



نظریہ کاتگوری

(کارشناسی ارشد ریاضی محض، گرایش جبر و آنالیز)

دکتر احمد خاکساری سیروس جهان پناه باوریانی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

نه	پیشگفتار
۱	فصل اول: کاتگوری چیست؟
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۱	مقدمه
۱۰	خلاصه فصل اول
۱۰	خودآزمایی تشریحی فصل اول
۱۵	فصل دوم: اشیاء و مورفیسم‌های خاص
۱۵	هدف کلی
۱۵	هدف‌های یادگیری
۱۶	مقدمه
۳۱	خلاصه فصل دوم
۳۱	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۳۷	فصل سوم: ساختن‌های همگانی
۳۷	هدف کلی
۳۷	هدف‌های یادگیری
۳۷	مقدمه
۵۸	خلاصه فصل سوم
۵۸	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
۶۳	فصل چهارم: فاکتورگیری از مورفیسم‌ها
۶۳	هدف کلی

۶۳	هدف‌های یادگیری
۶۳	مقدمه
۸۳	خلاصه فصل چهارم
۸۴	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۸۷	فصل پنجم: ساختارمند کردن مجموعه‌های مورفیزم
۸۷	هدف کلی
۸۷	هدف‌های یادگیری
۸۷	مقدمه
۱۰۳	خلاصه فصل پنجم
۱۰۳	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۱۰۷	فصل ششم: تابع عملگرها
۱۰۷	هدف کلی
۱۰۷	هدف‌های یادگیری
۱۰۷	مقدمه
۱۳۱	خلاصه فصل ششم
۱۳۱	خودآزمایی تشریحی فصل ششم
۱۳۷	فصل هفتم: کاتگوری‌های هم‌ارز
۱۳۷	هدف کلی
۱۳۷	هدف‌های یادگیری
۱۳۷	مقدمه
۱۵۱	خلاصه فصل هفتم
۱۵۱	خودآزمایی تشریحی فصل هفتم
۱۵۵	فصل هشتم: تابع عملگرهای نمایش‌پذیر و الحاقی
۱۵۵	هدف کلی
۱۵۵	هدف‌های یادگیری
۱۵۵	مقدمه
۱۷۴	خلاصه فصل هشتم
۱۷۴	خودآزمایی تشریحی فصل هشتم
۱۷۷	فصل نهم: حل خودآزمایی‌های تشریحی
۱۷۷	هدف کلی
۲۲۱	واژه‌نامه
۲۲۳	کتاب‌نامه

پیشگفتار

در اوایل دهه ۱۹۴۰ میلادی، ایلنبرگ^۱ و مک‌لین^۲ بنیانگذاران نظریه کاتگوری، مفاهیم تابع عملگر و تبدیل طبیعی را معرفی کردند تا توضیح دهند منظور از ماهیت طبیعی بعضی از یکرختی‌ها مثلاً یکرختی بین فضای بُرداری با بعد متناهی و دوگان آن چیست؟

میچل^۳ در سال ۱۹۶۵ از تحولات عظیمی که این نظریه ایجاد خواهد کرد سخن گفت. او در مقدمه کتابش چنین می‌گوید: «بعضی از سفسطه‌گران در پی آنند که این نظریه را همانند برخی از انواع موسیقی کلاسیک بی‌مقدار جلوه دهند». [هرچند که این ادعا درست به نظر می‌رسد اما ادعای اول دیگر پذیرفتنی نیست] (به نظر می‌رسد که این جمله گنگ و نامفهوم است چرا که مرجع ضمیر این ادعا مشخص نیست). به هر حال این واقعیتی است که برخی به دلیل ماهیت تجربیدی کاتگوری‌ها از آن دوری می‌کنند. هرچند کتاب‌های نسبتاً جامعی در این باره نوشته شده‌است اما نیاز است که خواننده با دانش فراوانی به سراغ این گونه کتاب‌ها برود. از این رو هدف کتاب حاضر آن است که یک درس مقدماتی در پایان دوره کارشناسی یا شروع دوره کارشناسی ارشد نوشته شود به گونه‌ای که در بیست جلسه ارائه شود و مطالب آن ماهیت کاتگوری‌ها را به دانشجویان معرفی کند به طوری که کتاب نوعی خودآموز باشد که دانشجو بتواند بدون کمک استاد آن را مطالعه کند. بر این اساس علاوه بر مثال‌های متعددی که در ضمن هر تعریف و قضیه

