



دانشگاه پیام نور

هندسه منیفلد ۱

(کارشناسی ارشد ریاضی)

دکتر محمد چایچی رقیمی دکتر امیر حسام زعیم

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرنمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پر بار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناخشنودی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عزیزانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلگاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب

سیزده

پیشگفتار

۱	فصل اول. ابزارهای مطالعه منیفلد
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۱	مقدمه
۲	۱-۱ توپولوژی روی یک مجموعه
۸	۲-۱ پیوستگی
۱۰	۳-۱ اصول تفکیک
۱۳	۴-۱ شمارش پذیری نوع اول و دوم
۱۸	۵-۱ توپولوژی حاصلضربی
۲۱	۶-۱ توپولوژی خارج قسمتی
۲۵	۷-۱ همبندی
۲۷	۸-۱ جبر خطی
۳۶	۹-۱ دترمینان

۳۹	خلاصه فصل اول
۴۰	خودآزمایی تشریحی فصل اول
۴۵	فصل دوم. تابع‌های هموار در فضای اقلیدسی
۴۵	هدف کلی
۴۵	هدف‌های یادگیری
۴۵	مقدمه
۴۶	۱-۲ تابع‌های C^∞
۴۸	۲-۲ قضیه تیلور با باقیمانده
۵۰	۳-۲ توابع به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر
۵۴	۴-۲ قضیه تابع معکوس و نتایج مرتبط
۶۲	خلاصه فصل دوم
۶۲	خودآزمایی تشریحی فصل دوم
۶۵	فصل سوم. منیفلدها
۶۵	هدف کلی
۶۵	هدف‌های یادگیری
۶۵	مقدمه
۶۶	۱-۳ منیفلد توپولوژیک
۷۱	۲-۳ نقشه‌های سازگار
۷۴	۳-۳ منیفلدهای هموار
۷۵	۴-۳ مثال‌هایی از منیفلدهای هموار
۸۰	۵-۳ منیفلدهای مرزدار
۸۴	خلاصه فصل سوم
۸۴	خودآزمایی تشریحی فصل سوم
۸۹	فصل چهارم. فضا‌های خارج قسمتی

هدف کلی	۸۹
هدف‌های یادگیری	۸۹
مقدمه	۸۹
۴-۱ توپولوژی خارج قسمتی	۹۰
۴-۲ پیوستگی نگاشتها	۹۱
۴-۳ یکسان سازی زیرمجموعه ای با یک نقطه	۹۱
۴-۴ ملزومات هاوسدورف بودن فضاهاى خارج قسمتی	۹۳
۴-۵ روابط هم ارزی باز	۹۳
۴-۶ فضای تصویری حقیقی	۹۶
۴-۷ اطلس C^∞ برای فضای تصویری حقیقی	۱۰۱
خلاصه فصل چهارم	۱۰۳
خودآزمایی تشریحی فصل چهارم	۱۰۳

فصل پنجم. نگاشت‌های هموار روی منیفلدها

هدف کلی	۱۰۵
هدف کلی	۱۰۵
مقدمه	۱۰۵
۵-۱ تابع‌ها و نگاشت‌های هموار	۱۰۶
۵-۲ نگاشت‌های پوششی	۱۱۲
۵-۳ نگاشت‌های کامل	۱۱۶
۵-۴ افراز واحد	۱۲۱
خلاصه فصل پنجم	۱۲۵
خودآزمایی تشریحی فصل پنجم	۱۲۵

فصل ششم. فضای مماس بر منیفلدها

هدف کلی	۱۲۹
مقدمه	۱۲۹

۱-۶	بردارهای مماس در $\mathbb{R}^n$	۱۳۰
۲-۶	مشتق در یک نقطه	۱۳۳
۳-۶	میدان برداری	۱۳۵
۴-۶	میدانهای برداری به عنوان مشتق گیری	۱۳۷
۵-۶	فضای مماس در یک نقطه	۱۳۹
۶-۶	مشتق یک نگاشت	۱۴۲
۷-۶	پایه فضای مماس در یک نقطه	۱۴۴
۸-۶	توصیف موضعی مشتق	۱۴۶
۹-۶	خمها روی منیفلد	۱۴۷
۱۰-۶	محاسبه مشتق به کمک خمها	۱۵۰
۱۱-۶	رتبه، نقاط منظم و بحرانی	۱۵۱
	خلاصه فصل ششم	۱۵۳
	خودآزمایی تشریحی فصل ششم	۱۵۳

۱۵۷	فصل هفتم. زیرمنیفلدها
۱۵۷	هدف کلی
۱۵۷	هدف‌های یادگیری:
۱۵۸	۷-۱ مفهوم زیرمنیفلد
۱۶۱	۷-۲ مجموعه صفرهای یک تابع
۱۶۳	۷-۳ قضیه مجموعه تراز منظم
۱۶۵	۷-۴ مثال‌های زیرمنیفلدهای منظم
۱۶۷	خلاصه فصل هفتم
۱۶۷	خودآزمایی تشریحی فصل هفتم

