



نظریه گراف و کاربردهای آن

دکتر نازلی بشارتی دکتر اکرم محمودی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست

نه	پیش گفتار
1	فصل اول. مفاهیم اولیه
1	اهداف یادگیری
1	1-1. گراف چیست؟
4	2-1. تعاریف اولیه
12	3-1. زیرگراف‌ها
14	4-1. نمایش ماتریسی گراف
15	5-1. همبندی در گراف‌ها
22	6-1. گراف‌های خاص
27	7-1. یکریختی گراف‌ها
34	8-1. گراف مکمل و خود مکمل
36	9-1. گراف خطی
40	تمرین
45	فصل دوم. اعمال بر گراف‌ها
45	اهداف یادگیری
45	1-2. اجتماع گراف‌ها
47	2-2. پیوند گراف‌ها
49	3-2. حاصل ضرب‌های گراف‌ها
56	تمرین
59	فصل سوم. گراف جهت‌دار
59	اهداف یادگیری
59	1-3. مفاهیم اساسی
65	2-3. نمایش ماتریس گراف جهت‌دار
66	3-3. همبندی در گراف جهت‌دار

71 4-3. یکرختی گراف‌های جهت‌دار
73 تمرین

75 فصل چهارم. همبندی
75 اهداف یادگیری
76 1-4. رأس‌های برشی و همبندی
81 2-4. یال‌های برشی و همبندی یالی
91 3-4. بلوک‌ها
96 تمرین

99 فصل پنجم. درخت‌ها
99 اهداف یادگیری
100 1-5. درخت و خواص آن
108 2-5. فرمول کیلی
115 3-5. گراف‌های وزن‌دار
115 4-5. الگوریتم کراسکال
117 5-5. مسئله کوتاه‌ترین مسیر
122 6-5. درخت‌های ریشه‌دار
125 7-5. الگوریتم جستجوی نخست در عمق
128 8-5. الگوریتم جستجوی نخست در سطح
133 تمرین

139 فصل ششم. عدد استقلال، عدد پوششی، تطابق
139 اهداف یادگیری
139 1-6. عدد استقلال و عدد پوششی
143 2-6. تطابق
147 3-6. عامل‌ها
151 4-6. تطابق در گراف‌های دوبخشی
155 5-6. الگوریتم به‌دست آوردن تطابق ماکسیمم در گراف درخت
157 6-6. الگوریتم پیدا کردن مجموعه‌ی نقض‌کننده‌ی شرط هال
161 7-6. تطابق پایدار
166 تمرین

169 فصل هفتم. گراف‌های اویلری و همیلتونی
169 اهداف یادگیری
170 1-7. گراف‌های اویلری
173 2-7. مسئله پستچی چینی
179 3-7. گراف‌های همیلتونی

187	4-7. مسئله فروشنده دوره گرد
189	5-7. الگوریتم پیدا کردن دور همیلتونی با وزن کم
191	تمرین
193	فصل هشتم. تسطیح پذیری و گراف‌های مسطح
193	اهداف یادگیری
194	1-8. گراف‌های مسطح
202	2-8. دوگان گراف مسطح
206	3-8. الگوریتم تسطیح پذیری گراف
209	تمرین
213	فصل نهم. رنگ‌آمیزی
213	اهداف یادگیری
213	1-9. رنگ‌آمیزی رأسی
221	2-9. چندجمله‌ای رنگی
226	3-9. گراف‌های k -بحرانی
228	4-9. الگوریتم به‌دست آوردن عدد رنگی رأسی
230	5-9. رنگ‌آمیزی نقشه
232	6-9. رنگ‌آمیزی یالی
236	تمرین
239	فصل دهم. شبکه
239	اهداف یادگیری
240	1-10. شارش
244	2-10. برش
247	3-10. قضیه ماکسیمم شارش و مینیمم شارش
254	4-10. الگوریتم $MF - MC$ ($MaxFlow - MinCut$):
258	5-10. منگر
261	تمرین
263	برخی مسائل حل نشده در نظریه گراف
267	واژه‌نامه
271	نمایه
277	کتابنامه