1. Ellenberg
2. MacLaine
3. Mitchell

گفته شده است تمرین‌هایی در آخر هر فصل ارائه شده است. همچنین در فصل نهم کتاب تعدادی از این تمرین‌ها حل شده است، که مفاهیم اولیه آن جزء مباحث اصلی کتاب بوده تا انگیزه‌ای برای مطالعه بهتر دانشجویان باشد.

در پایان مؤلفان کتاب بر خود لازم می‌دانند از ویراستار و داور محترم کتاب که رهنمودهای ایشان در به ثمر رساندن کتاب مؤثر بوده است تشکر و قدردانی کنند. همچنین از مدیر و کارشناسان محترم تدوین خصوصاً سرکار خانم معدلت برای پیگیری‌های بی‌دریغشان در تمامی مراحل اداری سپاسگزاریم.

دکتر احمد خاکساری، سیروس جهان‌پناه باوریانی

پاییز ۱۳۹۵

a-khaksari@pnu.ac.ir, mathjahan@yahoo.com

فصل اول

کاتگوری چیست؟

هدف کلی

آشنایی دانشجویان با مفهوم کاتگوری و ارائه مثال‌های گوناگون به گونه‌ای است که بتوانند این مفهوم را بدون هیچ ابهامی درک نمایند.

هدف‌های یادگیری

دانشجویان بعد از مطالعه این فصل باید بتوانند:

۱. با تعریف کاتگوری و زیرکاتگوری آشنا شوند.
۲. با انواع کاتگوری‌های خاص نظیر کاتگوری کما، کاتگوری پیکان و کاتگوری لبریز آشنا شوند.
۳. مثال‌های متنوع از انواع کاتگوری‌ها را ارائه دهند.
۴. مسائل و تمرین‌های مربوط به این فصل را به راحتی حل کنند.

مقدمه

در قرن گذشته ریاضیات با ابداع نظریه مجموعه‌ها دگرگون شده است. جبر مجرد، توپولوژی، نظریه احتمال، نظریه توابع و... کاملاً وابسته به این مبنای اساسی هستند. در بررسی مباحثی از این قبیل، باید با رویکرد شهودی یا «عامیانه» به نظریه مجموعه‌ها رضایت داد و از بررسی دقیق و اصل موضوع مطلب صرف نظر کرد. خواننده آگاه است

که رویکرد عامیانه با ضعف‌هایی همراه است که برای دوری از موارد تناقض‌نما، نیاز به بررسی دقیق‌تر مبانی آن است. مثلاً اگر بخواهیم به عنوان مجموعه «گردایه» U از همه مجموعه‌ها را در نظر بگیریم، در این صورت زیرمجموعه $V = \{X \in U; X \notin X\}$ دارای خاصیت $V \in V$ است اگر و تنها اگر $V \notin V$ (تناقض‌نمای راسل)^۱. آنچه در پی می‌آید، گاهی گردایه‌های بزرگی همچون «همه مجموعه‌ها»، «همه گروه‌ها»، «همه مورفیس‌های گروه‌ها» و... در نظر گرفته خواهد شد، مواردی هستند که آن‌ها را نمی‌توان مجموعه به شمار آورد. رویکرد عامیانه خود، به نظریه مجموعه‌ها را این گونه گسترش می‌دهیم که همه «گردایه‌های» اشیاء را به عنوان رده‌ها در نظر گرفته و به صورت شهودی، یک مجموعه را یک رده «کوچک» در نظر می‌گیریم. با نگاه اصول موضوعی، این همان رویکردی است که رسماً در سیستم نویمان^۲ - برنایس^۳، گودل^۴ در نظر گرفته شده است، در اینجا بین مجموعه و رده، تمایز قائل می‌شویم. مجموعه‌ها ممکن است اجزای رده‌ها باشند، اما عکس این مطلب درست نیست و یک رده را همگانی فرض می‌کنیم که همه مجموعه‌ها به آن تعلق دارند (اگرچه این رده، خودش مجموعه نیست تا دیگر چیزی به نام تناقض‌نمای راسل نداشته باشیم). با این تعمیم می‌توان مفهوم کاتگوری را توضیح داد. این مفهوم کمی پیچیده به نظر می‌رسد بنابراین مثال‌هایی ارائه خواهد شد تا آن را بیشتر تشریح کند.

