارد به طوری که $y_n = Tx_n$ و $\{x_n\}$ کراندار است زیرا B کراندار است. حال بنا به فرض، $\{Tx_n\}$ شامل یک زیر دنباله همگراست لذا $\overline{T(B)}$ فشرده است. $\square$

فشرده بودن عملگر انتگرال نیز جالب است.

۱-۱۳ مثال

فضای خطی $X = C[a, b]$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم K تابعی پیوسته روی $[a, b] \times [a, b]$ باشد. عملگر $T \in B(X)$ را با ضابطه

$$Tf(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt, \quad f \in C[a, b], \quad s \in [a, b]$$

در نظر می‌گیریم. T را عملگر انتگرال فرد هولم^۱ با هسته K نامند. نشان می‌دهیم T فشرده است.

اثبات. برای اثبات از معیار فشردگی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار در $C[a, b]$ باشد. قرار دهید $g_n = Tf_n$. در این صورت $\|g_n\| \leq \|T\|\|f_n\|$ لذا $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز کراندار است.

اگر نشان دهیم که $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ همپیوسته است، آنگاه T فشرده خواهد بود. زیرا مطابق قضیه آرزا-آسکولی، $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک زیر دنباله همگرا مانند $\{g_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ خواهد داشت و در نتیجه $\{Tf_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ همگرا است.

چون K روی $[a, b] \times [a, b]$ پیوسته یکنواخت است، پس برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $s_1, s_2 \in [a, b]$ و هر $t \in [a, b]$

$$|s_1 - s_2| < \delta \implies |K(s_1, t) - K(s_2, t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)M}$$

که در آن $M = \sup_n \|f_n\|$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و به ازای هر $s_1, s_2 \in [a, b]$

$$|s_1 - s_2| < \delta \implies |g_n(s_1) - g_n(s_2)| = \left| \int_a^b (K(s_1, t) - K(s_2, t)) f_n(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

و این یعنی $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ همپیوسته است. $\square$

۱-۱-۱۴ گزاره

مجموع $T_1 + T_2$ از دو عملگر فشرده از X به Y ، عملگری فشرده است. به طور مشابه αT_1 برای هر اسکالر α .

اثبات. فرض کنید دو عملگر T_1 و T_2 فشرده باشند. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در X باشد. از آنجا که T_1 و T_2 فشرده اند پس زیر دنباله‌های $\{x_{n_k}\}$ و $\{x_{n_j}\}$ از $\{x_n\}$ موجودند به طوری که $\{T_1 x_{n_j}\}$ و $\{T_2 x_{n_k}\}$ در Y همگرا هستند. قرار دهید $\{n_m\} := \{n_j\} \cap \{n_k\}$ در این صورت $\{(T_1 + T_2)x_{n_m}\}$ در Y همگراست و لذا $T_1 + T_2$ فشرده است. فشرده بودن αT_1 به طور مشابه اثبات می‌شود. $\square$

۱-۱-۱۵ نتیجه

مجموعه عملگرهای فشرده از X به Y تشکیل یک فضای برداری می‌دهد. لم زیر به ترکیب یک عملگر فشرده و یک عملگر کراندار می‌پردازد. این ترکیب همواره فشرده و در بررسی خواص اساسی عملگرهای فشرده کاربرد دارد.

۱-۱-۱۶ لم

فرض کنید X یک فضای نرم دار، $T : X \rightarrow X$ یک عملگر فشرده و $S : X \rightarrow X$ یک عملگر خطی کراندار باشد. در این صورت ST و TS فشرده‌اند. اثبات. فرض کنید $B \subset X$ مجموعه‌ای کراندار باشد. چون S عملگر کراندار است لذا $S(B)$ کراندار و بنا به فشردگی T ، $TS(B) = T(S(B))$ فشرده نسبی است پس TS فشرده است.

حال اگر $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار در X باشد آنگاه $\{Tx_n\}$ یک زیر دنباله همگرا مانند $\{Tx_{n_k}\}$ دارد. بنابراین $\{STx_{n_k}\}$ همگرا و در نتیجه ST فشرده است. $\square$

۱-۱-۱۷ نتیجه

فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت مجموعه همه عملگرهای فشرده روی X ، $(B_*(X))$ ، ایده‌آلی از $B(X)$ است.