۱۶۹	فصل هشتم. رتبه یک نگاشت هموار
۱۶۹	هدف کلی
۱۶۹	هدفهای یادگیری

مقدمه	۱۶۹
۸-۱ قضیه نگاشت ثابت (قضیه رتبه ثابت)	۱۷۰
۸-۲ ایمرسیون‌ها و سابمرسیون‌ها	۱۷۳
۸-۳ تصاویر نگاشتهای هموار	۱۷۵
۸-۴ نگاشتهای هموار بر زیرمنیفولدها	۱۸۱
۸-۵ صفحه مماس بر رویه ای در $\mathbb{R}^3$	۱۸۳
خلاصه فصل هشتم	۱۸۴
خودآزمایی تشریحی فصل هشتم	۱۸۴
فصل نهم. کلاف مماسی	۱۸۷
هدف کلی	۱۸۷
هدف‌های یادگیری	۱۸۷
مقدمه	۱۸۷
۹-۱ توپولوژی کلاف مماسی	۱۸۸
۹-۲ ساختار منیفلدی روی کلاف مماسی	۱۹۰
۹-۳ کلاف برداری	۱۹۱
۹-۴ برشهای هموار	۱۹۴
۹-۵ کنج‌های هموار	۱۹۵
خلاصه فصل نهم	۱۹۵
خودآزمایی تشریحی فصل نهم	۱۹۶
فصل دهم. میدان‌های برداری	۱۹۷
هدف کلی	۱۹۷
هدف‌های یادگیری:	۱۹۷
مقدمه	۱۹۷
۱۰-۱ هموار بودن یک میدان برداری	۱۹۸
۱۰-۲ خم‌های انتگرال	۱۹۹

۲۰۳	۱۰-۳ شارهای موضعی
۲۰۷	۱۰-۴ کروش لی
۲۱۰	۱۰-۵ میدانهای برداری مرتبط
۲۱۱	۱۰-۶ جلو ران یک میدان برداری
۲۱۲	خلاصه فصل دهم
۲۱۲	خودآزمایی تشریحی فصل دهم

فصل یازدهم. گروه لی

۲۱۵	هدف کلی
۲۱۵	هدفهای یادگیری
۲۱۵	مقدمه
۲۱۶	۱۱-۱ مثالهایی از گروه لی و همومورفیسم گروههای لی
۲۲۲	۱۱-۲ زیرگروههای لی
۲۲۵	۱۱-۳ نگاشت نمایی برای ماتریسها
۲۲۶	۱۱-۴ اثر ماتریس
۲۲۸	۱۱-۵ دیفرانسیل در مینان در نقطه همانی
۲۲۸	خلاصه فصل یازدهم
۲۲۸	خودآزمایی تشریحی فصل یازدهم

فصل دوازدهم. جبر لی

۲۳۳	هدف کلی
۲۳۳	هدفهای یادگیری
۲۳۳	مقدمه
۲۳۴	۱۲-۱ فضای مماس در نقطه همانی گروه لی
۲۳۶	۱۲-۲ میدانهای برداری پایای چپ روی گروه لی
۲۴۰	۱۲-۳ جبر لی یک گروه لی
۲۴۱	۱۲-۴ کروش لی روی $gl(n, \mathbb{R})$

۱۲-۵	جلو ران یک میدان برداری پایای چپ	۲۴۳
۱۲-۶	مشتق به عنوان همریختی جبر لی	۲۴۴
	خلاصه فصل دوازدهم	۲۴۶
	خودآزمایی تشریحی فصل دوازدهم	۲۴۶

فصل سیزدهم. عمل گروه لی روی منیفلدها		۲۴۹
	هدف کلی	۲۴۹
	هدف های یادگیری	۲۴۹
	مقدمه	۲۴۹
۱۳-۱	عمل گروه لی	۲۵۰
۱۳-۲	عمل گروه های گسسته	۲۵۶
۱۳-۳	عمل گروه های یک پارامتری	۲۶۱
۱۳-۴	قضیه وجودی و منحصر به فردی معادلات دیفرانسیل معمولی	۲۶۷
۱۳-۵	زیرگروه های یک پارامتری گروه های لی	۲۶۸
	خلاصه فصل سیزدهم	۲۷۸
	خودآزمایی تشریحی فصل سیزدهم	۲۷۹

فصل چهاردهم. جبر لی میدان های برداری روی یک منیفلد		۲۸۱
	هدف کلی	۲۸۱
	هدف های یادگیری	۲۸۱
	مقدمه	۲۸۱
۱۴-۱	تعریف کلی جبر لی	۲۸۲
۱۴-۲	مشتق لی	۲۸۴
	خلاصه فصل چهاردهم	۲۸۵
	خودآزمایی تشریحی فصل چهاردهم	۲۸۶

۲۹۱	منابع
-----	-------

پیشگفتار

این درسنامه حاصل تدریس منیفلد ۱ در دوره کارشناسی ارشد در سالهای متمادی است. برای ورود به مفاد اصلی این درس تلاش گردیده است پلی بین مطالب تدریس شده در دوره کارشناسی و مفاهیم اصلی این درس ایجاد گردد که دو فصل اول کتاب را شامل می‌شود. بعلاوه کوشیده شده ارتباط منطقی بین توپولوژی، هندسه دیفرانسیل و فیزیک در لابلای متون درسی گنجانده شود.

