

دانشگاه سیام نور
پی

نظریه مجموعه‌های فازی

(رشته ریاضی)

دکتر محمد حمیدی دکتر حمید شجاعی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

پانزده

پیشگفتار مؤلف

۱	فصل اول: مقدمه‌ای بر نظریه مجموعه‌ها
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۱	مقدمه
۲	۱-۱ مجموعه
۲	۱-۱-۱ تعریف
۳	۲-۱ انواع نمایش یک مجموعه
۳	۱-۲-۱ نمایش تشریحی
۳	۲-۲-۱ نمایش ون
۴	۳-۲-۱ نمایش تصریحی
۵	۳-۱ نمایش فاصله‌ای (بازه‌ای) (مجموعه اعداد حقیقی)
۵	۱-۳-۱ نمایش مجموعه تهی
۵	۲-۳-۱ نمایش زوج مرتب
۵	۳-۳-۱ قضیه
۶	۴-۱ نمادها و عملیات جبری روی مجموعه‌ها
۶	۱-۴-۱ نماد $\in$ (عضویت)
۷	۲-۴-۱ نماد (تساوی)
۷	۳-۴-۱ $\subseteq$ و $\subset$ (زیرمجموعه بودن یا نماد مشمول)
۸	۴-۴-۱ قضیه
۸	۵-۴-۱ نماد $\cup$ (اجتماع) و تعریف اجتماع
۹	۶-۴-۱ قضیه
۹	۷-۴-۱ نماد $\cap$ (اشتراک) و تعریف اشتراک

۹	۸-۴-۱ قضیه
۱۰	۹-۴-۱ نماد AC مکمل
۱۰	۱۰-۴-۱ تعریف
۱۰	۱۱-۴-۱ قضیه
۱۱	۱۲-۴-۱ نماد $\setminus$ (تفاضل) و تفاضل دو مجموعه
۱۱	۱۳-۴-۱ قضیه
۱۱	۱۴-۴-۱ نماد $\oplus$ (تفاضل متقارن) تفاضل متقارن دو مجموعه
۱۲	۱۵-۴-۱ قضیه
۱۲	۱۶-۴-۱ نماد $\times$ (ضرب دکارتی) ضرب دکارتی دو مجموعه
۱۲	۱۷-۴-۱ قضیه
۱۳	۵-۱ مجموعه‌های خاص (تعاریف خاص)
۱۳	۱-۵-۱ خانواده
۱۳	۲-۵-۱ مجموعه اندیس دار
۱۴	۳-۵-۱ قضیه
۱۵	۴-۵-۱ مفهوم رابطه روی مجموعه‌ها
۱۵	۵-۵-۱ تعریف
۱۶	۶-۵-۱ عملیات روی رابطه
۱۶	۷-۵-۱ دورابطه از R و S روی مجموعه دلخواه A باشند.
۱۷	۸-۵-۱ قضیه
۱۷	۹-۵-۱ تعریف
۱۸	۱۰-۵-۱ قضیه
۱۹	۶-۱ رابطه هم‌ارزی و افراز
۱۹	۱-۶-۱ تعریف
۲۰	۲-۶-۱ قضیه
۲۲	۷-۱ تابع
۲۲	۱-۷-۱ تعریف
۲۲	۲-۷-۱ تعریف
۲۲	۳-۷-۱ تعریف
۲۲	۴-۷-۱ تعریف
۲۲	۵-۷-۱ تعریف
۲۳	۶-۷-۱ عملیات روی توابع
۲۳	۷-۷-۱ تعریف
۲۴	۸-۷-۱ قضیه
۲۴	۸-۱ مجموعه متناهی و نامتناهی
۲۴	۱-۸-۱ تعریف
۲۵	۲-۸-۱ تعریف

