



دانشگاه سindh
پم

نظريه مقدماتي اعداد

(رشته رياضي)

دکتر فرخنده فرضعلي پور

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

نه	پیشگفتار
۱	فصل اول: مطالب پیش نیاز و مفاهیم بنیادی
۱	هدف کلی
۱	هدف های یادگیری
۱	مقدمه
۲	۱-۱ میدان مرتب اعداد حقیقی
۴	۲-۱ اعداد طبیعی
۵	۳-۱ اعداد صحیح
۸	۴-۱ اصل خوش ترتیبی و نتایج آن
۱۳	۵-۱ قضیه دوجمله ای
۱۷	خلاصه فصل اول
۱۷	خودآزمایی های چهارگزینه ای فصل اول
۱۹	فصل دوم: بخش پذیری
۱۹	هدف کلی
۱۹	هدف های یادگیری
۲۰	مقدمه
۲۰	۱-۲ الگوریتم تقسیم
۲۳	۲-۲ بخش پذیری
۲۷	۳-۲ بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک
۳۶	۴-۲ الگوریتم اقلیدسی
۴۲	۵-۲ کوچک ترین مضرب مشترک
۴۸	۶-۲ معادلات سیاله (دیوفانتی) خطی
۵۷	خلاصه فصل دوم
۵۸	خودآزمایی های چهارگزینه ای فصل دوم

۶۱	فصل سوم: اعداد اول و قضیه بنیادی حساب
۶۱	هدف کلی
۶۱	هدف‌های یادگیری
۶۲	مقدمه
۶۲	۱-۳ قضیه بنیادی حساب
۶۷	۲-۳ غربال اراتستن
۷۵	۳-۳ تابع جزء صحیح و خواص آن
۸۳	۴-۳ دستگاه‌های شمار
۸۷	خلاصه فصل سوم
۸۸	خودآزمایی‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم
۹۱	فصل چهارم: هم‌نهشتی‌ها
۹۱	هدف کلی
۹۱	هدف‌های یادگیری
۹۱	مقدمه
۹۲	۱-۴ هم‌نهشتی‌ها و خواص اساسی آن
۱۰۱	۲-۴ دستگاه کامل مانده‌ها و دستگاه مخفف مانده‌ها
۱۰۵	۳-۴ معادلات هم‌نهشتی خطی
۱۱۱	۴-۴ قضایای فرما، اوایلر و ویلسن
۱۲۳	۵-۴ دستگاه هم‌نهشتی‌های خطی
۱۲۸	خلاصه فصل چهارم
۱۲۹	خودآزمایی‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۱۳۳	فصل پنجم: هم‌نهشتی‌های چندجمله‌ای و ریشه‌های اولیه
۱۳۳	هدف کلی
۱۳۳	هدف‌های یادگیری
۱۳۴	مقدمه
۱۳۴	۱-۵ هم‌نهشتی‌های چندجمله‌ای
۱۴۳	۲-۵ مرتبه یک عدد صحیح به پیمانه n
۱۴۷	۳-۵ ریشه‌های اولیه
۱۵۱	۴-۵ وجود ریشه‌های اولیه
۱۵۷	خلاصه فصل پنجم
۱۵۸	خودآزمایی‌های چهارگزینه‌ای فصل پنجم
۱۶۱	فصل ششم: توابع حسابی
۱۶۱	هدف کلی
۱۶۱	هدف‌های یادگیری
۱۶۱	مقدمه