۱-۱-۱۸ قضیه

فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار و $T : X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. در این صورت

الف) اگر T کراندار و $\dim T(X) < \infty$ ، آنگاه عملگر T فشرده است.

(ب) اگر $\dim X < \infty$ ، آنگاه عملگر T فشرده است.

اثبات. (الف) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله کراندار در X باشد. در این صورت نامساوی $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$ نشان می‌دهد که $\{Tx_n\}$ نیز دنباله‌ای کراندار است. حال چون $\dim T(X) < \infty$ ، $\{Tx_n\}$ فشرده نسبی است. این نشان می‌دهد که $\{Tx_n\}$ دارای یک زیردنباله همگراست. چون $\{x_n\}$ دلخواه بود بنابه معیار فشردگی، T فشرده است.

(ب) با توجه به اینکه $\dim X < \infty$ ، هر عملگر خطی بر X کراندار است و

$$\dim T(X) < \dim X < \infty.$$

□

لذا (الف) نتیجه می‌دهد که T فشرده است.

۱-۱-۱۹ نتیجه

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. در این صورت

$$B_{\bullet\bullet}(X, Y) \subseteq B_{\bullet}(X, Y).$$

خواصی که در همگرایی از جملات دنباله به حد دنباله منتقل می‌شوند دارای اهمیت‌اند. در قضیه زیر خواهیم دید که فشردگی یکی از این خواص است.

۱-۱-۲۰ قضیه

فرض کنید $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای فشرده از یک فضای نرمدار X به یک فضای باناخ Y باشد به طوری که $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ (همگرایی یکنواخت). در این صورت عملگر حدی T فشرده است.

اثبات. برای اثبات از معیار فشردگی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\{x_m\}$ دنباله‌ای کراندار در X باشد. چون T_1 فشرده است لذا $\{x_m\}$ دارای زیر دنباله $\{x_{1,m}\}$ است به قسمی که $\{T_1 x_{1,m}\}$ همگراست. حال چون $\{x_{1,m}\}$ خود به‌عنوان زیر دنباله $\{x_m\}$ کراندار و T_2 فشرده است، $\{x_{1,m}\}$ دارای زیر دنباله $\{x_{2,m}\}$ است به قسمی که $\{T_2 x_{2,m}\}$ همگراست. با ادامه این روش، دنباله $\{y_m\} = \{x_{m,m}\}$ از $\{x_n\}$ حاصل می‌شود به طوری که $\{T_n y_m\}$ همگراست. چون $\{x_m\}$ را کراندار فرض کردیم، عددی مانند c موجود است به طوری که به ازای هر m ، $\|x_m\| \leq c$ لذا $\|y_m\| \leq c$. حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. چون $\|T_m - T\| \rightarrow 0$ لذا $n = p$ وجود دارد که $\|T - T_p\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. همچنین از آنجا که $\{T_p y_m\}$ کوشی است لذا N ای موجود است که

$$\|T_p y_j - T_p y_k\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad j, k > N.$$

برای چنین $j, k > N$ داریم

$$\begin{aligned}\|Ty_j - Ty_k\| &\leq \|Ty_j - T_p y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| + \|T_p y_k - Ty_k\| \\ &\leq \|T - T_p\| \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\| \|y_k\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c = \varepsilon.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\{Ty_m\}$ کوشی و در نتیجه از باناخ بودن Y ، همگراست. حال چون $\{y_m\}$ به عنوان زیر دنباله‌ای از دنباله دلخواه $\{x_m\}$ مطرح بوده لذا T فشرد است. $\square$

۱-۱-۲۱ نتیجه

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در این صورت مجموعه همه عملگرهای فشرده روی X ، یک ایده‌آل بسته از $B(X)$ است.

همچنین متذکر می‌شویم که همگرایی در قضیه (۱-۱-۲۰)، همگرایی یکنواخت بوده که اگر این همگرایی به همگرایی نقطه به نقطه تضعیف شود، نتیجه برقرار نخواهد بود. به مثال زیر توجه کنید.