تعریف ۱-۱

کاتگوری، رده C از اشیاء است، به گونه‌ای که:

۱. به ازای هر زوج اشیاء X و Y از C ، مجموعه $MorC(X, Y)$ وجود دارد که به آن مجموعه مورفیس‌ها از X به Y می‌گویند. $MorC(X, Y)$ از $MorC(X', Y')$ متمایز است، مگر اینکه $X = X'$ و $Y = Y'$ که در این صورت، با هم یکی خواهند بود.
۲. به ازای هر سه شیء X و Y و Z از C ، نگاشت

$$MorC(X, Y) \times MorC(Y, Z) \rightarrow MorC(X, Z)$$

وجود دارد که با $f \circ g \mapsto (g, f)$ بیان می‌شود و دارای خواص زیر است:

1. Russel's paradox
2. Neumann
3. Bernays
4. Gödel

۳ کاتگوری چیست؟

(a) به ازای هر شیء X ، مورفیزم $id_X \in MorC(X, X)$ وجود دارد که برای اعضای $MorC(X, Y)$ تحت عمل دوتایی $\circ$ همانی از راست و برای اعضای $MorC(Y, X)$ تحت عمل دوتایی $\circ$ همانی از چپ هستند.

(b) $\circ$ شرکت پذیر است؛ به این مفهوم که اگر ترکیب های $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ تعریف شده باشند، این ترکیب ها با هم مساویند.

توجه شود که با وجود استفاده از نماد $\circ$ در تعریف لازم نیست مجموعه های مورفیزم $MorC(X, Y)$ مجموعه هایی از نگاشت ها باشند. با این وجود اعضای $MorC(X, Y)$ را به صورتی می نویسیم که گویی نگاشت هستند؛ یعنی از نماد $f: X \rightarrow Y$ استفاده خواهیم کرد. به این دلیل مورفیزم اغلب پیکان نیز نامیده می شود. همان گونه که خواهیم دید، این نماد باعث رخ دادن اشتباهی نخواهد شد. مورفیزم $id_X: X \rightarrow X$ مورفیزم همانی روی شیء X نامیده می شود. توجه کنید که این مورفیزم نسبت به خاصیت (a) یکتا است.

تعریف فوق نشان می دهد که یک کاتگوری را می توان اساساً با مشخص کردن سه چیز تعریف کرد: (۱) رده اشیا، (۲) مجموعه های مورفیزم و (۳) چگونگی ترکیب مورفیزم ها. در عمل، وقتی مورفیزم ها و عمل ترکیب مورفیزم ها بدیهی باشند، معمولاً فقط به اشیا آن اشاره خواهد شد.

مثال ۱-۱ کاتگوری Set (مجموعه ها)

در اینجا رده اشیا از همه مجموعه ها تشکیل می شود، مورفیزم ها نگاشت های معمولی بین مجموعه ها است و $\circ$ ترکیب معمولی نگاشت ها است. مورفیزم های همانی، نگاشت های همانی معمولی هستند. به همین ترتیب می توانیم کاتگوری $FSet$ مجموعه های متناهی را تشکیل دهیم.

مثال ۲-۱ کاتگوری Grp (گروه ها)

در اینجا رده اشیا از همه گروه ها تشکیل شده است. مورفیزم ها، مورفیزم های (هم ریختی های) معمولی گروه بوده و $\circ$ ترکیب معمول نگاشت ها است. به همین ترتیب می توان کاتگوری $FGrp$ گروه های متناهی را ساخت.

مثال ۱-۳ کاتگوری Ab (گروه‌های آبلی)

مثال قبل با این تفاوت که اشیاء گروه‌های آبلی هستند.