۱۶۲	۶-۱ توابع حسابی ضربی
۱۷۱	۶-۲ تابع مویوس
۱۷۷	۶-۳ ضرب پیچشی
۱۸۴	۶-۴ اعداد تام
۱۹۰	۶-۵ اعداد مرسن
۱۹۶	خلاصه فصل ششم
۱۹۷	خودآزمایی‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم
۱۹۹	فصل هفتم: قانون تقابل مربعی
۱۹۹	هدف کلی
۱۹۹	هدف‌های یادگیری
۲۰۰	مقدمه
۲۰۰	۷-۱ مانده‌های درجه دوم
۲۰۶	۷-۲ نماد لژاندر و ویژگی‌های آن
۲۱۸	۷-۳ قانون تقابل مربعی
۲۲۶	۷-۴ همنهشتی‌های درجه دوم به پیمان یک عدد مرکب
۲۳۱	خلاصه فصل هفتم
۲۳۲	خودآزمایی‌های چهارگزینه‌ای فصل هفتم
۲۳۵	فصل هشتم: کسرهای مسلسل
۲۳۵	هدف کلی
۲۳۵	هدف‌های یادگیری
۲۳۶	مقدمه
۲۳۶	۸-۱ کسرهای مسلسل متناهی
۲۵۰	۸-۲ کسرهای مسلسل نامتناهی
۲۶۳	۸-۳ معادله پل ($x^2 - dy^2 = 1$)
۲۷۴	خلاصه فصل هشتم
۲۷۴	خودآزمایی‌های چهارگزینه‌ای فصل هشتم
۲۷۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۷۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۸۱	نمایه
۲۸۵	فهرست نمادها
۲۸۷	پاسخ‌نامه
۲۸۹	منابع

پیشگفتار

نظریه اعداد در جهان ریاضیات همیشه موقعیت منحصر به فردی داشته است. این امر به دلیل اهمیت تاریخی تردیدناپذیر این موضوع است. یکی از معدود رشته‌های علمی است که پیشینه برخی از نتیجه‌های قابل اثبات آن به زمانی می‌رسد که حتی فکر تأسیس دانشگاه یا آکادمی مطرح نبوده است. از دوران باستان، تقریباً در هر سده کشفیات جذاب تازه‌ای درباره ویژگی‌های اعداد صورت گرفته است؛ و بسیاری از بزرگان علوم ریاضی در مقطعی از فعالیت‌های خود در این حیطه از دانش به پژوهش پرداخته‌اند. چرا نظریه اعداد این چنین جاذبه مقاومت‌ناپذیری در نظر ریاضی‌دانان برجسته داشته است؟ یکی از پاسخ‌ها مبتنی بر ساده بودن صورت مسئله‌های آن است. گرچه حل بسیاری از مسئله‌های نظریه اعداد فوق‌العاده دشوار است، ولی می‌توان صورت آن‌ها را چنان ساده بیان کرد که حتی علاقه و کنجکاوی کسانی را که آموزش ریاضی زیادی ندیده‌اند، برانگیزد. برخی از به ظاهر ساده‌ترین مسئله‌های آن که سده‌ها در معرض زور آزمایی فکری بوده است، هنوز جزء غامض‌ترین مسئله‌های حل نشده در کل ریاضیات به حساب می‌آیند.

نظریه اعداد به ویژگی‌های اعداد صحیح و به طور اخص به اعداد صحیح مثبت (که اعداد طبیعی نیز معروف‌اند) می‌پردازد. پیشینه این نام‌گذاری نامناسب به یونانیان اولیه می‌رسد که در قاموس آن‌ها واژه «عدد» فقط به عدد صحیح مثبت اطلاق می‌شد.

در این کتاب کوشیده‌ایم مطالب و قضایا به‌نحوی بیان شود که بر اصل خودآموزی استوار باشد. برای این منظور، هر فصل شامل مثال‌های کاربردی و تکنیکی است که موجب می‌شود خواننده نسبت به حل تمرینات مهارت لازم را به‌دست آورد.

در فصل اول مطالب مورد نیاز فصل‌های بعد و خاصیت‌های اساسی اعداد صحیح و طبیعی مطرح می‌شود. بخش‌پذیری و قضیه الگوریتم تقسیم در فصل دوم بیان می‌شود. فصل سوم به مطالعه اعداد اول و کاربردهای آن می‌پردازد. در فصل چهارم با رابطه همنهشتی و خواص آن آشنا می‌شوید. فصل پنجم به حل و بحث همنهشتی‌های چندجمله‌ای و معرفی ریشه‌های اولیه می‌پردازد. در فصل ششم با انواع توابع حسابی و کاربردهای آن‌ها آشنا می‌شوید. در فصل هفتم مانده‌ها و نامانده‌های درجه دوم معرفی و با قانون تقابل مربعی آشنا می‌شوید. کسره‌های مسلسل و معادله پل که یکی از کاربردهای آن است در فصل هشتم مطرح می‌شود.