۲۵	۳-۸-۱ قضیه
۲۵	۴-۸-۱ مجموعه شمارا و ناشمارا
۲۵	۵-۸-۱ تعریف
۲۶	۶-۸-۱ قضیه
۲۶	۷-۸-۱ مجموعه محدب
۲۸	۸-۸-۱ قضیه
۲۸	۹-۸-۱ قضیه
۲۸	۱۰-۸-۱ قضیه
۲۹	خلاصه فصل اول
۲۹	خودآزمایی تشریحی فصل اول
۳۱	فصل دوم: منطق فازی
۳۱	هدف کلی
۳۱	هدف‌های یادگیری
۳۱	مقدمه
۳۲	۱-۲ منطق دوارزشی
۳۲	۱-۱-۲ تعریف گزاره
۳۳	۲-۲ تعریف زبان‌های صوری
۳۳	۱-۲-۲ تعریف زبان صوری
۳۳	۲-۲-۲ تعریف جدول ارزشی در منطق کلاسیک
۳۳	۳-۲-۲ تعریف
۳۳	۴-۲-۲ تعریف نقیض گزاره
۳۴	۳-۲ گزاره‌های منطقی مرکب
۳۵	۱-۳-۲ گزاره مرکب عطفی
۳۵	۲-۳-۲ گزاره مرکب فصلی
۳۵	۳-۳-۲ گزاره مرکب شرطی
۳۶	۴-۳-۲ گزاره مرکب دوشروطی
۳۶	۴-۲ جدول ارزش گزاره‌های مرکب
۳۷	۱-۴-۲ قضیه
۴۰	۵-۲ منطق سه‌ارزشی و چندارزشی
۴۲	۶-۲ منطق سه ارزشی
۴۲	۷-۲ منطق کلین و پریست
۴۵	۱-۷-۲ قضیه
۴۶	۸-۲ منطق بوشوار
۴۹	۹-۲ منطق سه ارزشی لوکاسیویچ
۵۰	۱-۹-۲ قضیه
۵۱	۱۰-۲ منطق سه ارزشی هیتینگ

۵۲	۱۱-۲ منطق سه ارزشی P'
۵۴	۱۲-۲ منطق ۴ ارزشی
۵۵	۱۳-۲ منطق چندارزشی
۵۵	۱-۱۳-۲ منطق k -ارزشی گودل
۵۵	۲-۱۳-۲ تعریف
۵۶	۳-۱۳-۲ منطق k -ارزشی لوکاسیویچ
۵۷	۴-۱۳-۲ گزاره
۵۷	۵-۱۳-۲ منطق k -ارزشی پست
۵۷	۱۴-۲ منطق بی‌نهایت ارزشی
۵۷	۱-۱۴-۲ منطق بی‌نهایت ارزشی لوکاسیویچ
۵۸	۲-۱۴-۲ منطق بی‌نهایت ارزشی گودل
۵۸	۳-۱۴-۲ قضیه
۵۹	۱۵-۲ منطق فازی
۶۰	۱۶-۲ مقایسه منطق فازی با سایر منطق‌های ریاضی
۶۲	۱۷-۲ مدل‌سازی ریاضیات
۶۲	خلاصه فصل دوم
۶۳	سؤال تشریحی فصل دوم

فصل سوم: نظریه مجموعه‌های فازی

۶۵	هدف کلی
۶۵	هدف‌های یادگیری
۶۵	مقدمه
۶۶	۱-۳ تعریف زیرمجموعه فازی
۷۵	۲-۳ ترکیب مجموعه‌های فازی به کمک عملگرهای منطقی
۷۶	۱-۲-۳ گزاره
۷۷	۳-۳ ترکیب روی زیرمجموعه‌های فازی دلخواه
۸۰	۱-۳-۳ قضیه
۸۳	۴-۳ α - برش
۸۳	۱-۴-۳ تعریف
۸۶	۲-۴-۳ قضیه
۸۶	۳-۴-۳ قضیه
۸۶	۴-۴-۳ قضیه
۸۷	۵-۴-۳ قضیه
۸۸	۶-۴-۳ قضیه
۸۹	۷-۴-۳ تعریف
۸۹	۸-۴-۳ قضیه (نخستین قضیه تجزیه مجموعه فازی)
۹۱	۹-۴-۳ قضیه (دومین قضیه تجزیه روی مجموعه‌های فازی)