پیشگفتار

گراف‌ها، مدل‌های ریاضی کارآمدی برای تحلیل بسیاری از مسائل زندگی روزمره هستند. مسائلی در زمینه‌های فیزیک، علوم مخابراتی، روانشناسی و ژنتیک را می‌توان به صورت مسائلی در نظریه‌ی گراف، مدل‌سازی و حل نمود. در ابتدا نظریه‌ی گراف، مهم به نظر نمی‌رسید، زیرا بیشتر در حل معماها و سرگرمی‌ها به کار برده می‌شد. اما از سال 1930 به طور جدی مورد بحث قرار گرفت و اکنون به عنوان بخشی از ریاضیات ترکیبیاتی، یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است و ارتباط بسیار نزدیکی با مابقی علوم دارد. به عنوان مثال برای رده‌بندی و اولویت‌دهی پیوندها در سایت‌های جستجو مانند گوگل یا برای شمارش ترکیب‌های شیمیایی از گراف درخت استفاده می‌شود. هم‌چنین شارش شبکه‌ها از ملزومات مسائل برنامه‌ریزی خطی است. برخی مسائل زمان‌بندی، مانند زمان‌بندی مسابقات یا برنامه‌ریزی کلاس‌ها و امتحانات دانشگاه را می‌توان با مدل‌سازی گرافی و استفاده از رنگ‌آمیزی گراف‌ها به صورت بهینه برنامه‌ریزی کرد. امروزه مباحث مربوط به نظریه گراف، ریاضی‌دانان بسیاری را به خود مشغول کرده است. وجود مسائل حل نشده‌ی بسیار در این زمینه گواهی بر این مدعا است. رابطه‌ی بین این شاخه از ریاضیات و سایر شاخه‌های علوم که هر روز کشف می‌شود نشان از رشد و پویایی نظریه گراف دارد.

تجربه‌ی چندین ساله‌ی تدریس درس نظریه‌ی گراف در پیام نور در رشته‌های ریاضی و کامپیوتر، نویسندگان را بر آن داشت تا کتابی متناسب با سرفصل شورای عالی برنامه‌ریزی و متناسب با دانشجویان پیام‌نور در هر دو رشته ریاضی و کامپیوتر فراهم

آورند. البته کتاب حاضر می‌تواند مورد استفاده دانشجویان تمامی دانشگاه‌ها باشد. این کتاب در ده فصل تألیف شده است. در هر فصل متناسب با مطالب آن مثال‌های متنوع و کاربردی و الگوریتم‌هایی بیان شده است.

در فصل اول به تعریف مفاهیم اولیه گراف پرداخته شده است. در این فصل، با گراف‌های خاص و کاربردی مانند گراف کامل، گراف دوبخشی، گراف خطی و... آشنا می‌شویم. بیشتر نمادها و تعریف‌های مورد نیاز برای فصل‌های بعدی در این فصل بیان شده است. در فصل دوم اعمال روی گراف‌ها معرفی شده است تا دانشجویان با ساختن گراف‌های جدید از روی گراف‌های موجود آشنا گردند. از آنجایی که مدل گرافی بسیاری از مسائل روزمره مانند شبکه حمل و نقل، به صورت گراف جهت‌دار است، در فصل سوم با مفهوم گراف‌های جهت‌دار و کاربردهایی از آن آشنا می‌شویم. فصل چهارم مفهوم بسیار مهم همبندی و قضایا و الگوریتم‌های مربوطه را شامل می‌شود. در فصل پنجم گراف‌های درخت که نقش اساسی در نظریه گراف ایفا می‌کنند، مطرح و الگوریتم‌های مهم آن بیان شده است. در فصل ششم به تعریف عدد استقلال و پوششی و مفهوم تطابق در گراف‌ها می‌پردازیم و قضایای مربوطه را بیان می‌کنیم. از آنجایی که تطابق در گراف‌های دوبخشی کاربرد وسیعی دارد، لذا شرط لازم و کافی برای وجود تطابق در این گراف را بیان می‌کنیم. هم‌چنین الگوریتم‌هایی برای به دست آوردن تطابق در این فصل بیان شده است. در فصل هفتم به گراف‌های اویلری که به جرأت می‌توان گفت منشاء ایجاد شاخه نظریه گراف در ریاضیات است، می‌پردازیم. هم‌چنین گراف‌های هامیلتونی را تعریف کرده و ضمن بیان قضایای مربوط به این دو مفهوم کاربردهایی از این مباحث را مطرح می‌کنیم. در فصل هشتم، گراف مسطح تعریف شده و قضایایی برای تشخیص مسطح بودن یک گراف و الگوریتمی برای آن بیان شده است. در فصل نهم، رنگ آمیزی گراف‌ها به صورت رنگ آمیزی رأسی و یالی بیان شده و کاربردهایی از آن با مثال ارائه شده است. هم‌چنین قضیه چهار رنگ (رنگ آمیزی نقشه)، که یکی از سوالات چالش برانگیز نظریه گراف بود، در این فصل معرفی و قضایای آن بیان می‌شود. در نهایت در فصل دهم از شبکه، شارش، برش و قضایای مربوط به آن‌ها صحبت شده است. این فصل چنان نگارش شده است که بتوان در انتها الگوریتم شارش ماکسیمم - برش می‌نیمم را مطرح کرد که یکی از پرکاربردترین مسائل نظریه

گراف است.