از خوانندگان، به‌ویژه دانشجویان و اساتید محترم دانشگاه تقاضا می‌شود نظرها و پیشنهادهای خود را برای نویسنده کتاب ارسال کنند تا در تجدیدنظر برای چاپ‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از کسانی که در مراحل مختلف چاپ کتاب اینجانب را یاری کرده‌اند، سپاسگزاری کنم. در ابتدا از ویراستار علمی محترم کتاب جناب آقای دکتر محمد حمیدی که از نظرات و پیشنهادات ارزشمند ایشان استفاده نمودم، تشکر و قدردانی می‌کنم. از زحمات بی‌دریغ همسرم جناب آقای دکتر پیمان غیاثوند که در تمامی مراحل تألیف کتاب همراه و همکار اینجانب بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از همکاران محترم در مدیریت تدوین به‌خصوص سرکار خانم معدلت صمیمانه تشکر می‌کنم.

فصل اول

مطالب پیش نیاز و مفاهیم بنیادی

هدف کلی

تشریح مختصر دستگاه میدان مرتب اعداد حقیقی، بیان خاصیت ارشمیدسی اعداد و آشنایی با حلقه اعداد صحیح و اعداد طبیعی که در فصل‌های بعد مورد بحث قرار می‌گیرند.

هدف‌های یادگیری

- دانشجویان بعد از مطالعه این فصل باید بتوانند:
۱. با ساختار اعداد صحیح آشنا شوند.
 ۲. اصل خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی را بدانند.
 ۳. اصل استقراء متناهی و استقراء قوی را بیان کنند.
 ۴. خاصیت ارشمیدسی اعداد را بدانند.
 ۵. مسائل و تمرین‌های مربوط به این فصل را به راحتی حل کنند.

مقدمه

در درس نظریه اعداد در موارد زیادی با اعداد حقیقی مواجه می‌شویم. مثلاً قلمرو تابع جزء صحیح، که در نظریه اعداد از اهمیت خاصی برخوردار است و کاربردهای فراوان دارد، مجموعه اعداد حقیقی است. در این فصل ابتدا با ساختمان مرتب اعداد حقیقی آشنا

می‌شویم و سپس با معرفی دستگاه‌های اعداد طبیعی و اعداد صحیح به بررسی خواص اعداد صحیح می‌پردازیم. به‌علاوه، چون در این درس به کاربردهای نظریه اعداد در نظریه گروه‌ها توجه شده و بحث ساختمان‌های جبری به میان آمده‌است، تعریف گروه آبدلی که یکی از اساسی‌ترین ساختمان‌های جبری است و آشنایی با آن باعث درک وسیع‌تر و عمیق‌تر مفهوم میدان و دیگر ساختمان‌های جبری می‌شود، ضرورت پیدا می‌کند. بنابراین در این فصل، مفاهیم بنیادی اعداد صحیح و مطالب مورد نیاز فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم.

۱-۱ میدان مرتب اعداد حقیقی

در این بخش، ساختمان میدان مرتب اعداد حقیقی را معرفی و قضایای آن را بیان می‌کنیم. در آغاز بحث را با تعریف زیر شروع می‌کنیم:

۱-۱-۱ تعریف

فرض کنید G یک مجموعه ناتهی باشد و عمل دوتایی $*$ روی آن تعریف شده باشد. گوئیم $(G, *)$ یک گروه است هرگاه داشته باشیم:

(الف) G با عمل $*$ شرکت‌پذیر باشد، یعنی به‌ازای هر $a, b, c \in G$ ؛ اتحاد
$$a * (b * c) = (a * b) * c$$
 برقرار باشد.

(ب) G دارای عضو همانی باشد، یعنی عنصری مانند $e \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in G$ ؛ اتحاد $a * e = e * a = a$ برقرار باشد.

(ج) هر عنصر G دارای عضو معکوس باشد، یعنی به‌ازای هر $a \in G$ ، عنصری مانند $b \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که اتحاد $a * b = b * a = e$ برقرار باشد.

و هرگاه به‌ازای هر $a, b \in G$ ، $a * b = b * a$ ، آن‌گاه $(G, *)$ را یک گروه آبدلی گوئیم.

۲-۱-۱ تعریف

فرض کنید F مجموعه‌ای با حداقل دو عضو باشد که دو عمل جمع $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ روی آن تعریف شده باشد. گوئیم $(F, +, \cdot)$ یک میدان جبری است، هرگاه داشته باشیم:

الف) $(F, +)$ یک گروه آبدلی باشد.