باید اذعان کنیم که این کتاب تمام مطالب منیفلد را شامل نمی‌شود ولی آنچه برای ورود به مبحث منیفلد ضروری است را فراهم می‌نماید. بعلاوه درس منیفلد ۲ تداوم منطقی این درسنامه می‌باشد و تا حدودی مباحث لازم را تکمیل می‌نماید. در تدوین این درسنامه از کتب متعددی استفاده گردیده است و راهنمایی‌های همکاران گروه ریاضی نیز در به روز شدن مطالب ما را یاری کرد.

گرچه تلاش گردیده متن خالی از ایراد باشد اما ممکن است ایراداتی محتوایی و املائی در آن باشد که تذکر خوانندگان مایه تشکر خواهد بود.

آنچه به عنوان پیش نیاز برای این درس ضروری است، توپولوژی عمومی، هندسه دیفرانسیل موضعی، آنالیز ریاضی ۳ و اندکی جبرخطی است. آشنایی نسبی به مفاهیم تئوری مجموعه‌ها نیز ضرورت درک برخی از برهان‌ها است. در اینجا بر خود لازم می‌دانیم از مدیریت محترم تدوین کتب که در تدوین و چاپ این اثر ما را یاری کردند سپاس‌گزار باشیم.

امیرحسام زعیم - محمد چایچی - تیرماه ۱۳۹۸

تقدیم به دوستان هاندسه

و

تشكر از دوست و همكار عزيز، دكتر كمال فلاحي

فصل اول

ابزارهای مطالعه منیفلد

هدف کلی

مطالب مورد نیاز در مطالعه هئدسه منیفلدها شامل توپولوژی و جبرخطی مورد یادآوری قرار می‌گیرد.

هدف‌های یادگیری

دانشجو پس از مطالعه این فصل می‌بایست بتواند:

- ۱- با مفهوم توپولوژی روی یک مجموعه آشنایی یابد.
- ۲- با مفهوم پایه توپولوژی و اصول شمارش‌پذیری آشنایی یابد.
- ۳- با اصول تفکیک روی فضای توپولوژیک آشنایی یابد.
- ۴- مباحثی در خصوص فضاهاى برداری و نگاشت‌ها و سایر مطالب مقدماتی جبرخطی یادآوری شوند.

مقدمه

در این فصل به بیان برخی مفاهیم پایه‌ای که در مطالعه درس هندسه منیفلد نیازمند آن‌ها هستیم می‌پردازیم. این مطالب که عموماً در دروس ریاضیات مقطع کاشناسی تدریس می‌شوند شامل مطالبی از توپولوژی، آنالیز ریاضی و جبر خطی است. البته مطالعه هندسه منیفلدها در ابعاد وسیعتر نیازمند اشراف بر علوم توپولوژی، آنالیز و جبر پیشرفته است اما در اینجا سعی می‌کنیم یادآوری اجمالی در خصوص این مفاهیم داشته باشیم.

۱-۱ توپولوژی روی یک مجموعه

تعریف (۱).

فرض کنید X یک مجموعه و Ω گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های آن باشد به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

- ۱- اجتماع دلخواهی از اعضای Ω عضوی از آن باشد.
- ۲- اشتراک تعداد متناهی از اعضای Ω عضوی از آن باشد.
- ۳- مجموعه‌های $\emptyset$ و X عضو Ω باشند.

در این صورت

- Ω را یک ساختار توپولوژیک یا به طور ساده یک توپولوژی روی مجموعه X می‌نامیم.
 - جفت (X, Ω) یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود.
 - هر عضو X یک نقطه در این فضای توپولوژیک نامیده می‌شود.
 - هر عضو Ω را یک مجموعه باز در فضای توپولوژیک (X, Ω) گوئیم.
- شرایط ذکر شده در تعریف بالا اصول ساختار توپولوژیک نامیده می‌شوند.

مثال ۱-۱.

مجموعه $\Omega = \{\emptyset, X\}$ همواره یک توپولوژی روی X است که به آن توپولوژی بدیهی یا ناگسسته می‌گوئیم.

مثال ۱-۲.