در کل کتاب اهتمام کافی به عمل آمده است که کتاب نوعی «خودآموز» باشد. بدین معنی که دانشجو بتواند بدون استعانت استاد، آن را مطالعه کند. علاوه بر اینکه مثال‌های متنوعی برای هر تعریف و قضیه گفته شده است، تمرین‌هایی در آخر هر فصل ارائه شده است. حل این تمرین‌ها به مهارت دانشجو در به‌کار بستن قضیه‌ها کمک شایانی می‌کند. در آخر کتاب تعدادی مسئله حل نشده که مفاهیم اولیه آن جزء مباحث کتاب بوده، اضافه گردیده تا انگیزه‌ای برای مطالعه بهتر دانشجویان باشد.

بدون تردید ویراستاری هر کتاب ریاضی بسیار حائز اهمیت است، لذا مؤلفین وظیفه خود می‌دانند که از زحمات جناب آقای دکتر شهریار فرهنگ‌مندی برای ویراستاری کتاب تشکر و قدردانی نمایند. بدون شک رهنمودهای ایشان در بهتر شدن کتاب بسیار مؤثر بوده است. از مدیریت محترم تدوین جناب آقای دکتر ابراهیمی و سرکارخانم معدلت، کارشناس محترم تدوین برای پیگیری‌های مستمرشان در تمامی مراحل اداری تشکر می‌نمایم. هم‌چنین از آقایان دانیال طاهرخانی و امیر سرودی بابت زحماتی که برای تایپ کتاب متحمل شده‌اند، سپاسگزاریم.

در آخر، نویسندگان اذعان می‌دارند که این کتاب عاری از خطا و اشتباه نیست. لذا، از تمامی اساتید بزرگوار و دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود، نظرات و انتقادات خود را ارسال نمایند تا در چاپ‌های بعدی کتاب مدنظر قرار گیرد.

نازلی بشارتی - اکرم محمودی

تأبستان 94

nbesharati@pnu.ac.ir, akmahmoodi@yahoo.com

فصل اول

مفاهیم اوّلیه

اهداف یادگیری

- در پایان این فصل دانشجو با مفاهیم زیر آشنا می شود:
- گراف، زیرگراف و گراف ساده
 - نمایش ماتریسی گراف
 - مسیر، دور و کاربردهای آن
 - همبندی
 - گراف‌های خاص مانند گراف کامل، گراف دوبخشی و
 - یکریختی دو گراف
 - با استفاده از گراف داده شده، یک گراف جدید بسازد؛ مانند گراف مکمل و گراف خطی

1-1. گراف چیست؟

چگونه می توان یک کابل کشی برای تلفن ها با کمترین هزینه انجام داد به طوری که هر تلفن، قابل وصل شدن به همه ی تلفن های دیگر باشد؟ چگونه می توان n شغل را به m نفر، ($m > n$) تخصیص داد به طوری که هیچ شغلی خالی نماند؟ حداکثر جریان در واحد زمان از منبع به مقصد در یک شبکه ی لوله ها چقدر است؟ یک تراشه ی کامپیوتر به چند لایه نیاز دارد تا سیم ها در یک لایه یکدیگر را قطع نکنند؟ چگونه می توان یک

لیگ ورزشی در یک فصل را برای حداقل تعداد هفته‌ها برنامه‌ریزی کرد؟ یک فروشنده‌ی دوره گرد به چه ترتیبی باید از تعداد مشخصی شهر دیدن کند تا زمان سفر حداقل باشد؟ آیا می‌توان کشورهای یک نقشه را با 4 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری‌که کشورهای همسایه، رنگ‌های متفاوت داشته باشند؟

مسائل بالا، مثال‌هایی از مسائل عملی هستند که می‌توان آن‌ها را با استفاده از مدل ریاضی و نظریه‌ی گراف حل نمود. لذا گراف‌ها، مدل‌های ریاضی کارآمدی برای تحلیل بسیاری از مسائل زندگی روزمره هستند. مسائلی در زمینه‌های فیزیک، علوم مخابراتی، روانشناسی و ژنتیک را می‌توان به‌صورت مسائلی در نظریه‌ی گراف، مدل‌سازی و حل نمود. امروزه برای رده‌بندی و اولویت‌دهی پیوندها در سایت‌های جستجو مانند گوگل¹ از گراف استفاده می‌شود.