۹۳	خلاصه فصل سوم
۹۳	خود آزمایی تشریحی فصل سوم
۹۵	فصل چهارم: جبر فازی
۹۵	هدف کلی
۹۵	هدف‌های یادگیری
۹۶	مقدمه
۹۶	۴-۱ اصل توسیع برای مجموعه فازی
۹۶	۴-۱-۱ تعریف
۹۷	۴-۱-۲ قضیه
۹۹	۴-۱-۳ قضیه
۱۰۱	۴-۱-۴ قضیه
۱۰۲	۴-۲ مقادیر فازی
۱۰۲	۴-۲-۱ تعریف
۱۰۲	۴-۲-۲ تعریف
۱۰۳	۴-۲-۳ گزاره
۱۰۳	۴-۲-۴ قضیه
۱۰۴	۴-۲-۵ قضیه
۱۰۴	۴-۲-۶ قضیه
۱۰۸	۴-۳ مجموعه‌های فازی محذب
۱۰۸	۴-۳-۱ تعریف
۱۰۸	۴-۳-۲ قضیه
۱۰۹	۴-۳-۳ تعریف
۱۱۰	۴-۳-۴ قضیه
۱۱۰	۴-۳-۵ تعریف
۱۱۰	۴-۳-۶ قضیه
۱۱۱	۴-۳-۷ قضیه
۱۱۳	۴-۳-۸ تعریف
۱۱۳	۴-۳-۹ قضیه
۱۲۱	۴-۴ عدد فازی
۱۲۱	۴-۴-۱ تعریف
۱۲۲	۴-۴-۲ گزاره
۱۲۳	۴-۴-۳ قضیه
۱۲۳	۴-۴-۴ قضیه
۱۲۹	۴-۵ عدد فازی مثلثی
۱۳۰	۴-۵-۱ تعریف
۱۳۱	۴-۵-۲ قضیه

۱۳۳	۴-۶ بازه فازی
۱۳۴	۴-۶-۱ تعریف
۱۳۴	۴-۶-۲ تعریف
۱۳۵	۴-۷ معادلات فازی
۱۳۶	۴-۷-۱ حل معادلات خطی $\mu_1 + \mu x = \mu_2$
۱۳۶	۴-۷-۲ قضیه
۱۳۷	۴-۷-۳ معادله ضربی $\mu_1 \cdot \mu x = \mu_2$
۱۳۹	۴-۷-۴ معادلات ضربی و جمعی $\mu_1 \mu x + \mu_2 = \mu_3$
۱۳۹	۴-۷-۵ معادلات مرتبه دوم فازی به صورت $\mu_1 \cdot \mu x^2 + \mu_2 \cdot \mu x + \mu_3 = \mu_4$
۱۴۰	۴-۷-۶ قضیه
۱۴۴	۴-۸ نامساوی فازی
۱۴۴	۴-۸-۱ تعریف
۱۴۵	۴-۸-۲ گزاره
۱۴۵	۴-۹ نامعادلات فازی
۱۴۵	۴-۹-۱ نامعادلات فازی $\mu_1 \mu x + \mu_2 \leq \mu_3$
۱۴۶	۴-۹-۲ نامعادلات فازی $\mu_1 \mu x^2 + \mu_2 \mu x + \mu_3 \geq \mu_4$
۱۴۶	خلاصه فصل چهارم
۱۴۷	خودآزمایی تشریحی فصل چهارم
۱۴۹	فصل پنجم: روابط فازی و ترکیبیات
۱۴۹	هدف کلی
۱۴۹	هدف‌های یادگیری
۱۴۹	مقدمه
۱۵۰	۵-۱ نرم‌های مثلثی
۱۵۰	۵-۱-۱ تعریف
۱۵۱	۵-۱-۲ گزاره
۱۵۲	۵-۱-۳ گزاره
۱۵۲	۵-۱-۴ تعریف
۱۵۲	۵-۱-۵ قضیه
۱۵۳	۵-۱-۶ تعریف
۱۵۳	۵-۱-۷ گزاره
۱۵۳	۵-۱-۸ تعریف
۱۵۴	۵-۱-۹ گزاره
۱۵۴	۵-۱-۱۰ نتیجه
۱۵۵	۵-۲ مولدهای t -نرم‌ها
۱۵۵	۵-۲-۱ تعریف