$\Omega = \mathcal{P}(X)$ ، که $\mathcal{P}(X)$ مجموعه توانی X است، تشکیل یک توپولوژی می‌دهد که به آن توپولوژی گسسته می‌گویند.

مثال ۱-۳.

فرض کنید X مجموعه $\mathbb{R}$ و $U \subseteq \mathbb{R}$ باز باشد اگر $U = \emptyset$ و یا اینکه اگر $U \neq \emptyset$ ازای هر $x \in U$ بازه $(a, b) \subset U$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in (a, b)$. این ساختار توپولوژیک استاندارد $\mathbb{R}$ به عنوان یک فضای توپولوژیک است که توپولوژی معمول اعداد حقیقی نامیده می‌شود و با Ω_U نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۴.

فرض کنید $X = [0, +\infty)$ و Ω شامل X و $\emptyset$ و تمام شعاعهای $(a, +\infty)$ برای $a \geq 0$ باشد. در این صورت (X, Ω) یک فضای توپولوژیک است.

تعریف (۲).

فرض کنید Ω و Θ دو توپولوژی روی X باشند. اگر $\Omega \subseteq \Theta$ آنگاه Ω را ضعیف تر از Θ گوئیم یا Θ را قوی تر از Ω می‌نامیم. بنابراین توپولوژی بدیهی ضعیف‌ترین و توپولوژی گسسته قوی‌ترین توپولوژی روی X است.

تعریف (۳).

مجموعه $F \subseteq X$ را در فضای توپولوژیک (X, Ω) بسته نامیم هرگاه متمم آن یعنی $X - F$ باز باشد ($X - F \in \Omega$). گردایه تمام زیرمجموعه‌های بسته X نسبت به Ω را با $\kappa(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.

با استفاده از قوانین دمورگان می‌توان نشان داد که عبارتهای زیر برای مجموعه‌های بسته برقرارند:

- اشتراک تعداد دلخواهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.
- اجتماع تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.
- مجموعه $\emptyset$ و X بسته هستند.

تعریف (۴).

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $x \in X$ باشد. زیرمجموعه N از X را یک همسایگی این نقطه نامیم اگر $U \in \Omega$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in U \subseteq N$. همچنین نقطه $x \in X$ را تنها^۱ می نامیم هرگاه تک نقطه‌ای $\{x\}$ باز باشد (در توپولوژی گسسته تمام نقاط تنها هستند).

تعریف (۵).

گردایه B از مجموعه‌های باز یک پایه برای توپولوژی Ω نامیده می‌شود اگر هر مجموعه باز ناتهی برابر اجتماعی از اعضای B باشد.

اعضای B را بازهای اساسی^۲ می نامیم. هر پایه توپولوژی به اصطلاح آن توپولوژی را تولید می‌کند و واضح است که هر توپولوژی پایه ای برای خودش است.

فرض کنید Ω و Θ دو توپولوژی روی مجموعه X باشند. در صورتی که $\Omega = \Theta$ فضاهای توپولوژیک (X, Ω) و (X, Θ) را یکسان می نامیم. همچنین دو پایه توپولوژی روی X را معادل نامیم هرگاه فضاهای توپولوژیک یکسان تولید کنند.

قضیه ۱-۱.

فرض کنید B_1 و B_2 پایه دو توپولوژی روی مجموعه X باشند این دو پایه معادل هستند اگر و فقط اگر

۱- اگر $B \in B_1$ و $p \in B$ آنگاه $A \in B_2$ وجود داشته باشد به طوری که $p \in A \subseteq B$.

۲- اگر $A \in B_2$ و $q \in A$ آنگاه $B \in B_1$ وجود داشته باشد به طوری که $q \in B \subseteq A$.

برهان: فرض کنید B_1 و B_2 معادل باشند بنابراین $\Omega_1 = \Omega_2$. اگر $K \in B_1$ و $p \in K$ در این صورت $K \in \Omega_1$ و با توجه به فرض $K \in \Omega_2$. بنابراین خانواده $\mathcal{F} \subseteq B_2$ وجود دارد به طوری که $K = \bigcup \mathcal{F}$. بنابراین $A \in \mathcal{F}$ وجود دارد به طوری که $p \in A$. واضح است که $A \subseteq K$ و لذا مورد (۱) برقرار می‌شود. به شکل مشابه مورد (۲) نیز برقرار است.

برعکس فرض کنید شرایط (۱) و (۲) برقرار باشند. باید ثابت کنیم $\Omega_1 = \Omega_2$. فرض

1. Isolated
2. Basic open

کنید $A \in \Omega_1$. بنابراین خانواده $\mathcal{B}_1$ وجود دارد به طوری که $A = \bigcup \mathcal{U}$. فرض کنید $p \in A$ و لذا $U_i \in \mathcal{U}$ وجود دارد به طوری که $p \in U_i$. با توجه به مورد (۱)، $V_i \in \mathcal{B}_2$ وجود دارد به طوری که $p \in V_i \subseteq U_i$. فرض کنید $\mathcal{V} = \{V_p : p \in A\}$ و قرار دهید $C = \bigcup \mathcal{V}$. روشن است که $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ ، بعلاوه چون هر عضو $\mathcal{V}$ زیرمجموعه ای از A است پس $\bigcup \mathcal{V} \subseteq A$. نتیجه می شود که $A \in \Omega_2$ و لذا $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. به شکل مشابه ثابت می شود که $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$.