تاریخچه‌ی ایجاد شاخه‌ی نظریه‌ی گراف در ریاضیات، به مقاله‌ای که توسط اوایلر² در سال 1736 در مورد مسئله‌ی هفت پل کونیگسبرگ³ چاپ شده است، برمی‌گردد. شهر کونیگسبرگ در پروس و در سواحل رودخانه‌ی پرگل واقع است و قسمتی از آن، مطابق شکل 1-1، در میان رودخانه قرار دارد. در گذشته، بخش‌های مختلف شهر به وسیله‌ی هفت پل به یکدیگر متصل بودند. مردم شهر، روزهای یکشنبه برای تفریح و گردش به قدم زدن بر روی این پل‌ها می‌پرداختند و این مسئله را مطرح کرده بودند که: «آیا می‌شود طوری بر روی این هفت پل به پیاده روی پرداخت به نحوی که شخص پس از خروج از خانه بتواند با یک بار و فقط یک بار عبور از هر پل به خانه‌اش بازگردد؟»

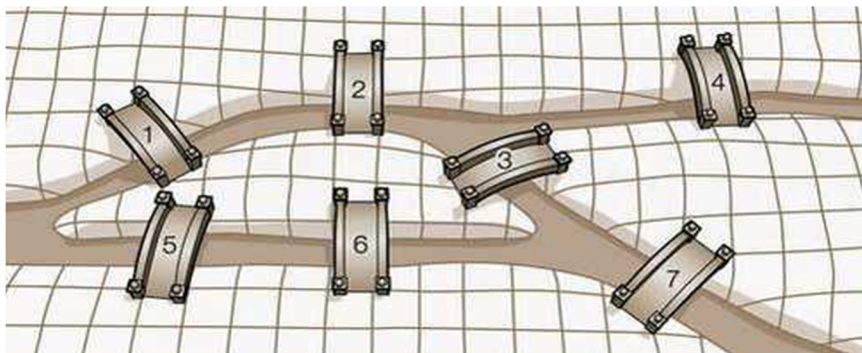
اوایلر هفت پل کونیگسبرگ، شکل 1-1، را به‌صورت شکل 2-1 بر روی کاغذ رسم نمود و با بحث بر روی شکل 2-1 نشان داد که نمی‌توان طوری پیاده‌روی را طراحی کرد که شخص از روی هر پل دقیقاً یک بار عبور کند و به خانه‌ی خودش بازگردد.

ترسیم شکل مسئله‌ی هفت پل به‌صورت شکل 2-1، باعث پیدایش نظریه‌ی گراف در ریاضیات گردید.

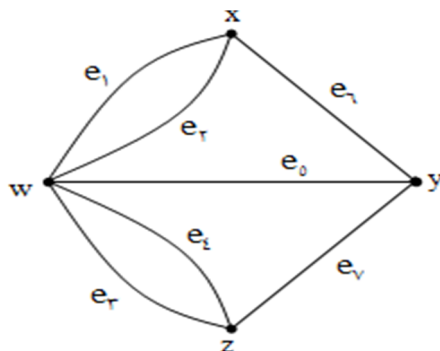
1. Google

2. Euler

3. Königsberg



شکل 1-1



شکل 2-1

در ابتدا نظریه‌ی گراف، مهم به نظر نمی‌رسید؛ زیرا بیشتر در حل معماها و سرگرمی‌ها به کار برده می‌شد. اما از سال 1930 به‌طور جدی مورد بحث قرار گرفت و اکنون به‌عنوان بخشی از ریاضیات ترکیبیاتی، یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات کاربردی است و ارتباط بسیار نزدیکی با علوم کامپیوتر دارد.

مسائل مطرح در نظریه‌ی گراف را می‌توان تحت عناوین زیر دسته‌بندی کرد:

- مسئله‌ی وجودی. در صورت وجود، چگونه می‌توان آن گراف را ساخت.
 - مسئله‌ی شمارشی. چه تعداد وجود دارد؟
 - بهینه‌سازی گسسته. در صورتی که چند تا وجود دارد، کدام یک بهتر است؟
- به‌عنوان مثال، مسئله‌ی هفت پل، یک مسئله‌ی وجودی است.

