



نظريه حلقه و مدول

(کارشناسی ارشد ریاضی)

دکتر سعید رجائی دکتر فیصل حسنی

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «إِقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

نمادها و علامت‌ها.....	هفت
پیشگفتار.....	یازده
فصل ۱. حلقه‌ها و مدول‌ها.....	۱
هدف کلی.....	۱
هدف‌های یادگیری.....	۱
مقدمه.....	۲
۱-۱ حلقه و زیرحلقه.....	۳
۲-۱ حاصل ضرب‌ها و حلقه‌های تابع.....	۲۰
۳-۱ مدول‌ها و هم‌ریختی مدول‌ها.....	۲۸
خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول.....	۵۵
خودآزمایی تشریحی فصل اول.....	۵۷
پاسخ خودآزمایی تشریحی فصل اول.....	۵۹
تمرین فصل اول.....	۶۳
خلاصه فصل اول.....	۶۶
فصل ۲. تجزیه حلقه‌ها.....	۶۷
هدف کلی.....	۶۷
هدف‌های یادگیری.....	۶۷
مقدمه.....	۶۸
۱-۲ حلقه‌های درون‌ریختی.....	۶۹
۲-۲ جمع مستقیم و حاصل ضرب مستقیم مدول‌ها.....	۸۷
۳-۲ زیرمدول‌های اساسی و ناچیز.....	۹۵
۴-۲ رده‌های تولیدشده و هم‌تولیدشده.....	۱۰۳
خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم.....	۱۱۷
خودآزمایی تشریحی فصل دوم.....	۱۱۹

پاسخ خودآزمایی تشریحی فصل دوم.....	۱۲۱
تمرین فصل دوم.....	۱۲۴
خلاصه فصل دوم.....	۱۲۹
فصل ۳. شرایط متاهی برای مدول‌ها.....	۱۳۱
هدف کلی.....	۱۳۱
هدف‌های یادگیری.....	۱۳۱
مقدمه.....	۱۳۲
۳-۱ مدول‌های نیم‌ساده، شناسه و رادیکال مدول.....	۱۳۳
۳-۲ رادیکال جاکسون مدول‌ها.....	۱۳۹
۳-۳ مدول‌های با تولید متاهی و متاهی هم‌مولد و شرایط زنجیر.....	۱۴۲
۳-۴ تجزیه‌های تجزیه‌ناپذیر از مدول‌ها.....	۱۵۹
خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل سوم.....	۱۷۰
خودآزمایی تشریحی فصل سوم.....	۱۷۲
پاسخ خودآزمایی تشریحی فصل سوم.....	۱۷۴
تمرین فصل سوم.....	۱۷۸
خلاصه فصل سوم.....	۱۸۲
فصل ۴. قضیه‌های رده‌ای ساختار حلقه.....	۱۸۵
هدف کلی.....	۱۸۵
هدف‌های یادگیری.....	۱۸۵
مقدمه.....	۱۸۶
۴-۱ حلقه‌های نیم‌ساده.....	۱۸۷
۴-۲ رده‌بندی از رادیکال جاکسون حلقه‌ها.....	۱۹۸
خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل چهارم.....	۲۱۲
خودآزمایی تشریحی فصل چهارم.....	۲۱۴
پاسخ خودآزمایی تشریحی فصل چهارم.....	۲۱۵
تمرین فصل چهارم.....	۲۲۱
خلاصه فصل چهارم.....	۲۲۵
فهرست نمایه.....	۲۲۷
واژه‌نامه فارسی - انگلیسی.....	۲۲۹
مراجع.....	۲۳۱