مثال ۱-۴ کاتگوری $Ring$ (حلقه‌ها)

در اینجا رده اشیاء از همه حلقه‌ها تشکیل شده‌اند. مورفیزم‌ها، مورفیزم‌های (هم‌ریختی‌های) معمولی حلقه بوده و $\circ$ ترکیب معمولی نگاشت‌ها است.

مثال ۱-۵ کاتگوری $Ring_1$ (حلقه‌های یک دار)

در اینجا رده اشیاء از همه حلقه‌های ۱ دار تشکیل شده‌است، مورفیزم‌ها، مورفیزم‌های (هم‌ریختی‌های) حلقه حفظ‌کننده ۱ بوده و $\circ$ ترکیب معمولی نگاشت‌ها است.

مثال ۱-۶ کاتگوری Top (فضاهای توپولوژیک)

در اینجا رده اشیاء از همه فضاهای توپولوژیک تشکیل شده‌است، مورفیزم‌ها نگاشت‌های پیوسته‌اند (یعنی نگاشت‌هایی که برای آنها، تصویر معکوس یک مجموعه باز، باز است) و $\circ$ ترکیب معمولی نگاشت‌ها است.

مثال ۱-۷ کاتگوری $FVect$ (فضاهای برداری روی میدان F)

در اینجا اشیاء فضاهای برداری و مورفیزم‌ها تبدیل‌های خطی هستند.

مثال ۱-۸ کاتگوری $RMod$ از R -مدول‌های (چپ)

این کاتگوری یکی از مهم‌ترین کاتگوری‌هایی است که با آن سروکار داریم. یک R -مدول چپ را می‌توان اساساً همانند یک فضای برداری روی یک میدان دانست با این تفاوت که اسکالر‌ها به جای اینکه متعلق به میدان F باشند، به حلقه یک‌دار R متعلق هستند. اگر R حلقه‌ای ۱ دار باشد، آن‌گاه هر R -مدول چپ یک گروه آبلی جمعی M همراه با نگاشت $R \times M \longrightarrow M$ است (که گاهی یک عمل R روی M نامیده می‌شود) و با $(r, m) \mapsto rm$ نشان داده می‌شود به گونه‌ای که:

کاتگوری چیست؟ ۵

- (۱) $(\forall x \in M)(\forall r \in R) \quad r(x + y) = rx + ry;$
- (۲) $(\forall x \in M)(\forall r, s \in R) \quad (r + s)x = rx + sx;$
- (۳) $(\forall x \in M)(\forall r, s \in R) \quad (rs)x = r(sx);$
- (۴) $(\forall x \in M) \quad 1_R x = x.$

صفت «چپ» به این مفهوم است که اسکالرها (اعضای R) در سمت چپ اعضای M نوشته می‌شوند. بنابراین اشیاء R Mod $-R$ ، مدول‌های چپ و مورفیزم‌ها، $-R$ مورفیزم‌ها (همریختی‌های مدولی) هستند؛ (نگاشت‌هایی که جمع و عمل ضرب و اسکالرها را حفظ می‌کنند، این دقیقاً همان کاری است که یک تبدیل خطی انجام می‌دهد) و $\circ$ ترکیب معمولی نگاشت‌ها است.

مثال ۹-۱ کاتگوری Sgp (نیم گروه‌ها)

مثال ۱۰-۱ کاتگوری Mon مونوئیدها (نیم گروه‌های یک دار)

در اینجا مورفیزم‌ها ۱ را حفظ می‌کنند.

مثال ۱۱-۱ کاتگوری Ord (مجموعه‌های مرتب)

در اینجا اشیاء، مجموعه‌هایی هستند که روی آن‌ها ترتیب $\leq$ (یعنی رابطه‌ای که انعکاسی، پادمتقارن و متعدی است) تعریف شده است و مورفیزم‌ها نگاشت‌های $f: A \longrightarrow B$ هستند که ترتیب را حفظ می‌کنند، به این معنا که اگر در A ، $x \leq y$ باشد، آن‌گاه در B ، $f(x) \leq f(y)$.

