



هندسه دیفرانسیل موضعی

(رشته ریاضی)

دکتر یدالله آریانژاد

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاوردهای انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام(ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

یازده

پیشگفتار

فصل اول. منحنی‌های مسطح و فضایی.....	۱
هدف کلی.....	۱
هدف‌های یادگیری.....	۱
مقدمه.....	۱
۱-۱ مفهوم یک منحنی.....	۱
تمرین‌ها.....	۶
۲-۱ طول منحنی.....	۸
تمرین‌ها.....	۱۱
۳-۱ پارامترسازی مجدد.....	۱۱
تمرین‌ها.....	۱۶
۴-۱ منحنی‌های تراز و منحنی‌های پارامتری.....	۱۷
تمرین‌ها.....	۲۳
فصل دوم. مفاهیمی از منحنی‌ها.....	۲۵
هدف کلی.....	۲۵
هدف‌های یادگیری.....	۲۵
مقدمه.....	۲۵
۱-۲ اندازه‌گیری انحنای یک منحنی.....	۲۵
تمرین‌ها.....	۳۱
۲-۲ منحنی‌ها در E^2	۳۱
تمرین‌ها.....	۳۹

۴۱	۳-۲ منحنی‌ها در E^3
۵۰	تمرین‌ها
۵۳	۴-۲ هندسه‌ی منحنی‌ها و میپل
۶۳	تمرین‌ها

۶۵	فصل سوم. رویه‌ها در E^3
۶۵	هدف کلی
۶۵	هدف‌های یادگیری
۶۵	مقدمه
۶۵	۳-۱ مفهوم رویه
۷۱	تمرین‌ها
۷۳	۳-۲ رویه‌های مشتق‌پذیر
۸۰	تمرین‌ها
۸۲	۳-۳ رویه‌ها و جهت‌پذیری
۸۶	تمرین‌ها
۸۷	۳-۴ بررسی چند مثال
۹۲	تمرین‌ها
۹۳	۳-۵ رویه‌های درجه‌ی دوم
۹۹	تمرین‌ها
۱۰۰	۳-۶ دستگاه‌های قائم سه وجهی
۱۰۳	تمرین‌ها
۱۰۴	۳-۷ کاربردهای قضیه‌ی تابع معکوس
۱۰۷	تمرین‌ها

۱۰۹	فصل چهارم. اندازه‌گیری طول منحنی و زاویه و مساحت روی رویه‌ها
۱۰۹	هدف کلی
۱۰۹	هدف‌های یادگیری
۱۰۹	مقدمه
۱۱۰	۴-۱ طول منحنی‌ها در روی رویه‌ها
۱۱۳	تمرین‌ها
۱۱۴	۴-۲ ایزومتري‌های رویه‌ها
۱۱۹	تمرین‌ها
۱۲۱	۴-۳ تبدیلات هم‌دیس رویه‌ها
۱۲۶	تمرین‌ها
۱۲۷	۴-۴ مساحت رویه‌ها
۱۳۰	تمرین‌ها
۱۳۱	۴-۵ نگاشت‌های هم مساحت و قضیه‌ی ارشمیدس
۱۳۶	تمرین‌ها