نمادها و علامتها

مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه اعداد صحیح نامنفی	$\mathbb{N}_0$
مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
رابطه زیرمجموعه بودن (شمولیت)	$\subseteq$
رابطه زیرمجموعه سربه بودن	$\subset$
رابطه شامل بودن	$\supseteq$
رابطه شامل بودن اکید	$\supset$
مجموعه توانی X (مجموعه شامل همه زیر مجموعه های X)	$P(X)$
کوچک ترین کران بالای a و b	$a \vee b$
بزرگ ترین کران پایین a و b	$a \wedge b$
کوچک ترین مضرب مشترک اعداد صحیح a و b	$[a, b]$
بزرگ ترین شمارنده مشترک اعداد صحیح a و b	(a, b)
جمع مستقیم A و B	$A \oplus B$
ضرب تانسوری A و B	$A \otimes_R B$

رادیکال جاکبسون حلقه R (اشتراک ایده‌آل‌های بیشین)	$J(R)$
رادیکال پوچ حلقه R	$Rad(R)$
رادیکال اول حلقه R (اشتراک ایده‌آل‌های اول)	$rad(R)$
قلب مدول M	$Soc(M)$
رادیکال مدول M	$rad(M)$
زیرمدول تابی M	$T(M)$
پوش انژکتیو مدول M	$E(M)$
مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های از حلقه R	$M_n(R)$
مجموعه ماتریس‌های وارون‌پذیر 2×2 با درایه‌های حقیقی	$GL(\mathbb{R}, 2)$
مرکز حلقه R	$C(R)$
مجموعه همه ایده‌آل‌های اول حلقه R	$Spec(R)$
مجموعه تمام ایده‌آل‌های بیشین حلقه R	$Max(R)$
مجموعه تمام زیرمدول‌های بیشین از مدول M	$Max(M)$
پوچ رادیکال حلقه R (مجموعه همه عضوهای پوچ توان حلقه R)	$N(R)$
مجموعه تمام شمارنده‌های صفر حلقه R	$Z(R) = Zdv(R)$
رسته همه R -مدول‌های چپ	$R - Mod$
رسته همه R -مدول‌های راست	$Mod - R$
مجموعه همه زیرمدول‌های اول M	$Spec(M)$
مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه R که شامل I هستند.	$V(I)$
مجموعه ایده‌آل‌های کمین حلقه R که شامل I هستند.	$Min(I)$
مجموعه همه ترکیبات A -خطی از $X \subseteq M$ به قسمی که $A \subseteq R$	AX
زیرمدول اساسی M است.	$K K \leq_e M$
زیرمدول ناچیز M است.	$K K \ll M$
مجموعه همه R - هم‌ریختی‌های مدولی از M به N	$Hom_R(M, N)$
مدول تولیدشده توسط مجموعه $\bigcup_{i \in I} M_i$	$\sum_{i \in I} M_i$
رده از همه مدول‌های تولیدشده توسط $\mathcal{U}$	$Gen(\mathcal{U})$
رده از همه مدول‌های هم‌تولیدشده توسط $\mathcal{U}$	$Cog(\mathcal{U})$

ردهٔ با تولید متناهی توسط $\mathcal{U}$	$FGen(\mathcal{U})$
ردهٔ متناهی هم‌مولد توسط $\mathcal{U}$	$FCog(\mathcal{U})$
اثر از $\mathcal{U}$ در M	$Tr_M(\mathcal{U}) = Tr(\mathcal{U}, M)$
واگر از $\mathcal{U}$ در M	$Rej_M(\mathcal{U}) = Rej(\mathcal{U}, M)$
پوچ‌ساز چپ ${}_R M$	$l_R(M)$
پوچ‌ساز راست M_R	$r_R(M)$
یک $(R - S)$ - دومدول M	${}_R M_S$
کاردینال مجموعهٔ A	$card(A)$

پیشگفتار

این کتاب در باب آشنایی بیشتر دانشجویان مقطع کارشناسی ارشد با مفاهیم نظریه حلقه و مدول نگارش شده است. هدف مؤلفین از تدوین کتاب حاضر آشنایی دانشجویان با مفاهیم پیشرفته نظریه حلقه و مدول و در مواردی آشناسدن با موضوعات جدیدی در این حوزه می باشد که توسط محققان و متخصصان اخیراً مورد تحقیق و پژوهش قرار گرفته است. واژه های لاتین که در واژه نامه آمده براساس واژه نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران معادل سازی شده است.