۱۵۵	۲-۲-۵ قضیه
۱۵۶	۳-۲-۵ قضیه
۱۵۶	۴-۲-۵ تعریف
۱۵۶	۵-۲-۵ تعریف
۱۵۷	۶-۲-۵ قضیه
۱۵۸	۷-۲-۵ قضیه
۱۵۸	۸-۲-۵ قضیه
۱۶۱	۳-۵ هم نرم مثلثی
۱۶۲	۱-۳-۵ تعریف
۱۶۲	۲-۳-۵ قضیه
۱۶۳	۳-۳-۵ تعریف
۱۶۳	۴-۳-۵ گزاره
۱۶۳	۴-۵ مولد t - هم نرم
۱۶۳	۱-۴-۵ قضیه
۱۶۵	۵-۵ استنتاج فازی
۱۶۶	۱-۵-۵ تعریف استنتاج فازی
۱۶۷	۲-۵-۵ تعریف
۱۶۷	۳-۵-۵ گزاره
۱۶۸	۴-۵-۵ قضیه
۱۶۹	۵-۵-۵ قضیه
۱۷۰	۶-۵ رابطه دوتایی فازی
۱۷۱	۱-۶-۵ تعریف
۱۷۲	۷-۵ ترکیب ماکزیمم - مینیمم روابط فازی
۱۷۲	۱-۷-۵ تعریف
۱۷۲	۸-۵ عملگر ترکیب ماکزیمم - مینیمم فازی
۱۷۳	۱-۸-۵ تعریف
۱۷۳	۲-۸-۵ تعریف
۱۷۶	۹-۵ تصویر رابطه فازی
۱۷۶	۱-۹-۵ تعریف
۱۷۶	۲-۹-۵ تعریف
۱۷۷	۳-۹-۵ گزاره
۱۷۸	۱۰-۵ رابطه هم ارزی فازی
۱۷۸	۱-۱۰-۵ تعریف
۱۷۹	۲-۱۰-۵ قضیه
۱۷۹	۳-۱۰-۵ قضیه
۱۸۲	۱۱-۵ افراز فازی

۱۸۲	۵-۱۱-۱ تعریف
۱۸۴	۵-۱۱-۲ تعریف
۱۸۵	۵-۱۲ عملیات جبری روی روابط فازی
۱۸۶	۵-۱۲-۱ تعریف
۱۸۷	۵-۱۳ توسیع مجموعه فازی به کمک رابطه فازی
۱۸۷	۵-۱۳-۱ تعریف
۱۸۸	۵-۱۴ فاصله فازی روی مجموعه فازی
۱۸۸	۵-۱۴-۱ تعریف
۱۸۸	۵-۱۴-۲ تعریف
۱۸۹	۵-۱۴-۳ تعریف
۱۸۹	۵-۱۴-۴ قضیه
۱۹۰	۵-۱۴-۵ تعریف
۱۹۲	خلاصه فصل پنجم
۱۹۲	خودآزمایی تشریحی فصل پنجم
۱۹۵	فصل ششم: گراف فازی و روابط
۱۹۵	هدف کلی
۱۹۵	هدف‌های یادگیری
۱۹۵	مقدمه
۱۹۶	۶-۱ گراف فازی
۱۹۶	۶-۱-۱ تعریف
۱۹۷	۶-۱-۲ تعریف
۱۹۸	۶-۱-۳ گزاره
۱۹۸	۶-۱-۴ گزاره
۱۹۹	۶-۱-۵ گزاره
۲۰۲	۶-۱-۶ تعریف
۲۰۳	۶-۱-۷ گزاره
۲۰۳	۶-۱-۸ تعریف
۲۰۴	۶-۱-۹ تعریف
۲۰۶	۶-۱-۱۰ تعریف
۲۰۷	۶-۱-۱۱ تعریف
۲۰۷	۶-۱-۱۲ قضیه
۲۰۸	۶-۱-۱۳ تعریف
۲۱۱	۶-۱-۱۴ قضیه
۲۱۲	۶-۱-۱۵ تعریف
۲۱۲	۶-۲ مکمل گراف فازی
۲۱۲	۶-۲-۱ تعریف