ب) $(F - \{0\}, \cdot)$ یک گروه آبدلی باشد.

۳-۱-۱ تعریف

فرض کنید $(F, +, \cdot)$ یک میدان باشد و یک رابطه ترتیبی اکید (رابطه‌ای که تعدی و پاد متقارن) مانند $(<)$ روی F تعریف شده باشد. گوییم F نسبت به $<$ یک میدان مرتب است، هرگاه

الف) به ازای هر $a, b, c \in F$ ؛ اگر $a < b$ ، آن‌گاه $a + c < b + c$.

ب) به ازای هر $a, b, c \in F$ ؛ اگر $a < b$ و $c > 0$ ، آن‌گاه $ac < bc$.

اکنون به اساسی‌ترین کلام این مبحث می‌رسیم:

۴-۱-۱ قضیه

مجموعه اعداد حقیقی که آن را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم و اعداد 10^0 از اعضای آن به‌شمار می‌روند، با عمل جمع و ضرب معمولی و رابطه کوچک‌تر یا مساوی معمولی $(\leq)$ یک میدان مرتب است.

برای درک مفهوم اعداد طبیعی و اعداد صحیح، خواصی از میدان مرتب اعداد حقیقی را بیان می‌کنیم.

۵-۱-۱ قضیه

فرض کنید a, b, c اعضای دلخواهی از $\mathbb{R}$ باشند. در این صورت داریم:

الف) هرگاه $a + b = a + c$ ، آن‌گاه $b = c$.

ب) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

پ) $-(-a) = a$

ت) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

ث) $-a = (-1)a$

ج) هرگاه $a > 0$ ، آن‌گاه $-a < 0$ و هرگاه $a < 0$ ، آن‌گاه $-a > 0$.

چ) هرگاه $a \neq 0$ ، آن‌گاه $a^2 > 0$.

(ح) $1 > 0$

(خ) هرگاه $a < b$ ، آنگاه $-b < -a$

۱-۱-۶ نتیجه $\dots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \dots$

این نتیجه نشان می‌دهد که هر میدان مرتب، به‌ویژه میدان مرتب اعداد حقیقی، نامتناهی است و اعداد $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ در آن عضویت دارند. چنان‌که ملاحظه می‌کنیم اگر x یکی از این اعداد باشد، $x+1$ نیز یکی از آن‌ها است. بنابراین تعریف زیر را داریم:

۱-۱-۷ تعریف

میدان مرتب $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$.

(الف) A را یکدار گوئیم، هرگاه $1 \in A$.

(ب) A را استقرایی گوئیم در صورتی‌که اگر $a \in A$ ، آنگاه $a+1 \in A$.

۱-۲ اعداد طبیعی

مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$ یکی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است که یکدار و استقرایی است. $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌های یکدار و استقرایی دیگری نیز دارد. مثلاً $\{0, 1, 2, \dots\}$ و $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. از این نمونه‌ها برمی‌آید که مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots\}$ کوچک‌ترین زیرمجموعه $\mathbb{R}$ است که یکدار و استقرایی است.

۱-۲-۱ تعریف

اشتراک همه مجموعه‌های یکدار و استقرایی از اعداد حقیقی را مجموعه اعداد طبیعی گوئیم و آن را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. این تعریف مستلزم اصل استقرای ریاضی است.

۱-۲-۲ اصل استقرای ریاضی

اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ و A یکدار و استقرایی باشد، آنگاه $A = \mathbb{N}$.

اثبات: چون A یک‌دار و استقرایی است، پس بنابه تعریف ۱-۲-۱، $\mathbb{N} \subseteq A$ ، بنابراین $A = \mathbb{N}$.

۱-۳-۱ اعداد صحیح

یکی دیگر از ساختمان‌های ریاضی که بسیار مورد توجه است، حلقه است. که در این جا برای یادآوری، تعریف آن را بیان می‌کنیم. در این درس، چنان‌که خواهید دید با چند حلقه خاص آشنا می‌شویم.

۱-۳-۱ تعریف

فرض کنید R یک مجموعه ناتهی باشد که دو عمل جمع و ضرب روی آن تعریف شده باشد. گوئیم $(R, +, \cdot)$ یک حلقه است هرگاه داشته باشیم:

(الف) $(R, +)$ یک گروه آبدی باشد.