در این کتاب فرض بر این است که خواننده تا اندازه ای با مفاهیمی از نظریه گروه ها و همچنین نظریه حلقه های دوره کارشناسی آشنایی داشته باشد. با وجود این تصور جهت یادآوری مطالب مقدماتی در فصل اول به طور مختصر مفاهیم اصلی را خاطر نشان می سازیم و در مواردی موضوعات را به طور گسترده تری مورد بررسی قرار می دهیم. برای مطالعه بیشتر در بحث نظریه حلقه و مدول دانشجو می تواند به مراجع ذکر شده در انتهای کتاب مراجعه کند. از آنجا که فراگیری زبان تخصصی برای دانشجویان مقطع کارشناسی ارشد از اهمیت بسیاری برخوردار است، سعی شده که برای هر اصطلاح ریاضی، معادل اصلی آن به صورت زیرنویس آورده شود. بنابراین به دانشجویان اکیداً توصیه می شود که معادل لاتین اصطلاحات ریاضی آورده شده در انتهای هر صفحه را به خاطر بسپارند.

در پایان هر فصل تمرین هایی تحت عنوان خودآزمایی به همراه پاسخ آن ها و در بعضی موارد راهنمایی حل آن ها آورده شده است که توصیه می شود دانشجویان خود به حل آن ها مبادرت نمایند و سپس راه حل داده شده را با پاسخ خود مقایسه کنند. ضمناً

باید این نکته را یادآوری کنیم که حل بعضی از تمرین‌ها با روش‌های متفاوتی امکان‌پذیر است و راه‌حل ارائه‌شده لزوماً منحصر به فرد نمی‌باشد. در پایان هر فصل تمرین‌هایی را آورده‌ایم که باعث تفکر و تلاش در جهت فهم مطالب متناسب با همان فصل و درک ارتباط بین قضایا خواهد شد. از آنجا که در تدوین هر اثر علمی لغزش و خطا اجتناب‌ناپذیر است از این‌رو از دانش‌پژوهان و دانشجویان ارجمند انتظار می‌رود که نظرات اصلاحی خود را به ایمیل زیر ارسال نمایند.

saeed_rajace@pnu.ac.ir

فصل اول

حلقه‌ها و مدول‌ها

هدف کلی

در این فصل ابتدا به یادآوری مفاهیم اساسی نظریه حلقه و ایده‌آل می‌پردازیم. بسیاری از این مفاهیم را دانشجو در دوره کارشناسی فرا گرفته است ولی به دلیل اهمیت به‌طور مختصر آن‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش ۲، مفاهیم اساسی حلقه، ایده‌آل، زیرحلقه، حوزه صحیح، حلقه تقسیم، میدان و شبکه کامل را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳، حلقه حاصل ضرب (کارتزین) برای یک خانواده حلقه‌ها را بیان کرده و قضایایی در مورد آن‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم، سپس مفهوم - جبر و ضرب تانسوری آن‌ها و نیز ایده‌آل بیشین و اول چپ (راست) یک حلقه را مطالعه می‌کنیم. در ادامه این بخش مفاهیم حلقه موضعی و نیم‌موضعی و اعضای خودتوان، پوچ‌توان و منظم و قضایایی در مورد آن‌ها را بیان خواهیم کرد. در بخش ۴، به معرفی مدول‌های چپ (راست)، دومدول‌ها، زیرمدول‌های آن‌ها و هم‌ریختی‌های متناظر می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که مجموعه $\mathcal{L}(M)$ از تمام زیرمدول‌های یک R -مدول چپ M یک شبکه کامل است. در ادامه یک رده‌بندی حلقه‌های چپ نیم‌ساده برای یک حلقه یک‌دار R را ارائه می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر در بعضی از مفاهیم این فصل خواننده می‌تواند به منابع مراجعه کند.