۱۳۷.....	۴-۶ رویه‌ها در میپل
۱۳۹.....	تمرین
۱۴۱.....	فصل پنجم. انحنای رویه‌ها
۱۴۱.....	هدف کلی
۱۴۱.....	هدف‌های یادگیری
۱۴۱.....	مقدمه
۱۴۲.....	۵-۱ دومین صورت بنیادی
۱۴۵.....	تمرین‌ها
۱۴۶.....	۵-۲ انحنای منحنی‌های روی یک رویه
۱۴۸.....	تمرین‌ها
۱۴۹.....	۵-۳ انحنای قائم و اصلی
۱۶۰.....	تمرین‌ها
۱۶۲.....	۵-۴ تفسیر هندسی انحنای اصلی
۱۶۶.....	تمرین‌ها
۱۶۶.....	۵-۵ میدان‌های برداری
۱۷۱.....	تمرین‌ها
۱۷۳.....	فصل ششم. انحنای گاوسی و نگاشت گاوس
۱۷۳.....	هدف کلی
۱۷۳.....	هدف‌های یادگیری
۱۷۳.....	مقدمه
۱۷۴.....	۶-۱ انحنای گاوسی و میانگین
۱۷۶.....	تمرین‌ها
۱۷۸.....	۶-۲ شبه کره
۱۸۲.....	تمرین‌ها
۱۸۳.....	۶-۳ رویه‌های مسطح
۱۹۰.....	تمرین‌ها
۱۹۰.....	۶-۴ رویه‌ها با انحنای میانگین ثابت
۱۹۳.....	تمرین‌ها
۱۹۴.....	۶-۵ انحنای گاوسی رویه‌های فشرده
۱۹۶.....	۶-۶ نگاشت گاوس
۲۰۰.....	تمرین‌ها
۲۰۰.....	۶-۷ محاسبه‌ی انحنای با میپل
۲۰۵.....	تمرین‌ها
۲۰۷.....	فصل هفتم. ژئودزیک‌ها
۲۰۷.....	هدف کلی

۲۰۷	هدف‌های یادگیری
۲۰۷	مقدمه
۲۰۷	۱-۷ تعریف و ویژگی‌های اساسی
۲۱۱	تمرین‌ها
۲۱۲	۲-۷ معادلات ژئودزیک
۲۱۸	تمرین‌ها
۲۱۹	۳-۷ ژئودزیک‌های رویه‌های دورانی
۲۲۸	تمرین‌ها
۲۲۹	۴-۷ ژئودزیک‌ها به‌عنوان کوتاه‌ترین مسیرها
۲۳۶	تمرین‌ها
۲۳۷	۵-۷ مختصات ژئودزیک
۲۴۰	تمرین‌ها
۲۴۱	۶-۷ ژئودزیک‌ها و میلی
۲۴۵	تمرین‌ها
۲۴۷	فصل هشتم. توصیف قضیه‌ی گاوس
۲۴۷	هدف کلی
۲۴۷	هدف‌های یادگیری
۲۴۷	مقدمه
۲۴۷	۱-۸ قضیه‌ی برجسته گاوس
۲۵۵	تمرین‌ها
۲۵۷	۲-۸ رویه‌های ایزومتریک
۲۵۹	تمرین‌ها
۲۵۹	۳-۸ معادلات گدازه - میناردی
۲۶۳	تمرین‌ها
۲۶۴	۴-۸ رویه‌های فشرده با انحنا‌ی گاوسی ثابت
۲۶۶	تمرین
۲۶۷	فصل نهم. رویه‌های مینیمال
۲۶۷	هدف کلی
۲۶۷	هدف‌های یادگیری
۲۶۷	مقدمه
۲۶۸	۱-۹ مسئله پلاتو
۲۷۵	تمرین‌ها
۲۷۵	۲-۹ مثال‌هایی از رویه‌های مینیمال
۲۸۴	تمرین‌ها
۲۸۶	۳-۹ نگاشت گاوس از یک رویه مینیمال
۲۸۸	تمرین‌ها

۲۸۸.....	۴-۹ رویه‌های مینیمال و توابع هولومورفیک.....
۲۹۷.....	تمرین‌ها.....
۲۹۹.....	پیوست.....
۲۹۹.....	۱. معرفی منحنی‌های بسته ساده.....
۳۰۳.....	تمرین‌ها.....
۳۰۴.....	۲. مهم‌ترین نتیجه‌ی سرتاسری از منحنی‌های مسطح.....
۳۰۷.....	تمرین.....
۳۰۸.....	۳. یک نتیجه‌ی مشهور درباره‌ی منحنی‌های محدب.....
۳۱۰.....	تمرین.....
۳۱۱.....	پاسخنامه.....
۳۷۵.....	منابع.....