۱-۱-۲۲ مثال

عملگر $T_n : l^2 \rightarrow l^2$ را با ضابطه $T_n x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ در نظر بگیرید که در آن $x = (\xi_i) \in l^2$. چون T_n خطی و کراندار است با توجه به قسمت (الف) قضیه (۱-۱-۱۸)، فشرده است. همچنین واضح است که به ازای هر x ، $T_n x \rightarrow x = Ix$ در حالی که با توجه به لم ۱-۱-۱۱، عملگر I فشرده نیست زیرا $\dim l^2 = \infty$.

۱-۱-۲۳ مثال

عملگر $T : l^2 \rightarrow l^2$ که با ضابطه $T(\xi_i) = (\eta_i)$

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{i} \quad i = 1, 2, \dots$$

تعریف می‌شود، فشرده است.

اثبات. T خطی است. همچنین به راحتی قابل مشاهده است که اگر $x = (\xi_i) \in l^2$ آنگاه $y = (\eta_i) \in l^2$ حال عملگر $T_n : l^2 \rightarrow l^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_n(x) = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots \right).$$

T_n خطی و کراندار و لذا با استفاده از قضیه (۱-۱-۱۸)، فشرده می‌باشد. همچنین

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\eta_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} |\xi_i|^2$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}.$$

از طرفین روی x های با نرم ۱، سوپریمم می گیریم. داریم

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}.$$

لذا $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. حال با توجه به قضیه (۱-۱-۲۰)، عملگر T فشرده است. $\square$

ارتباط میان ایده آل عملگرهای فشرده و عملگرهای از بعد متناهی نیز جالب است. با توجه به قضایای (۱-۱-۱۸) و (۱-۱-۲۰)، در حالتی که X یک فضای نرمدار و Y یک فضای باناخ باشد. داریم:

$$\overline{B_{\infty}(X, Y)} \subset B_*(X, Y).$$

سوالی که مطرح می شود این است که آیا عکس این شمول در هر فضای باناخ برقرار است؟ به عبارت دیگر، آیا مجموعه عملگرهای از بعد متناهی در مجموعه عملگرهای فشرده، چگال اند؟

مواردی وجود دارد که نشان می دهد این مطلب در حالت کلی برقرار نیست و این سوال که چه فضاهای باناخی دارای چنین خاصیتی هستند، هنوز پاسخی کامل نیافته است. اما در حالات خاص به این سوال پاسخ داده شده است. به عنوان مثال، اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد آنگاه $\overline{B_{\infty}(\mathcal{H})} = B_*(\mathcal{H})$.

۱-۱-۲۴ قضیه

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و T یک عملگر فشرده روی $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت دنباله ای از عملگرهای از بعد متناهی $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارند به طوری که

$$\|T - F_n\| \rightarrow 0.$$

اثبات. پایه متعامد یک $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ را برای $\mathcal{H}$ در نظر می گیریم. فرض کنید p_n عملگر تصویر روی زیرفضای تولید شده توسط $\{e_j\}_{j=1}^n$ و $Q_n = I - p_n$ باشد. ثابت می کنیم هرگاه $m \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\|Q_n T\| \rightarrow 0$.

(فرض خلف): فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت دنباله $\{f_n\}$ با $\|f_n\| = 1$ و $c > 0$ وجود دارد که

$$\|Q_n T f_n\| \geq c > 0.$$

بنابنه فشردگی T ، دنباله $\{T f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای یک زیردنباله همگراست مثلاً $T f_n \rightarrow g$. حال

چون

$$\|Q_n g\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle g, e_j \rangle|^2$$

به راحتی قابل مشاهده است که وقتی $n \rightarrow \infty$ آنگاه $Q_n g \rightarrow 0$ و این تناقض است، زیرا

$$Q_n g = Q_n(g - T f_n) + Q_n T f_n$$

در نتیجه $\|Q_n T\| \rightarrow 0$. با قرار دادن $F_n = p_n T$ نتیجه حاصل می شود. $\square$

۱-۱-۲۵ نتیجه

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت ایده آل عملگرهای فشرده روی $\mathcal{H}$ ، بستار ایده آل عملگرهای با بعد متناهی روی $\mathcal{H}$ است. به عبارت دیگر یک عملگر خطی، فشرده است اگر و فقط اگر حد دنباله ای از عملگرهای با بعد متناهی باشد.