هدف‌های یادگیری

- دانشجو پس از مطالعه این فصل باید توانایی‌های زیر را داشته باشد.
۱. لم ژرن را بداند و بتواند در قضایا و تمرین‌ها از آن استفاده کند.

۲. تعریف دو ایده‌آل متباین و اثبات قضایای مربوط به آن را بدانند.
۳. ساختار R -مدول چپ (راست) و $(R - S)$ - دومدول و همچنین زیرمدول‌های آن‌ها را بشناسد و در هر مورد مثال‌هایی را ارائه کند.
۴. مفهوم همریختی چپ (راست) R -مدول‌ها و همریختی $(R - S)$ -دومدول‌ها را بدانند.
۵. معیار زیرمدول‌بودن را بدانند و با استفاده از آن بتواند تشخیص بدهد که آیا یک زیرمجموعه N از یک مدول M زیرمدول آن است یا نه؟
۶. برای یک R - مدول M تعریف‌های پوچ‌ساز چپ (راست) از یک زیرمجموعه R و یک زیرمجموعه M و قضایای مربوط به آن‌ها را بدانند.
۷. مفاهیم مدول و حلقه ساده، مدول و حلقه نیم‌ساده چپ و قضایای مربوط به آن‌ها را بدانند.
۸. برای حل تمرین‌های این فصل با استفاده از مفاهیم و قضایای ارائه‌شده و همچنین سایر منابع ذکرشده در فهرست منابع تلاش کند.

مقدمه

در ریاضیات و به‌طور خاص در جبر، یک حلقه ساختار جبری است که با تعمیم اعمال حسابی جمع و ضرب به دست می‌آید. با تعمیم قضایایی از حساب اعداد به اعضای غیرعددی مانند چندجمله‌ای‌ها، سری‌ها، ماتریس‌ها و توابع تعمیم داده می‌شود. تعریف مجرد حلقه توسط فرانکل^۱ در سال ۱۹۱۴ به‌صورت فرموله در آمد اگر چه قبل از آن توسط دیوید هیلبرت^۲ مفهوم حلقه معرفی شده‌بود. به‌طور صوری یک حلقه یک گروه آبلی همراه با یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر دیگر (ضرب) است که روی عمل گروه آبلی توزیع‌پذیر می‌باشد.

در یک تشابه با اعداد صحیح، عمل دوتایی گروه آبلی را "عمل جمع" و عمل دوتایی دوم را "عمل ضرب" می‌نامیم. یک حلقه را که عضوهای آن نسبت به عمل ضرب تعویض‌پذیر باشند، یک حلقه جابه‌جایی می‌نامند. در این کتاب حلقه‌ها لزوماً جابه‌جایی نیستند. مثال‌های معروفی از حلقه‌های جابه‌جایی، حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و حلقه چندجمله‌ای‌های $R[x]$ می‌باشند. یک مثال از حلقه‌های غیرجابه‌جایی حلقه ماتریس‌های مربعی $M_n(\mathbb{R})$ با درایه‌های حقیقی است.

1. Frankel

2. David Hilbert

۱-۱ حلقه و زیرحلقه

در این بخش به یادآوری خلاصه‌ای از تعریف‌ها و خواص مقدماتی حلقه‌ها که در دروس قبل با آن‌ها آشنا شده‌اید خواهیم پرداخت. با این روش انتظار خود از دانش اولیه خواننده را بیان می‌کنیم. علاوه بر آن نمادها و قراردادهای مورد نیاز کتاب را معرفی می‌کنیم. بقیه فصل را به توضیح برخی اعمال مقدماتی که می‌تواند روی ایده‌آل‌ها انجام شود، اختصاص خواهیم داد. یک مجموعه $(R, +, \cdot)$ همراه با دو عمل جمع و ضرب را یک حلقه می‌نامیم، هرگاه $(R, +)$ یک گروه آبدی باشد. بنابراین یک عضو خنثی جمعی صفر دارد که با 0 نشان داده می‌شود و هر عضو $x \in R$ یک وارون جمعی دارد که با $-x$ نشان داده می‌شود. عمل ضرب روی جمع توزیع‌پذیر است، یعنی به ازای هر $x, y, z \in R$ ؛