توجه داشته باشید که برای اثبات $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ تنها از مورد (۱) استفاده کردیم. لذا مورد (۱) معادل است با اینکه Ω_2 از Ω_1 قویتر است و به شکل مشابه مورد (۲) معادل قویتر بودن Ω_1 از Ω_2 است. ■

قضیه ۱-۲.

فرض کنید X مجموعه ای دلخواه و $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. خانواده $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$1. \quad X = \bigcup \mathcal{B}$$

$$2. \quad \text{اگر } U, V \in \mathcal{B} \text{ و } x \in U \cap V, \text{ مجموعه } W \in \mathcal{B} \text{ وجود داشته باشد به طوری که } x \in W \subseteq U \cap V$$

برهان: ابتدا فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه ای برای یک توپولوژی Ω روی X باشد. بنابراین $X \in \Omega$ و با توجه به تعریف پایه، X برابر اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است. حال فرض کنید $x \in U \cap V$ که در آن $U, V \in \mathcal{B}$. با توجه به فرض U و V مجموعه هایی باز هستند و بنابراین $U \cap V$ نیز باز است. از آنجا که هر مجموعه باز برابر اجتماع زیرگرایه ای از اعضای $\mathcal{B}$ است بنابراین خانواده $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ وجود دارد به طوری که $U \cap V = \bigcup \mathcal{F}$. البته این بدان معنی است که $W \in \mathcal{F}$ وجود دارد به طوری که $x \in W \subseteq U \cap V$.

برعکس فرض کنید شرایط (۱) و (۲) برقرار باشند. باید توپولوژی Ω روی X را معرفی کنیم که توسط $\mathcal{B}$ تولید می شود. بنابراین قرار می دهیم $\Omega = \{\bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})\}$. با توجه به شرط (۱) داریم $X \in \Omega$ چون $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ داریم $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \Omega$. روشن است که خانواده Ω تحت اجتماع دلخواهی از اعضایش بسته است. تنها کافی است ثابت کنیم که Ω تحت

اشتراک تعداد متناهی از اعضایش نیز بسته است. فرض کنید $A_1, A_2 \in \Omega$. باید ثابت کنیم

$$A = A_1 \cap A_2 \in \Omega$$

با توجه به فرض $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{P}(B)$ وجود دارند به طوری که $A_1 = \bigcup \mathcal{F}_1$ و $A_2 = \bigcup \mathcal{F}_2$. بر اساس قواعد نظریه مجموعه‌ها داریم

$$A = \bigcup \mathcal{F}_1 \cap \bigcup \mathcal{F}_2 = \bigcup \{B \cap C : B \in \mathcal{F}_1, C \in \mathcal{F}_2\},$$

بنابراین، به ازای هر $x \in A$ و $B_x \in \mathcal{F}_1$ و $C_x \in \mathcal{F}_2$ وجود دارند به طوری که $x \in B_x \cap C_x$. حال با توجه به شرط (۲) می‌توان فرض کرد $W_x \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که $x \in W_x \subseteq B_x \cap C_x$. اگر قرار دهیم $\mathcal{F} = \{W_x : x \in A\}$ ، واضح است که $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(B)$ و $A = \bigcup \mathcal{F}$. بنابراین نتیجه می‌شود که $A \in \Omega$. ■

تعریف (۶).

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد. نقطه $x \in X$ را یک نقطه **حدی** A نسبت به Ω نامیم هرگاه هر همسایگی از x شامل یک نقطه از A بجز x باشد. اجتماع مجموعه A با نقاط حدی اش را **بستار** A نسبت به Ω نامیم و با $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۳.

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعه A بسته است اگر و فقط اگر $A = \bar{A}$.

برهان: اگر A بسته باشد آنگاه $X - A$ باز است و این بدان معنی است که $X - A$ یک همسایگی به ازای هر یک از نقاطش است. بنابراین هیچ یک از نقاط $X - A$ نمی‌تواند یک نقطه حدی A باشد، یعنی A تمام نقاط حدی خود را شامل می‌شود و لذا $A = \bar{A}$.

برعکس فرض کنید $A = \bar{A}$. پس A تمام نقاط حدی اش را شامل می‌شود. فرض کنید $p \in X - A$. چون p نقطه حدی A نیست بنابراین همسایگی N_p از p وجود دارد که شامل هیچ عضو دیگری از A نیست. پس $N_p \subseteq X - A$ و لذا $X - A$ یک همسایگی به ازای هر یک از نقاطش است. بنابراین نتیجه می‌شود که $X - A$ باز است و لذا A بسته است. ■

قضیه ۱-۴.