در این فصل مفاهیمی مانند زیرگراف، نمایش ماتریسی گراف، گراف کامل و دوبخشی و یکریختی دو گراف که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، را بیان می‌کنیم.

2-1. تعاریف اولیه

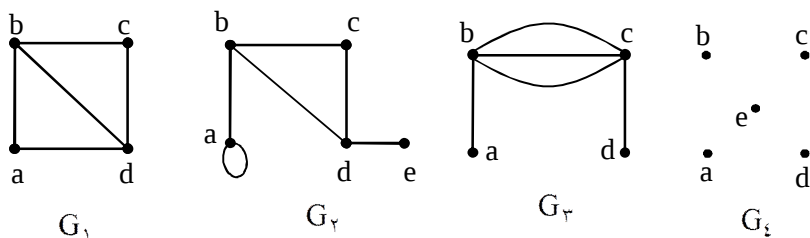
تعریف 1-1. گراف G عبارت است از زوج $(V(G), E(G))$ که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی متناهی و $E(G)$ مجموعه‌ای متناهی از زوج‌های نامرتب (یکسان یا متمایز) از عناصر $V(G)$ است. عناصر $V(G)$ را رأس‌ها و عناصر $E(G)$ را یال‌های گراف G می‌نامیم. بیشتر اوقات برای راحتی کار، یال $\{u, v\}$ را به صورت uv نمایش می‌دهیم و یا یال‌های گراف را مانند رأس‌ها نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال 2-1. در شکل 2-1، $V(G) = \{x, y, w, z\}$ و $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ است. همان‌طور که در تعریف 1-1 مشاهده می‌کنید، مجموعه‌ی یال‌ها می‌تواند تهی باشد ($E(G) = \emptyset$). گرافی را که مجموعه‌ی یال‌های آن تهی باشد، یا به عبارت دیگر بین رئوس آن هیچ یالی وجود نداشته باشد، **گراف تهی** می‌نامیم. اگر $E(G) = \emptyset$ و $|V| = 1$ ، آن‌گاه گراف G را **گراف بدیهی** می‌نامیم.

دو رأس u و v را در گراف G **مجاور** می‌نامیم، هرگاه بین این دو رأس یال وجود داشته باشد. ممکن است در یک گراف، بین دو رأس، بیش از یک یال وجود داشته باشد، در این صورت آن‌ها را **یال‌های چندگانه** می‌نامیم. به عنوان مثال در شکل 2-1، بین رأس‌های x و w ، دو یال e_1 و e_2 وجود دارد. گرافی را که دارای یال چندگانه باشد، **گراف چندگانه** می‌نامیم. با این تعریف، گراف شکل 2-1 یک گراف چندگانه است. یالی را که دو رأس ابتدا و انتهای آن یکی باشد، **طوقه** می‌نامیم.

تعریف 3-1. اگر گراف G دارای یال چندگانه و طوقه نباشد، آن‌گاه G را **ساده** می‌نامیم.

مثال 4-1. در شکل 3-1، گراف G_1 ساده است. گراف G_2 دارای طوقه و گراف G_3 دارای یال چندگانه است، بنابراین این دو گراف ساده نیستند. گراف G_4 ، گراف تهی و ساده است.



شکل 3-1

تعداد رئوس گراف $G=(V,E)$ ، مرتبه‌ی گراف و تعداد یال‌های آن، اندازه‌ی گراف نامیده می‌شود. در اینجا، مرتبه‌ی گراف را با نماد n یا $|V|$ و اندازه‌ی گراف را با نماد m یا $|E|$ نمایش می‌دهیم.

- درجه و دنباله‌ی درجه‌ها

تعریف 5-1. تعداد یال‌های متصل به رأس v_i را **درجه‌ی رأس** v_i می‌نامیم. توجه کنید که اگر رأس v_i دارای طوقه باشد، آن‌گاه در محاسبه درجه رأس v_i هر طوقه به‌عنوان دو یال در نظر گرفته می‌شود. درجه‌ی رأس v_i را با نماد $\deg(v_i)$ نمایش می‌دهیم.