$$x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx,$$

و نیز ضرب شرکت‌پذیر است، یعنی به ازای هر $x, y, z \in R$ ؛

$$(xy)z = x(yz).$$

اگر حلقه دارای عضو همانی ضربی $1_R \in R$ باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in R$ داشته باشیم $x1_R = 1_Rx = x$ ، آن‌گاه حلقه را یک حلقه یکدار^۱ می‌گوئیم. در صورتی که عمل ضرب روی R جابه‌جایی باشد، یعنی؛ برای هر $x, y \in R$ ، $xy = yx$ ، حلقه R را یک حلقه جابه‌جایی^۲ می‌نامیم. اگر $1_R = 0_R$ ، آن‌گاه برای هر $x \in R$ ،

$$x = x1_R = x \cdot 0 = 0.$$

بنابراین R تنها دارای یک عضو 0 است. در این حالت R حلقه صفر^۳ نامیده می‌شود و با 0 نشان داده می‌شود، یعنی $R = 0$. توجه کنید که در حالت کلی یک حلقه می‌تواند غیرشرکت‌پذیر باشد، ولی در این کتاب همه حلقه‌ها شرکت‌پذیر هستند. حلقه‌های غیرشرکت‌پذیر تعمیم حلقه‌های شرکت‌پذیر هستند. بعضی از رده‌های حلقه‌های غیرشرکت‌پذیر عبارت از حلقه‌های لی^۴، جبرهای لی^۵، حلقه‌های ژوردن^۶ و

1. Ring with Identity
2. Commutative Ring
3. Zero Ring
4. Lie Rings
5. Lie Algebras
6. Jordan Rings

جبرهای ژوردن^۱ می‌باشند. اگر $A \subseteq A'$ و $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد، آنگاه تحدید $f|_{A'}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

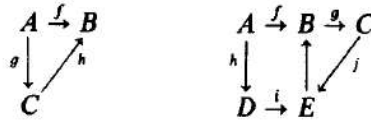
$$(f|_{A'}): a' \mapsto f(a'); \quad (a' \in A').$$

مجموعه تمام توابع از A به B را با نماد B^A یا $\text{Map}(A, B)$ نشان می‌دهیم، پس

$$B^A = \text{Map}(A, B) = \{f \mid f: A \rightarrow B\}.$$

بنابراین A^A تحت عمل ترکیب توابع یک نیم‌گروه با عضو همانی (تکواره)^۲

است. یک نمودار از مجموعه‌ها و توابع جابه‌جایی نامیده می‌شود، هرگاه حرکت روی آن مستقل از مسیر باشد. برای مثال، نمودار سمت چپ زیر در صورتی جابه‌جایی است که $f = hg$. همچنین اگر نمودار سمت راست جابه‌جایی باشد، آنگاه حرکت از A به E مستقل از انتخاب مسیر است. بنابراین $jgf = ih$.



یک تابع $f: A \rightarrow B$ یک به یک (پوشا) است در صورتی که دارای یک معکوس چپ (راست) $f': B \rightarrow A$ باشد که در این صورت $f'f = 1_A$ ($ff' = 1_B$). تابع f دوسویی است اگر و فقط اگر دارای یک معکوس یکتای $f^{-1}: B \rightarrow A$ باشد که در این صورت $f^{-1}f = 1_A$ و نیز $ff^{-1} = 1_B$.