(ب) عمل ضرب روی R شرکت‌پذیر و نسبت به جمع، توزیع‌پذیر باشد. هرگاه حلقه $(R, +, \cdot)$ با عمل ضرب تعویض‌پذیر باشد و عنصری مانند $1 \in R$ موجود باشد که به‌ازای هر $a \in R$ ، داشته باشیم $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. آن‌گاه $(R, +, \cdot)$ را یک حلقه تعویض‌پذیر یک‌دار گوئیم.

اکنون می‌خواهیم مجموعه اعداد صحیح را معرفی کنیم و نشان می‌دهیم که مجموعه اعداد صحیح با عمل جمع و ضرب معمولی یک حلقه تعویض‌پذیر یک‌دار است.

۱-۳-۲ تعریف

مجموعه اعداد صحیح که آن را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم، چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \quad \text{که} \quad -\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

به استناد خواص جمع و ضرب اعداد حقیقی، برای اینکه ثابت کنیم با این اعمال، $\mathbb{Z}$ یک حلقه تعویض‌پذیر یک‌دار است، کافی است ثابت کنیم که حاصل جمع و

حاصل ضرب هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است. برای نیل به این مقصود، بیان و اثبات چند لم زیر ضروری است.

۱-۳-۳ لم

هرگاه $n \in \mathbb{N}$ ، آن گاه $n-1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

اثبات: فرض کنید $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n-1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. به آسانی دیده می شود که A یک مجموعه یکدار و استقرایی از اعداد طبیعی است، و بنابراین $A = \mathbb{N}$. ■

۱-۳-۴ لم

$\mathbb{Z}$ استقرایی است و به علاوه، اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، آن گاه $-x \in \mathbb{Z}$.

اثبات: کافی است ثابت کنیم که $\mathbb{Z}$ استقرایی است. خاصیت دیگر مستقیم از تعریف $\mathbb{Z}$ نتیجه می شود. فرض کنید m یک عدد صحیح دلخواه باشد. اگر $m = 0$ یا $m \in \mathbb{N}$ ، از تعریف $\mathbb{Z}$ با توجه به اینکه $\mathbb{N}$ استقرایی است نتیجه می گیریم $m+1 \in \mathbb{Z}$. فرض کنید m به صورت $-n$ باشد که در آن $n \in \mathbb{N}$. در این صورت بنا به لم ۱-۳-۳، $n-1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. که یکی از دو حالت $n-1 \in \mathbb{N}$ یا $n-1 \in \{0\}$ رخ می دهد. اما در هر یک از این دو حالت $m+1 = -(n-1) \in \mathbb{Z}$. بنابراین از تعریف $\mathbb{Z}$ نتیجه می گیریم که $m+1 \in \mathbb{Z}$ و برهان تمام است. ■

۱-۳-۵ لم

اگر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن گاه $m+n \in \mathbb{Z}$.

اثبات: فرض کنید $m \in \mathbb{Z}$. را ثابت نگه می داریم و به استقراء نسبت به n ثابت می کنیم که $m+n \in \mathbb{Z}$. چون $\mathbb{Z}$ استقرایی است از فرض $m \in \mathbb{Z}$ ، نتیجه می گیریم $m+1 \in \mathbb{Z}$. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $m+n \in \mathbb{Z}$ ، تساوی $m+(n+1) = (m+n)+1$ ایجاب می کند که $m+(n+1) \in \mathbb{Z}$ ؛ و بنابراین اثبات به استقراء تمام است. ■

۱-۳-۶ قضیه

حاصل جمع هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است.

اثبات: فرض کنید n, m دو عدد صحیح باشند. بنابر لم ۱-۳-۵، اگر $n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه $m + n \in \mathbb{Z}$. اگر $n = 0$ ، آن‌گاه $m + 0 = m$. فرض کنید $n = -p$ که در آن $p \in \mathbb{N}$. بنا به حالت اول، $-m + p \in \mathbb{Z}$. اما $m + n = m - p = -(-m + p)$ از این‌رو، از لم ۱-۳-۴ نتیجه می‌گیریم که $m + n \in \mathbb{Z}$ و برهان تمام است. ■

۱-۳-۷ قضیه

حاصل ضرب هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است.