مثال ۱۲-۱

توجه شود مورفیزم‌های یک کاتگوری الزامی ندارد که نگاشت باشند، مجموعه مرتب $(E, \leq)$ را در نظر بگیرید و کاتگوری E را به صورت زیر بسازید؛ به عنوان اشیاء E ، اعضای E را انتخاب کنید سپس به ازای $a, b \in E$ تعریف کنید.

$$MorE(a, b) = \begin{cases} \{(a, b)\} & \text{اگر } a \leq b \\ \emptyset & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

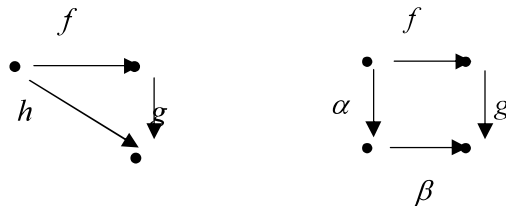
برای تعریف ترکیب: اگر $\alpha \in \text{Mor}E(a, b)$ و $\beta \in \text{Mor}E(b, c)$ ، آن‌گاه این مجموعه‌ها تهی نیستند و این فقط زمانی اتفاق می‌افتد که $a \leq b$ بوده و $b \leq c$. بنابراین با توجه به متعدی بودن رابطه که خواهیم داشت $a \leq c$. در نتیجه $\text{Mor}E(a, c) \neq \emptyset$. بنابراین $\beta \circ \alpha$ را عضو یکتای (a, c) از $\text{Mor}E(a, c)$ تعریف می‌کنیم. انعکاسی بودن $\leq$ وجود اعضای همانی را نتیجه می‌دهد. داریم $\text{id}_a = (a, a)$. حال دیده می‌شود که E یک کاتگوری است.

مثال ۱-۱۳

به یک مجموعه مرتب L به طوری که هر زیرمجموعه دو عضوی $\{x, y\}$ دارای سوپریمم^۱ $x \vee y$ و اینفیمم^۲ $x \wedge y$ باشد، شبکه^۳ گفته می‌شود. کاتگوری Lat (کاتگوری شبکه‌ها) را می‌توان با انتخاب کردن شبکه‌ها به عنوان اشیاء و نگاشت‌هایی که Sup و Inf های زیرمجموعه‌های ناتهی متناهی را حفظ می‌کنند، به عنوان مورفیزم‌ها تشکیل داد.

مثال ۱-۱۴

یک شبکه کامل، مجموعه‌ای مرتب است که در آن هر زیرمجموعه ناتهی یک Sup و یک inf دارد. کاتگوری Clat (کاتگوری شبکه‌های کامل) را این گونه می‌توان تشکیل داد: شبکه‌های کامل را به عنوان اشیاء و نگاشت‌هایی که Sup و inf زیرمجموعه‌های ناتهی دلخواه را حفظ می‌کنند، به عنوان مورفیزم انتخاب می‌کنیم. در کاتگوری مفروض C ، نمودار اشیاء و مورفیزم‌ها جابه‌جایی نامیده می‌شوند، اگر ترکیب همه مورفیزم‌ها از یک شیء مبدأ مفروض به یک شیء مقصد مفروض، با هم برابر باشند. مثلاً نمودارهای



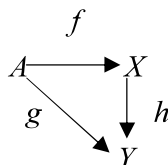
جابه‌جایی هستند اگر و تنها اگر $h = g \circ f$ و $\beta \circ \alpha = g \circ f$.

1. Supremum
2. Infimum
3. Lattice

مثال ۱-۱۵

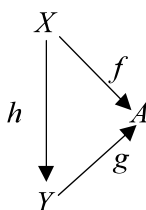
فرض کنید کاتگوری C داده شده و A یک شیء ثابت آن باشد. می‌توان کاتگوری $A \rightarrow$ را به صورت زیر ساخت:

به عنوان اشیاء، مورفیزم‌های C به شکل $A \xrightarrow{f} X$ را انتخاب کرده سپس برای مجموعه مورفیزم‌های از $A \xrightarrow{f} X$ به $A \xrightarrow{g} Y$ ، مورفیزم‌های h در C را انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که نمودار



جابه‌جایی باشد. به همین ترتیب، می‌توانیم کاتگوری $A \rightarrow$ را به صورت زیر تشکیل دهیم:

به عنوان اشیاء مورفیزم‌های C به شکل $X \xrightarrow{f} A$ و به عنوان مجموعه مورفیزم‌ها از $X \xrightarrow{f} A$ به $Y \xrightarrow{g} A$ ، مورفیزم‌های h در C را انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که



جابه‌جایی باشد. این کاتگوری‌ها اغلب کاتگوری‌های کُما نامیده می‌شوند. اولی از شیء A و دومی به شیء A .