۲۱۳	۶-۲-۲ گزاره
۲۱۴	۶-۲-۳ تعریف
۲۱۴	۶-۲-۴ قضیه
۲۱۵	۶-۲-۵ قضیه
۲۱۵	۶-۳ عملیات جبری روی گراف‌های فازی
۲۱۶	۶-۳-۱ تعریف
۲۲۰	۶-۳-۲ قضیه
۲۲۰	۶-۳-۳ قضیه
۲۲۲	۶-۳-۴ قضیه
۲۲۶	۶-۴ درخت فازی
۲۲۶	۶-۴-۱ تعریف
۲۲۸	۶-۴-۲ تعریف
۲۲۹	۶-۴-۳ قضیه
۲۲۹	۶-۴-۴ گزاره
۲۳۱	۶-۴-۵ قضیه
۲۳۱	خلاصه فصل ششم
۲۳۱	خود آزمایی تشریحی فصل ششم
۲۳۵	نمادها
۲۳۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۴۲	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۴۵	منابع

پیشگفتار مؤلف

نظریه مجموعه‌های فازی به‌عنوان یکی از شاخه‌های علوم نوین همیشه موقعیت منحصر به فرد و زمینه پر از کاربردی داشته و دارد. ضرورت کاربرد مؤثر این علم در تمام شاخه‌های علمی تردیدناپذیر است. امروزه تمام علوم مهندسی به‌نوعی که به‌تخصص آن علم مرتبط است، وارد فنون علم فازی شده‌اند که گاهی برای تسریع نتایج علمی و در شهودی کردن نتایج عملی تأثیر بسزایی داشته‌است و البته در تمامی علوم غیرمهندسی هم آثار علوم فازی دیده می‌شود. از آنجایی که علوم فازی برپایه منطقی تحت عنوان منطق فازی استوار هستند، به‌صورت طبیعی مشکل‌گشای علوم منطقی هستند. باعث افتخار است که لطف‌علی رحیم‌اوغلو عسکرزاده لطفی مشهور به لطفی‌زاده به‌عنوان پدر علم فازی متولد سرزمین پرافتخارمان ایران اسلامی است که به‌عنوان ریاضیدان، مهندس کامپیوتر و مهندس برق در تمام دنیا شناخته شده‌است. در این کتاب پیش‌رو، ما کوشش کرده‌ایم تا مفاهیم، مطالب و قضایا را به‌صورت مفهومی و علمی چنان ارائه دهیم که بر اصل خودآموزی استوار باشد. برای این هدف و منظور هر فصل شامل مطالب کاربردی و تکنیکی است که موجب می‌شود خواننده نسبت به حل تمرینات مهارت لازم را به‌دست آورد. تلاش مؤلفان براین است که ضمن ارائه مفاهیم علم فازی در علوم پایه، نگاهی هم به سایر رشته‌های دیگر داشته‌باشند تا با ایجاد انگیزه خواننده به‌مسائل نمای کاربردی بدهند، که این کار با معرفی منابع و مقالات کاربردی داخل و خارج همراه است.