پیشگفتار

در این کتاب به نحوی کاملاً ساده و قابل فهم، هندسهٔ منحنی‌ها و رویه‌ها در فضای سه بعدی با استفاده از تکنیک‌های محاسباتی مرسوم در هندسهٔ دیفرانسیل، مورد مطالعه قرار می‌گیرد، که یک پیش زمینهٔ عالی برای مطالعهٔ هندسهٔ منیفلدها در مقطع کارشناسی ارشد فراهم می‌آورد. در انتهای هر بخش، تمرینات مهمی گنجانده شده است که علاوه بر کمک به فهم بهتر مطالب موجود در بخش‌ها، شامل مفاهیمی جدید است که مکمل موضوع هستند. شایان ذکر است که جواب کامل تمام تمرینات در انتهای کتاب آورده شده است. در مرجع [۵] تمامی تکنیک‌های محاسباتی مذکور با استفاده از نرم افزار میپل مورد مطالعه قرار گرفته است که برای تطابق کتاب با عصر الکترونیک، مطالبی از آن در خصوص کاربرد نرم افزار میپل در انتهای بعضی از فصل‌ها به صورت مرتبط آورده شده است.

یدالله آریانزاد

عضو هیئت علمی مرکز سندج

فصل اول

منحنی‌های مسطح و فضایی

هدف کلی

تشریح مفاهیم کلی مربوط به منحنی‌ها از جمله طول منحنی، پارامترسازی مجدد، منحنی‌های تراز و منحنی‌های پارامتری که در فصل‌های بعدی مورد بحث قرار می‌گیرند.

هدف‌های یادگیری

- دانشجویان بعد از مطالعه این فصل باید بتوانند:
۱. با منحنی‌های مسطح و فضایی آشنا شوند.
 ۲. پارامترسازی مجدد و طول منحنی را بدانند.
 ۳. با منحنی‌های تراز و منحنی‌های پارامتری آشنا شوند و آن‌ها را در مسائل کاربردی به کار گیرند.
 ۴. مسائل و تمرینات این فصل را به آسانی حل کنند.

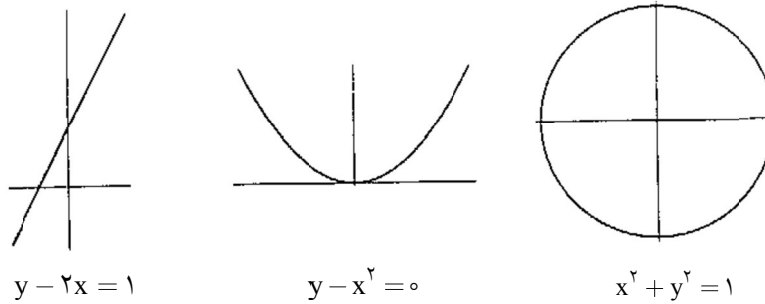
مقدمه

در این فصل دو قاعده‌ی ریاضی از مفهوم یک منحنی را بیان و رابطه بین آن‌ها را کاملاً دقیق نتیجه‌گیری می‌کنیم، بنابراین با چند مثال از انواع منحنی‌ها شروع خواهیم کرد.

۱-۱ مفهوم یک منحنی

اگر بخواهید یک مثال از منحنی‌ها بیاورید، می‌توانید یک سهمی $y - x^2 = 0$ یا یک

دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$ و یا شاید یک خط مستقیم $y - 2x = 1$ را در نظر بگیرید. (شکل ۱-۱ مشاهده شود)



شکل ۱-۱

همه این منحنی‌ها به وسیله‌ی معادله‌ی مختصاتی زیر توصیف می‌شوند:

$$f(x, y) = c$$

که در آن f یک تابع از x و y و c ثابت است. براساس این دیدگاه یک منحنی مجموعه‌ای از نقاط، مانند زیر است:

$$\zeta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} \quad (1-1)$$

این مثال‌ها همه، منحنی‌هایی در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ هستند؛ می‌توانیم منحنی‌هایی در فضای $\mathbb{R}^3$ نیز ملاحظه کنیم. برای مثال محور x ‌ها در $\mathbb{R}^3$ یک خط مستقیم مفروض با معادله‌ی زیر است:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$$