مثال ۱-۱۶

فرض کنید کاتگوری C داده شده است. در این صورت می‌توان یک کاتگوری جدید ساخت به طوری که به عنوان اشیاء، مورفیزم‌های C و به عنوان مجموعه مورفیزم‌ها از

انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که نمودار

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{به} \quad C \xrightarrow{g} D, \quad \text{زوج‌های } \alpha \text{ و } \beta \text{ از مورفیزم‌های متعلق به } C \text{ را}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

جابه‌جایی باشد. ترکیب مورفیزم‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' \\ C' & \xrightarrow{g'} & D' \end{array}$$

وجود دارد اگر و تنها اگر $A' = B$ و $C' = D$. در این صورت ترکیب با نمودار

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f' \circ f} & B' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta' \\ C & \xrightarrow{g' \circ g} & D' \end{array}$$

داده می‌شود که به آن کاتگوری پیکان روی C گفته می‌شود.

تعریف ۲-۱

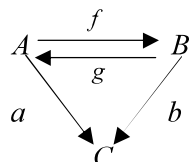
یک کاتگوری، کوچک نامیده می‌شود، اگر شیء‌هایش تشکیل یک مجموعه دهند.

مثال ۱۷-۱

فرض کنید S یک منوئید باشد. در این صورت می‌توان آن را یک کاتگوری با دقیقاً یک شیء (یعنی S) که مورفیزم‌هایش اعضای S و ترکیب مورفیزم‌ها عمل نیم‌گروه باشد در نظر گرفت. بنابراین هر منوئید یک کاتگوری کوچک است.

مثال ۱-۱۸

در صورتی که یک کاتگوری فقط چند مورفیزم داشته باشد، بهتر است آن را برحسب یک نمودار بیان کنیم که همه اشیاء و همه مورفیزم‌های ناهماني را نمایش می‌دهد. مثلاً



یک کاتگوری با ۳ شیء و ۷ مورفیزم است. با توجه به قرارداد همه مورفیزم‌های ناهماني را نمایش می‌دهیم بنابراین

$$b = a \circ g, \quad a = b \circ f, \quad g \circ f = id_A, \quad f \circ g = id_B \quad (1)$$

توجه شود که

$$\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \quad (2)$$

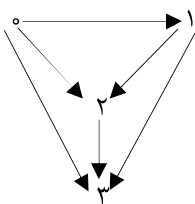
یک کاتگوری را نمایش نمی‌دهد.

مثال ۱-۱۹

برای هر عدد صحیح مثبت n می‌توان مجموعه مرتب زیر را

$$0 < 1 < \dots < n-1$$

به عنوان کاتگوری کوچک n در نظر گرفت. مثلاً ۴ با



نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱-۳

کاتگوری A را زیر کاتگوری، کاتگوری B می‌نامیم هرگاه

۱۰ نظریه کاتگوری

۱. هر شیء A یک شیء B باشد.
 ۲. برای تمامی اشیاء X, Y از A ، $MorA(X, Y) \subseteq MorB(X, Y)$.
 ۳. ترکیب دو مورفیزم در A با ترکیب آن‌ها در B یکی باشد.
 ۴. برای همه اشیاء A از A ، مورفیزم همانی id_A در B همان باشد که در A است.
- علاوه بر این اگر به‌ازای هر X, Y در A ، $MorA(X, Y) = MorB(X, Y)$ آن‌گاه گفته می‌شود A یک زیرکاتگوری لبریز^۱ از B است.

مثال ۱-۲۰

کاتگوری $FSet$ یک زیرکاتگوری لبریز از Set است.