رأسی که درجه‌ی آن صفر باشد، رأس **تنها** و رأسی که درجه‌ی آن یک باشد، رأس **آویزان** یا **برگ** نامیده می‌شود. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه‌ی گراف G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال 6-1. درجه‌های رئوس گراف G_2 مثال 4-1، به‌صورت زیر است:

$$\deg a=3, \deg b=3, \deg c=2, \deg d=3, \deg e=1$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود چون رأس a دارای یک طوقه است، درجه‌ی آن 3 حساب می‌شود. در گراف G_2 ، $\Delta=3$ و $\delta=1$ است.

اگر درجه تمامی رئوس گراف G ، k باشد، آن‌گاه گراف G را **k -منتظم** گوئیم، یعنی،

$$\forall v \in V(G), \deg(v) = k.$$

مجموعه‌ی رأس‌هایی را که با رأس v مجاور هستند، همسایه‌ی v می‌نامیم و با

نماد $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$N_G(v) = \{u \mid u \in V(G), \{v, u\} \in E(G)\}$$

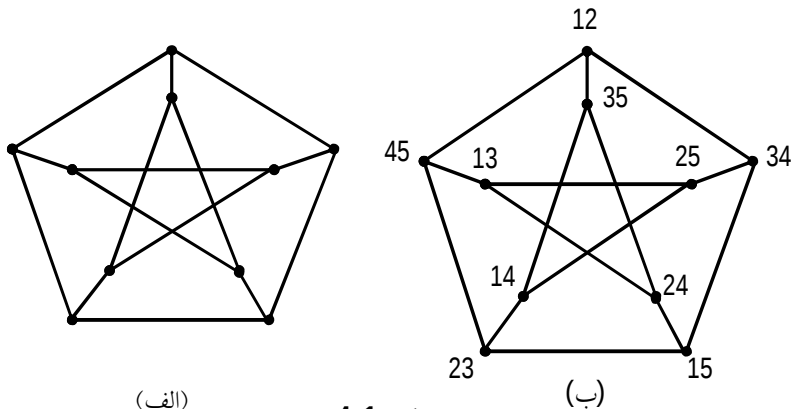
گزاره 1-7. فرض کنیم G یک گراف باشد، در این صورت $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E|$.

اثبات. چون هر یال غیرطوقه، در درجه دو رأس تأثیر دارد و هرطوقه در محاسبه‌ی درجه، به عنوان دو یال در نظر گرفته می‌شود، بنابراین هر یال در مجموع درجات، دو بار محاسبه می‌گردد و حکم ثابت است. ■

نتیجه 1-8. در هر گراف G ، تعداد رئوس از درجه‌ی فرد، زوج است.

تعریف 1-9. گراف ساده‌ی 3-منتظم G که به صورت شکل 1-4 (الف)، رسم می‌شود، گراف پترسن نامیده می‌شود.

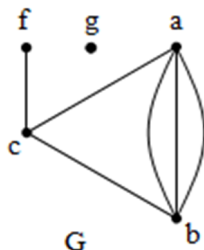
فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. زیرمجموعه‌های دو عضوی A را رأس‌های گراف G در نظر بگیریم. $V(G) = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$ و دو رأس G با هم مجاور هستند اگر و فقط اگر عضو مشترک نداشته باشند. در این صورت شکل گراف به صورت شکل 1-4 (ب) خواهد بود که همان گراف پترسن است.



شکل 1-4

تعریف 1-10. دنباله‌ی ناصعودی از درجه‌ی رأس‌های گراف G را دنباله‌ی درجه‌های گراف می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر G یک گراف n رأسی باشد، آن‌گاه $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ که در آن $d_i = \deg(v_i)$ و $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ ، دنباله‌ی درجه‌های گراف G است.

مثال 11-1. فرض کنیم G گرافی به صورت شکل 5-1 باشد. در این صورت دنباله‌ی درجه‌های G ، برابر است با: $d = (4, 4, 3, 1, 0)$.



شکل 5-1

گزاره 12-1. فرض کنیم $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ یک دنباله‌ی ناصعودی از اعداد صحیح مثبت باشد. در این صورت یک گراف G با دنباله‌ی درجه‌های d وجود دارد اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^n d_i$ زوج باشد.

اثبات. (شرط لازم) فرض کنیم $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ دنباله‌ی درجه‌های گراف G

باشد. در این صورت طبق گزاره‌ی 7-1 داریم، $\sum_{i=1}^n d_i = 2|E|$.

(شرط کافی) برعکس فرض کنیم $\sum_{i=1}^n d_i$ زوج باشد. یک گراف n رأسی

می‌سازیم که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، داشته باشیم $\deg(v_i) = d_i$.