اثبات: فرض کنید n, m دو عدد صحیح باشند. اگر $n = 0$ ، آن‌گاه بنا به قضیه ۱-۱-۵، $m \cdot n = m \cdot 0 = 0$. اگر $n = -p$ که در آن $p \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه با توجه به قضیه ۱-۱-۵، $m \cdot n = m \cdot (-p) = -(m \cdot p)$. بنابراین برای اتمام برهان، کافی است ثابت کنیم که اگر $n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه $m \cdot n \in \mathbb{N}$. اثبات این حکم به آسانی و به استقراء نتیجه می‌شود. ■

بنابراین از مطالب بالا و از اینکه $1 \in \mathbb{Z}$ و برای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ، همچنین به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{Z}$ ، $xy = yx$ ، قضیه زیر نتیجه می‌شود:

۱-۳-۸ قضیه

مجموعه اعداد صحیح با عمل جمع و ضرب معمولی یک حلقه تعویض‌پذیر یک‌دار است.

در نهایت با بیان و اثبات یکی دیگر از نتایج تعریف ۱-۳-۲، این بخش را به پایان می‌رسانیم.

۱-۳-۹ قضیه

هر عدد صحیح فقط و فقط وقتی طبیعی است که مثبت باشد.

اثبات: با توجه به تعریف، همه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از صفرند و بنابراین اثبات لزوم برقرار است. برای اثبات کفایت، فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت باشد. تعریف ۱-۳-۲ نشان می‌دهد که اگر $m \notin \mathbb{N}$ ، عددی طبیعی مانند n وجود دارد

به طوری که $m = -n$. لذا $m + n = -n + n = 0$ (یک حلقه است) که این یک تناقض است زیرا $n > 0$, $m > 0$. بنابراین فرض $m \notin \mathbb{N}$ باطل و برهان تمام است. ■

۴-۱ اصل خوش ترتیبی و نتایج آن

اکنون می‌خواهیم اصلی که مرسوم به اصل خوش ترتیبی است را معرفی کنیم. این اصل، معادل اصل استقراء ریاضی بوده و دارای اهمیت و کاربردهای فراوانی است.

۴-۱-۱ تعریف

(الف) مجموعه غیر تهی S را نسبت به رابطه $\leq$ مرتب جزئی گوئیم، هرگاه رابطه $\leq$ روی S دارای خاصیت انعکاسی، پادمتقارن و تعدی باشد. به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی با رابطه کوچک تر مساوی معمولی، یک مجموعه مرتب جزئی است. همچنین، مجموعه $P(A)$ (مجموعه توانی A) با رابطه زیرمجموعه بودن ($\subseteq$)، یک مجموعه مرتب جزئی است.

(ب) مجموعه مرتب جزئی S را نسبت به رابطه $\leq$ مرتب کلی گوئیم، هرگاه عناصر آن مقایسه پذیر باشند، یعنی برای هر $x, y \in S$ ، $x \leq y$ یا $y \leq x$. به عنوان مثال، هریک از مجموعه‌های $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ با رابطه کوچک تر یا مساوی معمولی، یک مجموعه مرتب کلی است.

۴-۱-۲ تعریف

فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $\emptyset \neq E \subseteq S$. در این صورت (الف) عنصر $\alpha \in S$ را یک کران پایین E گوئیم، هرگاه به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $\alpha \leq x$.

(ب) عنصر $\beta \in S$ را یک کران بالای E گوئیم، هرگاه به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $x \leq \beta$.

۴-۱-۳ تعریف

فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $\emptyset \neq E \subseteq S$. در این صورت

الف) بزرگ‌ترین کران پایین E را در صورت وجود، اینفیمم E می‌گوییم و با نماد $\inf(E)$ نمایش می‌دهیم.

ب) کوچک‌ترین کران بالای E را در صورت وجود، سوپریم E می‌گوییم و با نماد $\sup(E)$ نمایش می‌دهیم.

۴-۴-۱ تعریف

فرض کنید $(E, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. در این صورت

الف) عنصر $e \in E$ را عضو ابتدای E می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر $a \in E$ ؛ $e \leq a$.

ب) عنصر $e' \in E$ را عضو انتهای E می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر $b \in E$ ؛ $b \leq e'$.