در فصل اول، مطالب مورد نیاز فصل های بعد و خاصیت های اساسی مجموعه ها ارائه شده است. در فصل دوم، به مفهوم منطق ریاضی و انواع منطق های چند ارزشی پرداخته ایم. فصل سوم، به مطالعه مجموعه های فازی و خواص آن می پردازد. در فصل چهارم، بر اساس مفاهیم مجموع عادی فازی به مقادیر فازی و اعداد فازی می پردازیم. در فصل پنجم، تعمیم روابط فازی را ارائه کرده و انواع آن را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده ایم. در فصل ششم به موضوع مهم و کاربردی گراف ها و درخت های فازی پرداخته ایم. از آنجایی که اثر علمی نمی تواند بدون ایراد باشد، از خوانندگان محترم به ویژه دانشجویان کارشناسی، کارشناسی ارشد، دکتری و اساتید محترم دانشگاه تقاضا می شود نظرات و پیشنهادهای خود را برای نویسندگان کتاب ارسال کنند تا در تجدید نظر برای چاپ های بعدی مورد استفاده قرار گیرد. در پایان بر خود لازم می دانیم از کسانی که در مراحل مختلف چاپ این کتاب مؤلفان را یاری کرده اند سپاسگزاری شود. در ابتدا از ویراستار محترم علمی کتاب جناب آقای دکتر آرشام برومند سعید که از نظرات و پیشنهادات ارزشمند ایشان استفاده کردیم تشکر و قدردانی می کنیم. از زحمات بی دریغ جناب آقای محمدرضا قاسمی منفرد، جناب آقای سید محمد موسوی، سرکار خانم کرمی و جناب آقای خاتمی که در تمامی مراحل نگارش این کتاب همراه و همکار مؤلفان بودند کمال تشکر و قدردانی را داریم. همچنین از همکاران محترم در مدیریت تدوین به خصوص جناب آقای راستگو به دلیل همراهی و راهنمایی های دلسوزانه صمیمانه تشکر می کنیم.

فصل اول

مقدمه‌ای بر نظریه مجموعه‌ها

هدف کلی

معرفی نظریه مجموعه‌ها، آشنایی با عملیات روی مجموعه‌ها، معرفی نگاشت‌ها به عنوان مجموعه‌ها و کاربرد آن در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرد.

هدف‌های یادگیری

- دانشجویان بعد از مطالعه این فصل باید بتوانند:
۱. با مفهوم مجموعه و پارادوکس‌های آن آشنا بشوند.
 ۲. عملیات روی مجموعه‌ها را بشناسند و به کار ببرند.
 ۳. روابط روی مجموعه‌ها را بشناسند و رابطه هم‌ارزی را معرفی کنند.
 ۴. افراز روی مجموعه‌ها و روابط هم‌ارزی را به کار بگیرند.
 ۵. نگاشت‌ها را بشناسند و به انواع آن پردازند.
 ۶. مجموعه‌های خاص مانند مجموعه‌های محدب را تجزیه و تحلیل کنند.
 ۷. آشنایی با مطالب فوق به منظور به کار بردن آن‌ها در تمام فصل‌های کتاب است.

مقدمه

گئورگ کانتور^۱ در سال ۱۸۴۵ در سن پترزبورگ روسیه متولد شد، ریاضیات را در دانشگاه برلین (۱۸۶۹-۱۸۶۳) فراگرفت و یکی از مباحث مورد علاقه وی سری‌های