چون $\sum_{i=1}^n d_i$ یک عدد زوج است، تعداد اعداد فرد در دنباله‌ی d زوج است. ابتدا

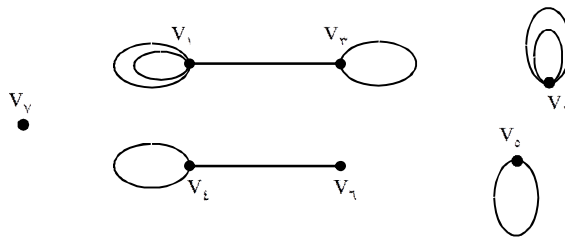
یک جفت‌سازی دلخواه از رئوس مجموعه‌ی $\{d_i \mid \text{فرد است}\}$ انتخاب می‌کنیم و بین هر جفت انتخابی، یک یال رسم می‌کنیم. پس از انجام این کار، تعداد یال‌های مورد نیاز در هر رأس زوج خواهد بود و دنباله درجه‌های جدید $d' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$ به دست می‌آید که d'_i ها زوج هستند و هر d'_i تعداد یال‌های مورد نیاز رأس i ام است.

حال کافی است برای هر i ، تعداد $\left\lfloor \frac{d'_i}{2} \right\rfloor$ طوقه در رأس v_i رسم کنیم. گراف حاصل

دارای دنباله‌ی درجه‌های d داده شده خواهد بود و حکم ثابت است. ■

مثال 13-1. گراف متناظر با دنباله‌ی $(5,4,3,3,2,1,0)$ را رسم کنید.

طبق روند اثبات گزاره‌ی 12-1، ابتدا رئوس درجه‌ی فرد را در نظر می‌گیریم. در این دنباله، 4 رأس از درجه‌ی فرد وجود دارد. از بین این 4 رأس می‌توان دو جفت دلخواه انتخاب نمود. مثلاً می‌توان $\{v_1, v_3\}$ و $\{v_4, v_6\}$ را انتخاب کرد و بین آن‌ها یال رسم نمود. پس از انجام این کار، تعداد یال‌های مورد نیاز برای هر رأس، زوج است و دنباله جدید $d' = (4,4,2,2,2,0,0)$ برای بقیه یال‌ها به دست می‌آید. حال کافی است در هر رأس v_i ، تعداد $\left\lfloor \frac{d'_i}{2} \right\rfloor$ طوقه رسم کنیم. گراف شکل 6-1 به دست می‌آید که دنباله درجه‌های آن d داده شده است.



شکل 6-1

تعریف 14-1. دنباله‌ی ناصعودی $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ از اعداد صحیح نامنفی را **دنباله‌ی گرافیکی** می‌نامیم؛ هرگاه گراف ساده‌ای با دنباله‌ی درجه‌های d وجود داشته باشد. واضح است که شرط لازم برای اینکه دنباله‌ی d یک دنباله‌ی گرافیکی باشد آن است که $\sum_{i=1}^n d_i$ زوج باشد ولی این شرط کافی نیست.

مثال 15-1. الف) با اینکه شرط لازم برای دنباله‌ی $d = (7,6,3,3,1,1,1)$ برقرار است ولی گرافیکی نیست؛ زیرا باید گراف ساده‌ای مانند G با 7 رأس وجود داشته باشد که بزرگ‌ترین درجه‌ی آن 7 باشد که غیرممکن است.

ب) دنباله‌ی $d = (5,5,4,3,2,1)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم دنباله‌ی d گرافیکی باشد، در این صورت باید گراف ساده‌ای مانند G با 6 رأس وجود داشته باشد

که دنباله‌ی درجه‌های آن d باشد. رأس v_1 از درجه‌ی 5 است، پس v_1 با تمامی رئوس دیگر از جمله v_6 مجاور است. رأس v_2 نیز از درجه‌ی 5 است، پس باید v_2 نیز با تمامی رئوس دیگر مجاور باشد، ولی درجه‌ی رأس v_6 یک است، پس v_2 نمی‌تواند با v_6 مجاور باشد و d گرافیکی نیست.

ج) دنباله‌ی $d = (3, 3, 2, 2, 2, 2)$ گرافیکی است. زیرا می‌توان گراف ساده‌ای مانند شکل 7-1، رسم کرد که دنباله‌ی درجه‌های آن، دنباله‌ی d است.