مثال ۱-۲۱

Ab یک زیرکاتگوری لبریز از کاتگوری Grp است.

مثال ۱-۲۲

$Ring_1$ یک زیرکاتگوری از $Ring$ است، اما یک زیرکاتگوری لبریز نیست. مثلاً $Ring_1$ دارای مورفیزم‌های صفر است، درحالی‌که در $Ring_1$ همه مورفیزم‌ها حافظ ۱ هستند.

خلاصه فصل اول

در این فصل، ابتدا کاتگوری و زیرکاتگوری را تعریف کردیم و سپس بعضی از کاتگوری‌ها و زیرکاتگوری‌های مهم مانند $Ring_1, FSet, Ab$ و کاتگوری کوچک را با مثال نشان دادیم.

خودآزمایی تشریحی فصل اول

۱. فرض کنید E یک مجموعه ناتهی بوده و R یک رابطه روی E باشد که انعکاسی و متعدی است. ثابت کنید کاتگوری E را می‌توان با انتخاب اعضای E به‌عنوان اشیاء

و با تعریف کردن برای هر $x, y \in E$

$$MorE(X, Y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & (xRy \text{ اگر}) \\ \emptyset & (\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

ساخت.

۲. فرض کنید A یک حلقه جابه‌جایی ۱ داراست. ثابت کنید کاتگوری Mat_A را می‌توان با انتخاب اعداد صحیح مثبت به عنوان اشیاء و ماتریس‌های $m \times n$ روی A به عنوان $Mor(m, n)$ ساخت.

۳. ثابت کنید یک کاتگوری (کاتگوری مجموعه‌ها و روابط) را می‌توان با انتخاب رده همه مجموعه‌ها به عنوان رده اشیاء و با تعریف مجموعه مورفیزم $Mor(A, B)$ به صورت مجموعه همه زوج‌ها از A به B (یعنی زیرمجموعه‌های $A \times B$) و با انتخاب $\circ$ به صورت ترکیب معمولی روابط ساخت به طوری که، اگر R رابطه‌ای بین A, B و S رابطه‌ای بین B, C باشد، آن‌گاه $S \circ R$ رابطه‌ای بین A و C باشد که با

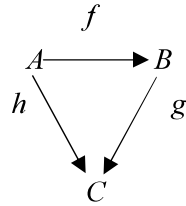
$$(x, y) \in S \circ R \Leftrightarrow (\exists z \in B)(x, z) \in R, \quad (z, y) \in S \quad (۳)$$

تعریف می‌شود.

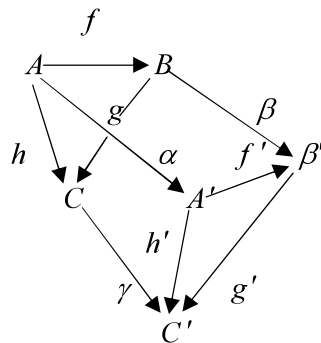
۴. ثابت کنید کاتگوری Met (کاتگوری فضاها ی متری) را می‌توان با انتخاب همه فضاها ی متری به عنوان رده اشیاء، با تعریف مجموعه مورفیزم $Mor((A, d), (A', d'))$ شامل نگاشت‌های انقباض $f: A \rightarrow A'$ (یعنی آن نگاشت‌های f که در شرط $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ به ازای هر x, y صدق می‌کنند) و اینکه $\circ$ ترکیب معمول نگاشت‌ها است تشکیل داد.

۵. یک مجموعه نقطه پای، زوج (X, x) است که از مجموعه ناتهی X و عضو ثابت $x \in X$ تشکیل شده است. یک نگاشت نقطه پای از (X, x) به (Y, y) نگاشت $f: X \rightarrow Y$ است به گونه‌ای که $f(x) = y$. ثابت کنید که کاتگوری Set^* (کاتگوری مجموعه‌های نقطه پای) را می‌توان با انتخاب مجموعه‌های نقطه پای به عنوان اشیاء و نگاشت‌های نقطه پای به عنوان مورفیزم‌ها، ساخت.