مثلاثاتی بود که این علاقه موجب ابداع نظریه مجموعه‌ها و حساب اعداد ترامتناهی شد. مرسوم است که کانتور در سال ۱۸۹۵ نظریه نوین مجموعه‌ها را به وجود آورد. کانتور انگیزه این کار را سری‌های مثلاثاتی می‌داند. کانتور مجموعه را به صورت «هر دسته از اشیای متمایز در شعور یا فکر انسان‌ها به صورت کل» تعریف کرد. البته این تعریف مانع این موضوع نمی‌شود که مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود پیدا کند. برتراندر راسل^۱ (طی یک پارادوکس نشان داد که مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.) عیب تعریف در این است که واژه‌های مجموعه، دسته، گروه، گردایه و از این نظیر تعابیر یکسان هستند در یک تعریف نمی‌توان از خود واژه مجدد استفاده کرد روی این حساب واژه مجموعه را تعریف شده می‌پذیریم و اصولی مانند اصل موضوع، اصل تصریح، اصل موضوع مجموعه‌های توانی، اصل موضوع تعمیم، اصل موضوع مجموعه تهی، اصل موضوع جفت‌سازی و از این قبیل را اصول بنیادی قرار دهیم. در این فصل و این کتاب وارد نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها نمی‌شویم و به پذیرش آشنایی با مفهوم مجموعه‌ها و کارکردن با آن‌ها اکتفا می‌کنیم. مطالب این فصل از منابع [۱] و [۲] استفاده شده است.

۱-۱ مجموعه

در این بخش با مجموعه‌ها و عملیات روی آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱-۱-۱ تعریف

یک مجموعه، هر توده‌ای از عناصر است که از لحاظ حسی یا فکری متمایز و دارای خاصیت معینی باشند که بین دوا برو فارغ از ترتیب و تکرار قرار می‌گیرند. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند $A, B, \dots$ و عناصر آن را با حروف کوچک مانند $a, b, \dots$ یا شمایل مشابه نشان می‌دهیم.

مثال ۱: الف) $A = \{a, b, c\} = \{a, a, b, c\} = \{c, b, a\}$

ب) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (مجموعه اعداد طبیعی)،

ج) $\mathbb{N}_0 = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (مجموعه اعداد حسابی)،

د) $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$

$$\mathbb{N}_{o,k} = \{o, 1, 2, 3, \dots, k\} \quad (o)$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, o, 1, 2, 3, \dots\} \quad (و)$$

$$\mathbb{E} = \{\dots, -4, -2, o, 2, 4, \dots\} \quad (ز) \text{ (مجموعه اعداد زوج)}$$

$$\mathbb{O} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} \quad (ح) \text{ (مجموعه اعداد فرد)}$$

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \quad (ط) \text{ (مجموعه اعداد اول)}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq o \right\} \quad (ی)$$

ک) $\mathbb{Q}^c$ را مجموعه اعداد گنگ (اصم) می‌خوانیم و مجموعه تمام اعدادی است که نمی‌توانیم به صورت کسر بنویسیم. به عنوان مثال π یک عدد اصم است و در این مجموعه قرار دارد.

تذکره ۱: نماد سه نقطه در مجموعه‌ها به معنی «به همین ترتیب مجموعه ادامه پیدا می‌کند» است.

۱-۲ انواع نمایش یک مجموعه

در این بخش به تعریف انواع مجموعه‌هایی که در این سرفصل نیاز داریم می‌پردازیم.

۱-۲-۱ نمایش تشریحی

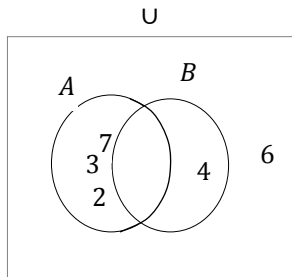
در این نمایش مجموعه با تمام جزئیات لازم، مشخص و معین است. در مثال قبل تمام نمایش‌های مجموعه‌ای تشریحی است.