۵-۴-۱ اصل خوش‌ترتیبی

هر زیرمجموعه ناتهی S از اعداد صحیح مثبت، دارای عضو ابتدا است.

۶-۴-۱ قضیه (خاصیت ارشمیدسی)

اگر a, b اعداد صحیح مثبت باشند، آن‌گاه یک عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌طوری‌که $na > b$.

اثبات: فرض کنید (فرض خلف) a, b ای موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n ؛ $na \leq b$.

در این صورت مجموعه ناتهی $\{n \mid \text{یک عدد صحیح مثبت است} \mid b - na\}$ بنا به اصل خوش‌ترتیبی دارای کوچک‌ترین عضو مانند $b - ma$ است. توجه کنید که $a(m+1) - b$ نیز در S واقع است، زیرا S حاوی همه این‌گونه اعداد صحیح است. به‌علاوه، $b - ma < b - (m+1)a = (b - ma) - a$ که متناقض با انتخاب $b - ma$ به‌عنوان کوچک‌ترین عدد صحیح متعلق به S است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است. ■

اصل خوش‌ترتیبی مستلزم قضیه استقراء متناهی است.

۷-۴-۱ قضیه (نخستین اصل از استقراء متناهی)

فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $p(n)$ یک گزاره نما باشد به طوری که الف) $p(1)$ درست باشد.

ب) هرگاه $p(k)$ درست باشد، بتوان نتیجه گرفت $p(k+1)$ درست است.

در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $p(n)$ درست است.

اثبات: فرض کنید $\{p(n) \text{ درست است} \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $E = \mathbb{N} - A$. کافی است نشان دهیم $A = \emptyset$. (اثبات با استفاده از فرض خلف) فرض کنید $A \neq \emptyset$. در این صورت $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$. طبق اصل خوش ترتیبی، A دارای عضو ابتدا مانند a است. چون $1 \in E$ ، پس $1 \notin A$. در نتیجه $a > 1$ ، بنابراین $a-1 > 0$. از طرفی $a-1 \notin A$ (چون a عضو ابتدا A است). بنابراین $a-1 \in E$ ، در نتیجه طبق فرض داریم $a = (a-1) + 1 \in E$ که با $a \in A$ در تناقض است، بنابراین $A = \emptyset$. در نتیجه $E = A$ ، یعنی برای هر عدد طبیعی n ، $p(n)$ درست است. ■

مثال

نشان دهید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل: اثبات به روش استقراء. اگر $n=1$ ، آنگاه $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ ، یعنی $p(1)$

درست است. فرض کنید $p(k)$ درست باشد؛

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

حال درستی $p(k+1)$ را نشان می دهیم. طرفین فرض استقراء را با $(k+1)^2$

جمع می کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

لذا طبق قضیه استقراء، رابطه فوق برای هر عدد صحیح مثبت n درست است. ■

مثال

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد که $1+a \geq 0$. در این صورت به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ؛
 $(1+a)^n \geq 1+na$.

حل: فرض کنید $n=1$. در این صورت $(1+a)^1 \geq 1+1a$. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت دلخواه باشد که $(1+a)^k \geq 1+ka$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (1+a)^{k+1} &= (1+a)^k (1+a) \geq (1+ka)(1+a) \\ &= 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a \end{aligned}$$

در نتیجه بنا به قضیه استقراء، حکم برقرار است. ■

مثال

نشان دهید به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ؛

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

حل: فرض کنید $n=1$ ، $1! = (1+1)! - 1$. فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت دلخواه باشد که $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + k(k!) = (k+1)! - 1$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + k(k!) + (k+1)(k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)!(1+k+1) - 1 \\ &= (k+1)!(k+2) - 1 \\ &= (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

در نتیجه بنا به قضیه استقراء، حکم برقرار است. ■

اصل زیر بیان می‌کند که استقرای متناهی را می‌توان طوری تعمیم داد که شروع اثبات به‌جای عدد یک از هر عدد صحیح مثبت دیگری باشد.

۸-۴-۱ دومین اصل از استقراء متناهی

اگر m یک عدد صحیح مثبت و برای $n \geq m$ یک گزاره نما باشد به‌طوری‌که الف) $p(m)$ درست باشد.