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک باشد. اگر $A \subseteq X$ آنگاه

$$\overline{A} = \bigcap \{C \in \kappa(\Omega) : A \subseteq C\}.$$

■

برهان: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۱-۵.

فرض کنید (X, Ω) فضایی توپولوژیک باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند.

در این صورت موارد زیر برقرار هستند:

$$1 - \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

$$2 - \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

برهان: ۱- با استفاده از قضیه ۱-۴، $\overline{A}$ بسته است. بنابراین $\overline{A}$ باید تمام نقاط حدی

اش را شامل شود و این نتیجه می‌دهد که $\overline{A} = \overline{(\overline{A})}$.

۲- فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند. می‌دانیم که هر نقطه حدی A

یک نقطه حدی $A \cup B$ است و هر نقطه حدی B نیز یک نقطه حدی $A \cup B$ است (این

موضوع در تمرین‌ها آمده است). بنابراین $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}$. حال چون $\overline{A}$ و $\overline{B}$ بسته هستند

می‌دانیم $\overline{A \cup B}$ نیز بسته است و چون $A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$ ، با توجه به قضیه ۱-۴ داریم

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

■

تعریف (۷).

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد. درون A نسبت به Ω

عبارت است از مجموعه زیر

$$A^\circ = \{x \in A : x \in U \subseteq A, \quad U \in \Omega \text{ یک ازای یک } U \in \Omega\}.$$

قضیه ۱-۶.

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $A, B \subseteq X$ باشند. در این صورت موارد

زیر برقرارند:

$$۱- \overline{X - A} = X - A^\circ$$

$$۲- (A^\circ)^\circ = A^\circ$$

$$۳- (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

برهان: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تعریف (۸).

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد. مرز A نسبت به X عبارت است از مجموعه زیر

$$\partial(A) = \{x \in X : x \notin A^\circ \text{ و } x \notin (X - A)^\circ\}.$$

۱-۲ پیوستگی

در این بخش به تعریف پیوستگی، یکی از تعاریف کلیدی توپولوژی می‌پردازیم.

تعریف (۹).

فرض کنید (X, Ω) و (Y, Θ) فضاهایی توپولوژیک باشند. تابع $f : X \rightarrow Y$ نسبت به Ω و Θ پیوسته است اگر به ازای هر $U \in \Theta$ دلخواه داشته باشیم $f^{-1}(U) \in \Omega$.

قضیه ۱-۷.

فرض کنید (X, Ω) و (Y, Θ) فضاهایی توپولوژیک و $f : X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱- تابع f نسبت به Ω و Θ پیوسته است.

۲- به ازای هر $C \in \kappa(\Theta)$ داریم $f^{-1}(C) \in \kappa(\Omega)$.

۳- به ازای هر $x \in X$ و هر همسایگی N از $f(x)$ ، $f^{-1}(N)$ یک همسایگی از x است.

۴- به ازای هر $x \in X$ و هر همسایگی N از $f(x)$ ، همسایگی M از x وجود دارد به طوری

$$\text{که } f(M) \subseteq N$$

۵- به ازای هر $A \subseteq X$ داریم $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۶- به ازای هر $B \subseteq Y$ داریم $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

برهان: ۲ $\Rightarrow$ ۱، فرض کنید f تابعی پیوسته و $C \in \kappa(\Theta)$ باشد. بنابراین $X - C \in \Theta$ و لذا $f^{-1}(Y - C) \in \Omega$ حال کافی است ثابت کنیم $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$. فرض کنید $a \in f^{-1}(Y - C)$ پس $f(a) \in Y - C$ که به این معنی است که $f(a) \notin C$ و در نتیجه $a \notin f^{-1}(C)$. بنابراین می توان نتیجه گرفت که $f^{-1}(Y - C) \subseteq X - f^{-1}(C)$. حال فرض کنید $b \in X - f^{-1}(C)$ پس $b \notin f^{-1}(C)$ و لذا $f(b) \notin C$. بنابراین $f(b) \in Y - C$ که نتیجه می دهد $b \in f^{-1}(Y - C)$ و لذا $X - f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(Y - C)$.

۳ $\Rightarrow$ ۲، فرض کنید به ازای $C \in \kappa(\Theta)$ دلخواه، $f^{-1}(C) \in \kappa(\Omega)$. فرض کنید $x \in X$ و N یک همسایگی $f(x)$ در Y باشد. بنابراین همسایگی $U \in \Theta$ وجود دارد به طوری که $f(x) \in U \subseteq N$. مجموعه $Y - U$ را در نظر بگیرید. با توجه به فرض می دانیم که $f^{-1}(U) \in \Omega$ پس نتیجه می شود $X - f^{-1}(U) = f^{-1}(Y - U) \in \kappa(\Omega)$ چون $x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(N)$ نتیجه حاصل می شود.