شکل 7-1

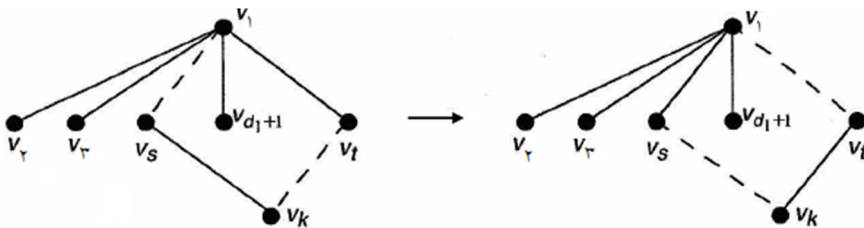
مثال 16-1. نشان می‌دهیم که در هر گروه n نفری ($n \geq 2$)، حداقل دو نفر وجود دارند که با تعداد یکسانی از افراد آن جمع، آشنا هستند. یک مدل گرافی برای مسئله ارائه می‌دهیم. گراف ساده‌ی G با n رأس $v_1, \dots, v_n$ را در نظر می‌گیریم. (واضح است که گراف رابطه‌ی دوستی، یک گراف ساده است.) در گراف G ، دو رأس v_i و v_j با هم مجاور هستند اگر و فقط اگر v_i و v_j با هم آشنا باشند. بنابراین تعداد دوستان v_i برابر با درجه‌ی رأس v_i در G است. برای حل مسئله باید نشان دهیم که دو رأس در G با درجه‌ی یکسان وجود دارند.

فرض کنیم درجه‌ی تمام رأس‌های گراف متمایز باشند؛ پس دنباله‌ی درجه‌های آن به صورت $(1, 2, \dots, n-1, n)$ است. اما رأس از درجه‌ی $(n-1)$ باید با تمامی رأس‌ها مجاور باشد؛ در نتیجه نمی‌توان رأسی از درجه‌ی صفر داشت. پس درجه‌ی رأس‌های G نمی‌تواند متمایز باشد و حداقل دو رأس با درجه‌ی یکسان وجود دارد. بنابراین حداقل دو نفر با تعداد یکسانی از افراد جمع آشنا هستند.

طبق تعریف دنباله‌ی گرافیکی، اگر دنباله‌ی d گرافیکی باشد باید بتوان یک گراف ساده مانند G رسم کرد که دنباله‌ی درجه‌های آن d باشد. حال الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که به صورت بازگشتی، به دست آوردن گراف G از روی دنباله‌ی گرافیکی را نشان می‌دهد.

قضیه 17-1. فرض کنیم $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ ، یک دنباله‌ی گرافیکی باشد. در این صورت یک گراف ساده با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ $\deg(v_i) = d_i$ و رأس v_1 با رئوس $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ و v_{d_1+1} مجاور است.

اثبات. در میان گراف‌های ساده‌ای که با دنباله‌ی درجه‌های $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ وجود دارند، گراف ساده‌ی G را در نظر می‌گیریم که $r = |N_G(v_1) \cap \{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}|$ ماکسیمم باشد. اگر $r = d_1$ ، حکم ثابت است. اگر $r < d_1$ ، چون $\deg(v_1) = d_1$ آن گاه رأسی مانند v_s ، $2 \leq s \leq d_1 + 1$ وجود دارد به طوری که v_1 با آن مجاور نیست و رأسی مانند v_t ، $t \geq d_1 + 1$ وجود دارد به طوری که v_1 با v_t مجاور است. از طرف دیگر، چون $\deg(v_s) \geq \deg(v_t)$ ، رأسی مانند v_k وجود دارد که با v_s مجاور است ولی با v_t مجاور نیست. حال فرض کنیم G_1 گرافی باشد که از گراف G با جایگزین کردن یال‌های $v_1 v_t$ و $v_s v_k$ با یال‌های $v_1 v_s$ و $v_t v_k$ به دست می‌آید (شکل 8-1). در این صورت گراف G_1 گراف ساده‌ای است که $|N_{G_1}(v_1) \cap \{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}| = r + 1$ که این متناقض با انتخاب گراف G است. پس گراف ساده‌ی G ، گراف مطلوب است و حکم ثابت می‌شود. ■



شکل 8-1

قضیه 18-1. (هاول - حکیمی) دنباله‌ی ناصعودی $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ از اعداد صحیح نامنفی گرافیکی است اگر و فقط اگر دنباله‌ی $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ گرافیکی باشد.

اثبات. کافی است از قضیه 17-1، استفاده کنیم. اثبات به عنوان تمرین به عهده‌ی