۶. فرض کنید کاتگوری C داده شده باشد. ثابت کنید کاتگوری جدیدی (کاتگوری مثلث روی C) را می‌توان با انتخاب مثلث‌های جابه‌جایی



به عنوان اشیاء مورفیزم‌هایش را به صورت C مورفیزم‌ها از یکی از این مثلث‌ها مانند $\Delta_{A,B,C}$ به مثلث دیگری مانند $\Delta_{A',B',C'}$ در نظر گرفت و به عنوان ترکیب مورفیزم‌ها، سه‌تایی‌های (α, β, γ) از مورفیزم‌های $\alpha: A \longrightarrow A'$ ، $\beta: B \longrightarrow B'$ و $\gamma: C \longrightarrow C'$ تشکیل داد به گونه‌ای که نمودار



جابه‌جا شود. ترکیب نتیجه، چسباندن نمودارهای جابه‌جایی به یکدیگر است.

۷. یک کمپلکس زنجیره‌ای، دنباله $-R$ مدول‌ها و $-R$ هم‌ریختی‌ها به شکل

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow M_0 \xrightarrow{d_0} M_{-1} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

است به گونه‌ای که به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$ ، $d_{i-1} \circ d_i = 0$.

ثابت کنید یک کاتگوری (کاتگوری کمپلکس‌های زنجیره‌ای) را می‌توان به این صورت تشکیل داد که، کمپلکس‌های زنجیره‌ای را به عنوان اشیاء و به عنوان مورفیزم‌ها از یک کمپلکس زنجیره‌ای $M = (M_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ به یک کمپلکس زنجیره‌ای دیگر $M' = (M'_i, d'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ، خانواده‌های $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ از $-R$ مورفیزم‌ها را انتخاب کنید به گونه‌ای که نمودار

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & M'_n & \longrightarrow & M'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

جابه‌جا شود و به‌عنوان ترکیب، مورفیزم‌هایی را انتخاب کنید که از فرایند به‌هم‌چسباندن این نمودارهای جابه‌جایی به‌دست می‌آیند.

۸ اگر A و B مجموعه‌های مرتب باشند، آنگاه نگاشت $f: A \longrightarrow B$ را باقی‌مانده‌دار می‌نامیم هرگاه یکنوا بوده و به‌ازای هر $y \in B$ یک بزرگ‌ترین $x \in A$ وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که $f(x) \leq y$. ثابت کنید $f: A \longrightarrow B$ باقی‌مانده‌دار است اگر و تنها اگر نگاشت یکنوای $f^+: A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $f^+ \circ f \geq id_A$ و $f \circ f^+ \leq id_B$. همچنین ثابت کنید این نگاشت f^+ یکتا بوده و به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$(\forall y \in B) f^+(y) = \max\{x \in A; f(x) \leq y\} \quad (۴)$$

اگر $f: A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow C$ باقی‌مانده‌دار باشند، ثابت کنید $g \circ f: A \longrightarrow C$ با $(g \circ f)^+ = f^+ \circ g^+$ نیز چنین است و نتیجه بگیرید که کاتگوری Ord^+ (کاتگوری مجموعه‌های مرتب و نگاشت‌های باقی‌مانده‌دار) را می‌توان با انتخاب مجموعه‌های مرتب به‌عنوان اشیاء و نگاشت‌های باقی‌مانده‌دار به‌عنوان مورفیزم، ساخت.

۹. یک شبکه را کران‌دار گوئیم هرگاه دارای کوچک‌ترین عضو 0 (صفر) و بزرگ‌ترین عضو 1 باشد. کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است:

الف) کاتگوری Lat_0^+ از شبکه‌های کران‌دار و نگاشت‌های باقی‌مانده‌دار یک زیرکاتگوری لبریز از Ord^+ است.

ب) کاتگوری $CLat^+$ از شبکه‌های کامل و نگاشت‌های باقی‌مانده‌دار یک زیرکاتگوری لبریز از Lat_0^+ است.

ج) کاتگوری Lat_0 از شبکه‌های کران‌دار و مورفیزم‌های شبکه حفظ‌کننده مجموعه $\{0, 1\}$ یک زیرکاتگوری لبریز از Lat است.