۱-۲-۲ نمایش ون^۱

در این نمایش مجموعه‌ها را به صورت اشکال هندسی دایره، بیضی، مستطیل و از این قبیل نمایش می‌دهیم. در این نمایش با در نظر گرفتن یک مجموعه، در حالت شناخته شده یا محدود امکان پذیر است. اما اینکه بخواهیم مجموعه جهانی را در حالت کلی به عنوان مجموعه تمام مجموعه‌ها بپذیریم با ابهام همراه است. برتراند راسل (۱۸۷۲-۱۹۷۰) فیلسوف مشهور انگلیسی در سال ۱۹۲۰ طی یک پارادوکس نشان داد که مجموعه تمام

مجموعه‌ها وجود ندارد. بنابراین یک مجموعه را به‌عنوان مجموعه جهانی (مادر) می‌پذیریم و با U و به‌صورت مستطیل نشان می‌دهیم. بسته به اینکه با چه عناصری سروکار داریم مجموعه U را به‌عنوان بزرگ‌ترین مجموعه شامل آن عناصر و به‌عنوان مجموعه مادر تعریف می‌کنیم. دراصل بقیه مجموعه‌ها را در این کتاب با دایره نشان می‌دهیم.

مثال ۱: نمایش ون زیر



شکل ۱-۱. نمایش ون مجموعه

به‌صورت مجموعه‌های $U = \{2, 3, 7, 4, 6\}$, $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{4\}$ معرفی می‌شود.

۳-۲-۱ نمایش تصریحی

قبل از توضیح نمایش تصریحی مفهوم گزاره نما را ارائه می‌دهیم. هر گزاره نما جمله‌ای خبری است که در آن از متغیرهایی مانند $x, y, \dots$ به‌کاررفته است. گزاره نمایی که با x است را با $P(x)$ و گزاره نمایی که با y, x است را با $P(x, y)$ نشان می‌دهیم. در این نمایش با در نظر گرفتن یک عالم سخن (مجموعه‌ای که مرجع انتخاب عناصر ما است) مانند B با متغیرهایی مانند x و با گزاره نمای $P(x)$ (عبارتی که به‌خواص x می‌پردازد) مجموعه را به‌صورت $B = \{x \in A \mid P(x)\}$ در نظر می‌گیریم.

مثال ۲: الف) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x = 4\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{Q}^c \mid x^2 = 2\}$

ج). $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

۳-۱ نمایش فاصله‌ای (بازه‌ای) (مجموعه اعداد حقیقی)

در این نمایش عالم سخن (مجموعه مرجع) $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) است و برای هر دو عنصر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

الف) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

ب) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

ج) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

د) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

ه) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

مجموعه (الف) را مجموعه بسته، مجموعه (ب) را مجموعه نیم‌بسته یا نیم‌باز و مجموعه (ج)، (د) و (ه) را مجموعه باز می‌خوانیم.

۱-۳-۱ نمایش مجموعه تهی

مجموعه‌ای که شامل هیچ عنصری نباشد را مجموعه تهی می‌خوانیم و با $\emptyset$ یا O نشان می‌دهیم.

مثال ۱: الف) مجموعه انسان‌هایی که در کره ماه زندگی می‌کنند.

ب) $\{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 = 0\}$ ج) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\}$

۲-۳-۱ نمایش زوج مرتب

فرض کنید x و y دو عنصر متمایز و دلخواه باشند آنگاه زوج مرتب x و y را به صورت مجموعه $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ تعریف و نمایش می‌دهیم.

مثال ۲: گزاره جبری و عددی $(5, 6) = \{\{5\}, \{5, 6\}\}$ یک نمایش ساده و معمولی متقابل زوج مرتب به صورت مجموعه را نشان می‌دهد.

تذکر ۱: سه‌تایی مرتب برای عناصر متمایز x, y, t به صورت (x, y, t)

(x, y, t) تعریف و به طور کلی برای هر n تایی $(n \geq 4)$ تعمیم و تعریف می‌شود.

۳-۳-۱ قضیه

برای عناصر متمایز a, b, c, d دوزوج مرتب برابر هستند اگر و تنها اگر مؤلفه به مؤلفه برابر باشند. درواقع $(a, b) = (c, d)$ اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$.