۱-۱-۱ تعریف. فرض کنید R یک حلقه باشد و $a \in R$.

الف) عضو a را حذفی چپ^۳ می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in R$ از تساوی $ax = ay$ نتیجه شود که $x = y$.

ب) عضو a را یک شمارنده چپ (راست) صفر^۴ می‌نامیم، هرگاه عضو ناصفری مانند $b \in R$ ($c \in R$) وجود داشته باشد به طوری که $ab = 0$ ($ca = 0$). اگر عضو a

1. Jordan Algebras
2. Monoid
3. Left Cancellable
4. Left Zero Divisor

حلقه‌ها و مدول‌ها ۵

شمارنده چپ و راست صفر باشد، آن را یک شمارنده صفر می‌نامیم. مجموعه تمام شمارنده‌های صفر حلقه R را با $Zdv(R)$ و یا به اختصار با $Z(R)$ نشان می‌دهیم. (پ) a را معکوس‌پذیر چپ^۱ می‌نامیم، هرگاه عضو $a' \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $a'a = 1$. در این حالت a' را یک معکوس چپ a می‌نامیم.

۱-۱-۲ تعریف

حلقه R یک دامنه صحیح^۲ نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو غیر صفر R حذفی باشد و یا به‌طور معادل R دارای هیچ شمارنده صفری به‌جز صفر نباشد. توجه کنید که دامنه‌های صحیح لزوماً جابه‌جایی نیستند.

۱-۱-۳ تعریف

حلقه تقسیم^۳، حلقه‌ای است که اعضای غیر صفر آن معکوس‌پذیر هستند. بنابراین حلقه تقسیم، یک دامنه صحیح می‌باشد. ولی عکس آن برقرار نیست، زیرا $\mathbb{Z}$ دامنه صحیح است ولی حلقه تقسیم نیست. یک حلقه تقسیم جابه‌جایی، یک میدان نامیده می‌شود.

۱-۱-۴ مثال

الف) هر یک از مجموعه‌های $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حلقه‌های جابه‌جایی یک‌دار هستند.

ب) مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی همراه با جمع و ضرب ماتریس‌ها که آن را با نماد $M_n(R)$ نشان می‌دهیم یک حلقه یک‌دار غیر جابه‌جایی با عضو همانی ضربی ماتریس همانی I_n است.

۱-۱-۵ تعریف

فرض کنید A و B دو حلقه باشند. یک هم‌ریختی حلقه‌ها^۴ از A به B ، یک تابع $f: A \rightarrow B$ است به‌طوری‌که شرایط زیر را داشته باشد:

-
1. Left invertible
 2. Integral Domain
 3. Division Ring
 4. Rings Homomorphism

۱. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ، بنابراین f یک همریختی گروهی است.
 ۲. $f(xy) = f(x)f(y)$.
 ۳. اگر هر دو حلقه یکدار باشند، آنگاه $f(1_A) = 1_B$ در این صورت می‌گوئیم f عضو همانی را حفظ می‌کند.
- به عبارت دیگر، f جمع و ضرب حلقه‌ها را حفظ می‌کند. در اینجا باید توجه کنید که اعمال جمع و ضرب موجود در سمت چپ روابط بالا مربوط به حلقه A در حالی که جمع و ضرب در سمت راست در حلقه B می‌باشند.
- اگر همریختی f یک به یک (پوشا، دوسویی) باشد، آنگاه f را یک تکریختی^۱ (بروریختی^۲، یکریختی^۳) حلقه‌ها می‌نامیم. در حالت خاص، اگر f بروریختی باشد، حلقه B را یک تصویر همریخت^۴ A می‌گوئیم. اگر f یکریختی بین حلقه‌های A و B باشد، می‌گوئیم A و B یکرخت هستند و از نماد $A \cong B$ استفاده می‌کنیم. در این حالت f به عنوان یک تابع دارای یک معکوس است. به عبارت دیگر، تابع یکتای $g: B \rightarrow A$ وجود دارد به طوری که $g \circ f = i_A$ و $f \circ g = i_B$. به سادگی می‌توان نشان داد که g یک یکریختی حلقه‌ها است و عضو همانی را حفظ می‌کند (ثابت کنید).