به‌طور کلی یک منحنی در $\mathbb{R}^3$ به وسیله‌ی یک زوج از معادلات

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2$$

قابل تعریف است. منحنی‌هایی از این نوع منحنی‌های تراز نامیده می‌شوند؛ بدین معنی که به‌عنوان نمونه منحنی معادله‌ی (۱-۱)، مجموعه‌ای از نقاط (x, y) در صفحه است که مقدار $f(x, y)$ در آن نقاط با ارتفاع c برابر می‌شود.

۳ منحنی‌های مسطح و فضایی

می‌توان توصیف دیگری نیز از منحنی‌ها داشت که در بعضی از مواقع بسیار مفید است. بدین ترتیب که یک منحنی به صورت مسیر حاصل از اثر حرکت یک نقطه، در نظر گرفته شود. در این صورت اگر $\gamma(t)$ بردار حرکت نقطه در لحظه‌ی t باشد، منحنی به وسیله‌ی یک تابع γ از یک پارامتر اسکالر t با مقدار برداری توصیف می‌شود. (در R^2 برای یک منحنی در صفحه، در برای یک منحنی در فضا.)

از این مفهوم برای رسیدن به تعریف فرمول نخست از یک منحنی در R^n استفاده می‌کنیم. (در این جا فقط به حالت‌های $n=2$ و $n=3$ توجه می‌کنیم، اما به راحتی می‌توان برای حالت‌های دیگر نیز به صورت مشابه عمل کرد.)

تعریف ۱-۱. یک منحنی پارامتری در R^n یک نگاشت $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow R^n$ است، که در آن α و β ، مقادیری به صورت $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ هستند. نماد (α, β) بازه‌ی باز $\alpha < t < \beta$ را مشخص می‌کند.

یک منحنی پارامتری که تصویرش مشمول یک منحنی تراز γ باشد، یک پارامترسازی از γ نامیده می‌شود. مثال‌های زیر نشان می‌دهد چگونه از منحنی‌های تراز به منحنی‌های پارامتری برسیم و برعکس.

مثال ۱-۱. اجازه دهید یک پارامترسازی $\gamma(t)$ از سهمی $y = x^2$ پیدا کنیم. اگر $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ باشد، مؤلفه‌های γ_1, γ_2 از γ باید در

$$\gamma_2(t) = \gamma_1^2(t) \quad (2-1)$$

برای همه‌ی مقادیر t در بازه‌ی (α, β) که γ تعریف می‌شود، صدق کنند؛ به طور مطلوب هر نقطه روی سهمی، برابر $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ برای $t \in (\alpha, \beta)$ است. البته با قراردادن $\gamma_1(t) = t$ ، $\gamma_2(t) = t^2$ یک راه‌حل واضح برای معادله‌ی (۲-۱) به دست می‌آید. برای به دست آوردن نقاط روی سهمی، باید t را مقداری حقیقی در نظر بگیریم. (چون x - مختصات $\gamma(t)$ ، فقط t است لذا x - مختصات یک نقطه روی سهمی، هر عدد حقیقی می‌تواند باشد). از این رو (α, β) باید بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ باشد و پارامترسازی مناسب،

$$\gamma: (-\infty, +\infty) \rightarrow R^2 \quad \gamma(t) = (t, t^2)$$

است. اما این تنها پارامترسازی سهمی نیست. $\gamma(t) = (t^2, t^2)$ (با $(\alpha, \beta) = (-\infty, +\infty)$) و یا $\gamma(t) = (2t, 4t^2)$ و پارامترسازی‌های دیگری برای سهمی هستند.