۴ $\Rightarrow$ ۳، بلافاصله نتیجه می شود، تنها کافی است قرار دهیم $M = f^{-1}(U)$ ، که در آن U یک مجموعه باز در همسایگی N از $f(x)$ است به طوری که $f(x) \in U \subseteq N$.

۵ $\Rightarrow$ ۴، فرض کنید $A \subseteq X$. مجموعه های $f(\bar{A})$ و $\overline{f(A)}$ را در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ اگر و فقط اگر $Y - \overline{f(A)} \subseteq Y - f(\bar{A})$. فرض کنید $b \in Y - \overline{f(A)}$ اگر $f^{-1}(b) = \emptyset$ ، واضح است که $b \notin f(\bar{A})$. بعلاوه فرض کنید که $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ و $x \in f^{-1}(b)$ چون $Y - \overline{f(A)}$ یک همسایگی از b است بنابراین همسایگی M از x وجود دارد به طوری که $f(M) \subseteq Y - \overline{f(A)}$. پس $M \cap A = \emptyset$ و لذا $x \notin \bar{A}$ که نتیجه می دهد $x \notin \bar{A}$ نیست. بنابراین می دانیم $x \notin \bar{A}$ که نتیجه می دهد $b \notin f(\bar{A})$. بنابراین چه $f^{-1}(b)$ برابر تهی باشد و چه نباشد داریم $b \in Y - f(\bar{A})$.

۶ $\Rightarrow$ ۵، فرض کنید $B \subseteq Y$ و مجموعه های $f^{-1}(\bar{B})$ و $\overline{f^{-1}(B)}$ را در نظر بگیرید. با توجه به فرض می دانیم

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} = \bar{B},$$

در نتیجه می دانیم که

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(\bar{B}).$$

۱ $\Rightarrow$ ۶، فرض کنید $y \in Y$ و $U \in \Theta$ شامل y باشد. باید ثابت کنیم $f^{-1}(U) \in \Omega$. با توجه به فرض و استفاده از بحث فوق داریم

$$\overline{X - f^{-1}(U)} = \overline{f^{-1}(Y - U)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y - U}) = f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U),$$

بنابراین از آنجا که $X - f^{-1}(U)$ در $\overline{X - f^{-1}(U)}$ قرار دارد نتیجه می‌شود که $X - f^{-1}(U)$ باید بسته باشد. بنابراین $f^{-1}(U)$ باز است. ■

۱-۳ اصول تفکیک

در این بخش راههایی برای تعیین اینکه چه تعداد مجموعه باز در یک توپولوژی قرار دارد را معرفی می‌کنیم. اصولی که اصول تفکیک نامیده می‌شوند روشی را در اختیار ما قرار می‌دهند که با استفاده از آن می‌توان تعیین کرد که در چه صورت یک توپولوژی تعداد کافی مجموعه باز دارد که بتوان نقاط آن، نقطه و مجموعه بسته یا مجموعه‌های بسته را از هم متمایز کرد.

تعریف (۱۰).

(اصول تفکیک) فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک باشد.

۱- گوئیم (X, Ω) یک فضای توپولوژیک T است اگر به ازای نقاط متمایز دلخواه x, y همسایگی M از x وجود داشته باشد به طوری که $y \notin M$ یا همسایگی M از y باشد به طوری که $x \notin M$.

۲- گوئیم (X, Ω) یک فضای توپولوژیک T_1 است اگر به ازای نقاط متمایز دلخواه x, y همسایگی‌های M و N به ترتیب از x و y وجود داشته باشند به طوری که $y \notin M$ و $x \notin N$.

۳- گوئیم (X, Ω) یک فضای توپولوژیک T_2 است اگر به ازای نقاط متمایز دلخواه x, y همسایگی‌های M از x و N از y وجود داشته باشند. این نوع فضاهای توپولوژیک معمولاً فضای هاوسدورف^۱ نامیده می‌شوند.

۴- گوئیم (X, Ω) یک فضای توپولوژیک T_3 است اگر به ازای هر $C \in \kappa(\Omega)$ و $x \in C$

1. Hausdorff space

$X - C$ مجموعه‌های باز از هم جدای U و V وجود داشته باشند به طوری که $C \subseteq U$ و $x \in V$.

قضیه ۸-۱.

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

- ۱- فضای (X, Ω) ، T_1 است.
- ۲- به ازای هر $x \in X$ داریم $\{x\} \in \kappa(\Omega)$.
- ۳- به ازای هر $A \subseteq X$ اشتراک تمام مجموعه‌های باز شامل A برابر خود A است.