۶-۱-۱ نکته

- الف) فرض کنید A یک حلقه باشد. تابع همانی از A به A که با نماد i_A نشان داده می‌شود یک همریختی حلقه‌ای است.
- ب) اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ دو همریختی حلقه‌ای باشند. در این صورت ترکیب آن‌ها یعنی $g \circ f: A \rightarrow C$ نیز یک همریختی حلقه‌ای است (تحقیق کنید). برای راحتی در نوشتن قرار می‌دهیم $g \circ f = gf$.

۷-۱-۱ گزاره

فرض کنید A و B دو حلقه و $f: A \rightarrow B$ همریختی حلقه‌ای باشد، در این صورت f

1. Monomorphism
 2. Epimorphism
 3. Isomorphism
 4. Homomorphic Image

حلقه‌ها و مدول‌ها ۷

یکریختی است اگر و فقط اگر توابع $g, g': B \rightarrow A$ وجود داشته باشند به طوری که $f \circ g' = i_B$ و $g \circ f = i_A$.

اثبات. به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود.

۸-۱-۱ تعریف

فرض کنید R و S دو حلقه باشند. R را زیرحلقه^۱ S و یا S را حلقه^۲ بالای R می‌نامیم، هرگاه R نسبت به اعمال جمع و ضرب حلقه^۳ S بسته باشد و در این صورت می‌نویسیم $R \leq S$. در حالت خاص، اگر S یکدار باشد، آن‌گاه برای اینکه $R \leq S$ ، باید داشته باشیم $1_S \in R$.

۹-۱-۱ قضیه

فرض کنید R و S دو حلقه و $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت

الف) $f(\circ_R) = \circ_S$.

ب) برای هر $a \in R$ ، $f(-a) = -f(a)$.

پ) به ازای هر زیرحلقه^۱ R' از R ، $f(R')$ یک زیرحلقه^۲ S است و در این صورت $(f|_{R'}): R' \rightarrow f(R')$ یک بروریختی حلقه‌ای است.

ت) به ازای هر زیرحلقه^۱ S' از S ، تصویر معکوس آن $f^{-1}(S')$ یک زیرحلقه^۲ R است و نیز همچنین $f(f^{-1}(S')) \leq S'$.

ث) اگر R یکدار باشد، آن‌گاه $f(1_R) = 1_{f(R)}$. در حالت خاص، اگر f بروریختی حلقه‌ای باشد، آن‌گاه $f(1_R) = 1_S$.

اثبات. به عنوان تمرین به عهده دانشجو می‌باشد (به کتاب مباحثی در نظریه حلقه و مدول منبع (۱) رجوع کنید).

۱۰-۱-۱ تعریف

فرض کنید R یک حلقه (نه لزوماً جابه‌جایی) باشد. مرکز حلقه^۳ R را با نماد $C(R)$

1. Subring
2. Overring
3. Center Ring of R

نشان می‌دهیم و مجموعهٔ اعضایی از R است که با همهٔ اعضای R جابه‌جا می‌شوند، یعنی؛

$$C(R) = \{x \in R \mid xr = rx, r \in R \text{ هر برای هر}\}.$$

به‌وضوح $C(R)$ یک زیرحلقهٔ R است. اگر R جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $C(R) = R$.