مثال ۱-۲. حالا دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$ را امتحان می‌کنیم. قرارداد $x = t$ و $y = \sqrt{1-t^2}$ در این مثال کمی فریب دهنده خواهد بود؛ (می‌توانیم $y = -\sqrt{1-t^2}$ را نیز در نظر بگیریم) چرا که پارامترسازی $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ را به دست آوردیم، اما این فقط یک پارامترسازی از نصف بالای دایره است. زیرا $\sqrt{1-t^2}$ همیشه مثبت است. به‌طور مشابه اگر $y = -\sqrt{1-t^2}$ را در نظر بگیریم، فقط قسمت پایین دایره را پوشش می‌دهیم. برای به دست آوردن یک پارامترسازی مناسب از تمام دایره، توابع $\gamma_1(t)$ و $\gamma_2(t)$ را نیاز داریم به‌طوری که برای هر $t \in (\alpha, \beta)$

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) = 1 \quad (3-1)$$

هر نقطه روی دایره، معادل $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ برای مقادیر $t \in (\alpha, \beta)$ است. یک جواب واضح برای معادله‌ی (۳) وجود دارد: $\gamma_1(t) = \cos t$ و $\gamma_2(t) = \sin t$ (چون $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ برای هر مقدار t). می‌توانیم (α, β) را مساوی با $(-\infty, +\infty)$ بگیریم اگرچه بازه‌ی باز (α, β) که طول آن بیش‌تر از 2π می‌باشد، کافی است. مثال بعدی نشان می‌دهد چگونه از منحنی‌های پارامتری به منحنی‌های تراز برسیم.

مثال ۱-۳. منحنی پارامتری $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ را در نظر بگیرید. چون $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ، برای هر t مختصات $x = \cos^3 t$ و $y = \sin^3 t$ از نقطه‌ی $\gamma(t)$ در $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ صدق می‌کنند. این منحنی تراز بر تصویر نگاشت منطبق است. در این کتاب منحنی‌ها (و بعداً رویه‌ها) را با استفاده از روش‌های جالب حساب دیفرانسیل مطالعه می‌کنیم. برای مشتق‌گیری از تابع برداری، مانند $\gamma(t)$ (به‌صورت تعریف ۱-۱) از مؤلفه‌های آن مشتق می‌گیریم. اگر $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ آن‌گاه:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \dots, \frac{d\gamma_n}{dt} \right)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\gamma_n}{dt^2} \right)$$

منحنی‌های مسطح و فضایی ۵

و... در جاهای مشخصی اغلب $\frac{d\gamma}{dt}$ را با نماد $\dot{\gamma}(t)$ و $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ را با نماد $\ddot{\gamma}(t)$ (و غیره ...) نشان می‌دهیم. همچنان‌که قبلاً اشاره کردیم، می‌گوییم γ هموار است. اگر تمام مؤلفه‌های $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ از γ هموار باشند، یعنی اگر همه مشتق‌های

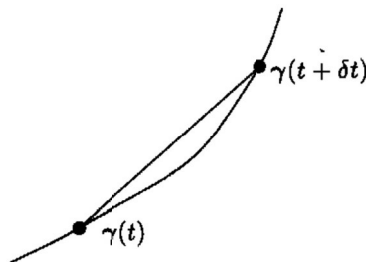
$$\frac{d\gamma_i}{dt}, \frac{d^2\gamma_i}{dt^2}, \frac{d^3\gamma_i}{dt^3}, \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

موجود و پیوسته باشند.

از این جا به بعد تمام منحنی‌های پارامتری که در این کتاب مطالعه می‌شوند، هموار فرض خواهند شد.

تعریف ۲-۱. اگر $\gamma(t)$ یک منحنی پارامتری باشد، مشتق اول آن بردار مماس بر γ در نقطه‌ی $\gamma(t)$ نامیده می‌شود.

برای دیدن دلیل این تعریف توجه کنید. بردار $\frac{\gamma(t+\delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$ موازی وتر گذرنده از نقاط $\gamma(t)$ و $\gamma(t+\delta t)$ است. انتظار داریم وقتی δt به صفر میل می‌کند، وتر برابر مماس بر γ در $\gamma(t)$ شود. از این رو بردار مماس باید برابر با $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+\delta t) - \gamma(t)}{\delta t} = \frac{d\gamma}{dt}$ شود. (شکل ۲-۱ مشاهده شود) نتیجه زیر به صورت ذاتی برقرار است.