یکی دیگر از خواص جالب عملگرهای فشرده این است که دنباله های همگرای ضعیف را به دنباله های همگرای یکنواخت می نگارد.

۱-۱-۲۶ یادآوری

فرض کنید X یک فضای نرم دار و X^* دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله X^* روی X ، یعنی ضعیف ترین توپولوژی τ روی X بقسمی که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به τ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X نامیده و آن را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می دهیم. اگر دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X نسبت به توپولوژی ضعیف همگرا به x باشد می نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$. طبق قضیه ای در آنالیز تابعی ثابت می شود که اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در X باشد آنگاه $x_n \xrightarrow{w} 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\Lambda \in X^*$ داشته باشیم $\Lambda x_n \rightarrow 0$.

۱-۱-۲۷ یادآوری

فرض کنید X یک فضای نرم دار و X^* دوگان آن باشد. توپولوژی $\sigma(X^*, \phi(X))$ یعنی کوچک ترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن، برای هر $x \in X$ $\phi(x)$ پیوسته می گردد را با $\sigma(X^*, X)$ نشان داده و آن را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می نامیم. (منظور از ϕ نگاشت جادهی متعارف از X به X^{**} است). طبق قضیه ای در آنالیز تابعی ثابت می شود که اگر $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در X^* باشد آنگاه $\Lambda_n \xrightarrow{w^*} \Lambda$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\Lambda_n x \rightarrow \Lambda x$.

۱-۲۸ تعریف

فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار و $T : X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. عملگر T به طور کامل پیوسته^۱ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که $x_n \xrightarrow{w} x$ آنگاه $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$.

۱-۲۹ قضیه

فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار و $T : X \rightarrow Y$ یک عملگر فشرده باشد. در این صورت T به طور کامل پیوسته است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در X باشد به طوری که $x_n \xrightarrow{w} x$. قرار می‌دهیم $y_n = Tx_n$ و $y = Tx$. ابتدا نشان می‌دهیم $y_n \xrightarrow{w} y$. فرض کنید g تابعی خطی و کراندار بر Y باشد. تابع f را بر X با ضابطه $f(z) = g(Tz)$ ، تعریف می‌کنیم. f خطی و کراندار است زیرا T را فشرده فرض کرده‌ایم. داریم:

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\| \|Tz\| \leq \|g\| \|T\| \|z\|.$$

تعریف $x_n \xrightarrow{w} x$ ایجاب می‌کند که $f(x_n) \rightarrow f(x)$. لذا بنا به تعریف g ,

$$g(Tx_n) \rightarrow g(Tx)$$

یعنی $g(y_n) \rightarrow g(y)$. حال چون g دلخواه بود نتیجه می‌شود که

$$y_n \xrightarrow{w} y. \quad (۱-۱)$$

اکنون همگرایی در نرم را با برهان خلف ثابت می‌کنیم.

(فرض خلف) فرض کنید $\|y_n - y\| \not\rightarrow 0$. در این صورت $\{y_n\}$ دارای یک زیردنباله $\{y_{nk}\}$ است به طوری که

$$\exists \eta > 0 \quad \|y_{nk} - y\| \geq \eta. \quad (۲-۱)$$

چون $\{x_n\}$ همگرای ضعیف است لذا $\{x_n\}$ کراندار و در نتیجه $\{x_{nk}\}$ نیز کراندار است. حال چون T فشرده فرض شده، $\{Tx_{nk}\}$ دارای یک زیر دنباله همگراست. این زیر دنباله را $\{\tilde{y}_i\}$ می‌نامیم. فرض کنید $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}$ پس $\tilde{y}_i \xrightarrow{w} \tilde{y}$. در نتیجه با توجه به (۱-۱)، $\tilde{y} = y$ و در نتیجه

$$\|\tilde{y}_i - y\| \rightarrow 0.$$