۱-۱-۱۱ تعریف

فرض کنید R حلقه باشد. از روی این حلقه به‌صورت زیر، حلقهٔ جدیدی به‌نام پادحلقهٔ R^1 را می‌سازیم که آن را با R^{op} نشان می‌دهیم. اعضای این حلقه همان اعضای R هستند و عمل جمعی آن همانند R است. اما ضرب روی R^{op} به‌صورت زیر تعریف شده‌است.

$$(r, s) \mapsto r * s = sr.$$

تحقیق کنید که R^{op} یک حلقه با عمل جمع R و عمل ضرب بالا است و همانی ضربی آن همان عضو همانی R است. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $C(R) = C(R^{op})$ و نیز R جابه‌جایی است اگر و فقط اگر $R = R^{op}$ (تحقیق کنید).

۱-۱-۱۲ تعریف

فرض کنید R و S دو حلقه باشند. تابع $\phi: R \rightarrow S$ را پادهمریختی حلقه‌ای^۲ می‌نامیم، در صورتی که ϕ یک همریختی گروهی باشد و $\phi(1) = 1$ و نیز $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$. بنابراین تابع $\phi: R \rightarrow S$ یک پادهمریختی حلقه‌ای است اگر و فقط اگر تابع $\phi: R^{op} \rightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد.

۱-۱-۱۳ تعریف

فرض کنید I یک زیرمجموعهٔ غیرتهی حلقهٔ R باشد، در این صورت I را یک ایده‌آل چپ (راست)^۳ حلقهٔ R می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $(I, +)$ یک زیرگروه جمعی R باشد، یعنی؛ برای هر $a, b \in I$ ، $a - b \in I$.

ب) برای هر $a \in I$ و هر $r \in R$ ، ایجاب کند که $ra \in I$ (که $ar \in I$).

1. Opposite Ring of R
2. Ring Anti-Homomorphism
3. Ideal

۱-۱-۱۴ تعریف

الف) در صورتی که I یک ایده‌آل چپ و یک ایده‌آل راست حلقه R باشد، آنگاه I را ایده‌آل (دوطرفه)^۱ حلقه R می‌نامیم. به عبارت دیگر، برای هر $x \in I$ و هر $a, b \in R$ ، $axb \in I$. در حالتی که حلقه R جابه‌جایی باشد، هر ایده‌آل چپ یک ایده‌آل راست می‌باشد و بالعکس و لذا ایده‌آل‌های حلقه جابه‌جایی دوطرفه هستند.

ب) حلقه R دارای حداقل دو ایده‌آل (0) و خود R است که آن‌ها را ایده‌آل‌های بدیهی^۲ حلقه R می‌نامیم. یک ایده‌آل I با $I \neq R$ را ایده‌آل سره^۳، R می‌نامیم.

پ) ایده‌آل چپ I از R را یک ایده‌آل چپ می‌نیمال^۴ می‌نامیم، هرگاه $I \neq 0$ و نیز به‌طور سره شامل هیچ ایده‌آل چپ غیرصفر دیگری از R نباشد. ایده‌آل راست می‌نیمال به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

۱-۱-۱۵ مثال

الف) در حلقه $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ هر ایده‌آل آن به‌صورت $I = n\mathbb{Z}$ است که در آن $n \geq 1$. در واقع ایده‌آل I شامل تمام مضرب‌های صحیح عدد n است.

ب) فرض کنید $R = M_n(D)$ حلقه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در یک حلقه تقسیم D باشد. فرض کنیم I_k (k عدد صحیح) زیرمجموعه‌ای از R شامل تمام ماتریس‌هایی باشد که تنها ستون k ام آن‌ها احتمالاً دارای درایه ناصفر باشد. در این صورت I_k یک ایده‌آل چپ است ولی ایده‌آل راست نمی‌باشد (تحقیق کنید).

۱-۱-۱۶ مثال

فرض کنید $R = M_2(\mathbb{R})$ حلقه غیرجابه‌جایی ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد و $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. در این صورت واضح است که I یک زیرگروه جمعی R است و همچنین:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + be & ad + bf \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I.$$

1. (Twosided) Ideal
2. Trivial Ideal
3. Proper Ideal
4. (Left) Minimal