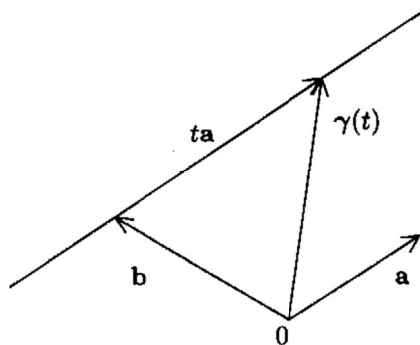
شکل ۲-۱

گزاره ۱-۱. اگر بردار مماس یک منحنی پارامتری ثابت باشد، تصویرش منحنی یک خط مستقیم است.

اثبات اگر $\dot{\gamma}(t) = a$ برای هر $t \in I$ باشد که a یک بردار ثابت است، آن‌گاه انتگرال زیر را داریم

$$\gamma(t) = \int \frac{d\gamma}{dt} dt = \int a dt = ta + b$$

که b بردار ثابت دیگری است. اگر $a \neq 0$ باشد، این معادله‌ی پارامتری، خط مستقیم موازی با a و گذرنده از نقطه با بردار موقعیت b است. (شکل ۳-۱ مشاهده شود)



شکل ۳-۱

اگر $a = 0$ باشد، تصویر γ یک نقطه‌ی تنها است. (یعنی نقطه با بردار موقعیت b) □

تمرین‌ها

۱-۱. آیا $\gamma(t) = (t^2, t^2)$ یک پارامترسازی سهمی $y = x^2$ است؟

۲-۱. پارامترسازی منحنی‌های تراز زیر را پیدا کنید:

الف) $y^2 - x^2 = 1$

ب) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

۳-۱. معادله‌ی دکارتی منحنی‌های پارامتری زیر را پیدا کنید.

الف) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$

ب) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$

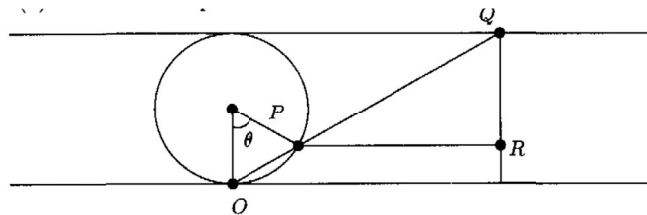
منحنی‌های مسطح و فضایی ۷

۴-۱. بردارهای مماس بر منحنی‌های تمرین ۳-۱ را محاسبه کنید.
 ۵-۱. ستاره‌گون مثال ۳-۱ را رسم کنید. در هر نقطه، بردار مماس آن را به دست آورید.
 در کدام نقطه بردار مماس صفر است؟

۶-۱. فرض کنید p یک نقطه روی دایره‌ی c در صفحه‌ی xy به شعاع $a > 0$ و مرکز $(0, a)$ و خط مستقیم گذرنده از مبدأ و نقطه‌ی p خط $y = 2a$ را در Q قطع کند و خط گذرنده از p موازی محور x ها، خط گذرنده از نقطه‌ی Q موازی محور y ها را در نقطه‌ی R قطع کند. زمانی که p روی دایره‌ی c حرکت می‌کند، اثر نقطه‌ی R یک منحنی خواهد بود. (شکل ۴-۱ مشاهده شود) برای این منحنی موارد زیر را پیدا کنید:

الف) یک پارامترسازی

ب) معادلات دکارتی



شکل ۴-۱

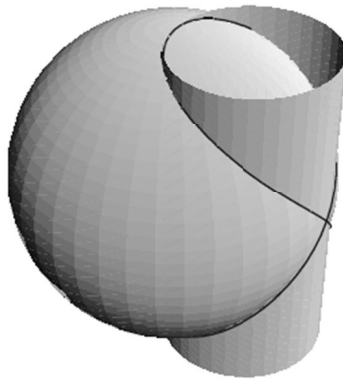
۷-۱. یک چرخ زاد از اثر حرکت یک نقطه واقع در محیط یک دایره‌ی زمانی که دایره در طول یک خط مستقیم می‌چرخد به دست می‌آید. نشان دهید که اگر خط مستقیم، محور x ها و شعاع دایره $a > 0$ باشد، چرخ زاد به صورت زیر پارامترسازی می‌شود

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$$

۸-۱. تمرین قبل را با پیدا کردن پارامترسازی منحنی ترسیم شده بر نقطه‌ای در محیط دایره‌ی ثابتی که در خارج دایره بچرخد، تعمیم دهید.

۹-۱. نشان دهید $\gamma(t) = (\cos^2 t - 1/2, \sin t \cos t, \sin t)$ یک پارامترسازی منحنی حاصل از تقاطع استوانه‌ی حلقوی به شعاع $1/2$ و محور z ها و کره‌ای به شعاع 1 و مرکز $(1/2, 0, 0)$ است. (شکل ۵-۱ مشاهده شود)

۱-۱۰. برای منحنی $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ نشان دهید زاویه‌ی میان $\gamma(t)$ و بردار مماس در $\gamma(t)$ مستقل از t است. (یک تصویر از این منحنی در مثال ۱-۴ نشان داده شده‌است)



شکل ۵-۱

۲-۱ طول منحنی

اگر $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ یک بردار در R^n باشد طول آن برابر است با

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

اگر u یک بردار دیگر در R^n باشد، $\|u - v\|$ طول پاره خط راست متصل‌کننده‌ی نقاط در R^n با بردارهای موقعیت u, v است. برای پیدا کردن یک فرمول، برای محاسبه‌ی طول هر منحنی پارامتری γ ، توجه کنید اگر δt بسیار کوچک باشد، قسمتی از تصویر γ از بین $\gamma(t)$ و $\gamma(t + \delta t)$ تقریباً یک خط مستقیم خواهد بود. بنابراین طول آن نزدیک عبارت زیر است:

$$\|\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)\|$$

دوباره چون δt بسیار کوچک است، $(\gamma(t + \delta t) - \gamma(t))/\delta t$ تقریباً معادل $\dot{\gamma}(t)$ است، بنابراین طول منحنی به‌طور تقریبی

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \delta t \quad (۴-۱)$$

منحنی‌های مسطح و فضایی ۹

است. چنانچه بخواهیم طول قسمتی (نه لزوماً کوچک) از γ را محاسبه کنیم، می‌توانیم آن را به پاره خط‌هایی تقسیم کنیم. هر کدام از آن‌ها معادل یک نمو کوچک δt در t است. طول هر کدام از قطعه‌ها را به وسیله‌ی معادله‌ی (۴-۱) محاسبه و آن‌ها را جمع می‌کنیم. δt را به سمت صفر میل دهید، طول دقیق منحنی به دست می‌آید. (شکل ۶-۱ مشاهده شود)



شکل ۶-۱

تعریف ۳-۱. طول کمان یک منحنی γ ، که از نقطه‌ی $\gamma(t_0)$ شروع می‌شود، تابع $s(t)$ با تعریف

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| \, du, \quad t > t_0.$$

است. اگر نقطه‌ی شروع متفاوت $\gamma(\tilde{t}_0)$ را انتخاب کنیم، طول کمان منتج $\tilde{s}$ متفاوت با s به اندازه‌ی ثابت $\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\dot{\gamma}(u)\| \, du$ است.

مثال ۴-۱. برای یک مارپیچ $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ داریم

$$\dot{\gamma} = (e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t))$$

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 = 2e^{2t}$$

از این‌رو طول کمان γ (برای مثال) با شروع از $\gamma(0) = (1, 0)$ برابر است با

$$s = \int_0^t \sqrt{2} e^u \, du = \sqrt{2} (e^t - 1)$$