برهان: $۲ \Rightarrow ۱$ ، فرض کنید $x \in X$ و $U = X - \{x\}$. باید ثابت کنیم $U \in \Omega$. اگر $U = \emptyset$ چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند بنابراین فرض کنید $y \in U$. چون (X, Ω) یک فضای T_1 است همسایگی N از y وجود دارد به طوری که $x \notin N$. می‌توان فرض کرد N مجموعه‌ای باز باشد. چون $x \notin N$ نتیجه می‌شود که $N \subseteq U$. بنابراین U می‌تواند به صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز نوشته شود و لذا باز است.

$۳ \Rightarrow ۲$ ، فرض کنید $A \subseteq X$ و $\mathcal{F}$ گردایه تمام مجموعه‌های باز شامل A باشد. فرض کنید $B = \bigcap \mathcal{F}$. به وضوح داریم $A \subseteq B$. باید ثابت کنیم $B \subseteq A$. فرض کنید $y \in X$. طبق فرض چون $\{y\}$ بسته است پس $U = X - \{y\}$ باز است. بنابراین اگر $y \notin A$ نتیجه می‌شود که $A \subseteq U$. البته این بدان معنی است که $U \in \mathcal{F}$ و چون $y \notin U$ نتیجه می‌شود که $y \notin B$. بنابراین $y \in B$ نتیجه می‌دهد که $y \in A$ یعنی $B \subseteq A$.

$۱ \Rightarrow ۳$ ، فرض کنید $x, y \in X$. باید همسایگی‌های M از x و N از y را بیابیم به طوری که $x \notin N$ و $y \notin M$. فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایه تمام مجموعه‌های باز شامل x و $\mathcal{G}$ گردایه تمام مجموعه‌های باز شامل y باشد. با توجه به فرض $\{x\} = \bigcap \mathcal{F}$ و $\{y\} = \bigcap \mathcal{G}$. این بدان معنی است که باید همسایگی باز $M \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد به طوری که $y \notin M$. به طور مشابه مجموعه باز $N \in \mathcal{G}$ وجود دارد به طوری که $x \notin N$. پس نتیجه می‌شود که (X, Ω) یک فضای توپولوژیک T_1 است. ■

تعریف (۱۱).

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $A \subset X$ باشد. گوئیم خانواده $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ یک پوشش^۱ برای مجموعه A است اگر $A \subseteq \bigcup \{F \in \mathcal{F}\}$. هر زیرگردایه ای از $\mathcal{F}$ که A را بپوشاند یک زیرپوشش^۲ A نامیده می‌شود.

تعریف (۱۲).

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد. گوئیم A نسبت به Ω فشرده^۳ است اگر هر پوشش A از Ω دارای یک زیرپوشش متناهی A باشد. اگر X فشرده باشد (X, Ω) را یک فضای توپولوژیک فشرده می‌نامیم.

قضیه ۱-۹.

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک فشرده و (Y, Θ) یک فضای توپولوژیک هوسدورف باشند. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت دوسویی پیوسته نسبت به Ω و Θ باشد آنگاه $f^{-1}: Y \rightarrow X$ نسبت به Θ و Ω پیوسته است.



برهان: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

تعریف (۱۳).

گوئیم یک خانواده از مجموعه‌ها دارای ویژگی اشتراک متناهی^۴ است اگر اشتراک هر زیرخانواده متناهی از مجموعه‌های ناتهی آن، ناتهی باشد.

قضیه ۱-۱۰.

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد. اگر مجموعه A نسبت به Ω فشرده باشد آنگاه هر اشتراک دلخواه از اعضای خانواده ای از زیرمجموعه‌های بسته A که دارای ویژگی اشتراک متناهی است، ناتهی است. اگر A نسبت به Ω بسته باشد عکس این موضوع نیز برقرار است.

1. Cover
2. Subcover
3. Compact
4. Finite intersection property

برهان: فرض کنید A فشرده و $\mathcal{F}$ خانواده ای از زیرمجموعه های بسته A و دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد. می خواهیم ثابت کنیم که $\bigcap \mathcal{F}$ ناتهی است. با استفاده از برهان خلف فرض کنید $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ ، بنابراین $X = \bigcup \{X - F : F \in \mathcal{F}\}$. حال مجموعه $U = \{X - F_1, \dots, X - F_n\}$ پوششی باز برای مجموعه A است و لذا می دانیم که زیرگرایه $F_1, \dots, F_n$ وجود دارد به طوری که $\{X - F_1, \dots, X - F_n\}$ را می پوشاند. با استفاده از قانون دمورگان نتیجه می شود که $F_1 \cap \dots \cap F_n$ برابر تهی است که تناقض است و بنابراین $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.
برعکس فرض کنید A بسته باشد و اشتراک هر خانواده از زیرمجموعه های بسته A که دارای خاصیت اشتراک متناهی باشند، ناتهی باشد. باید ثابت کنیم A فشرده است. با استفاده از برهان خلف فرض کنید A فشرده نباشد. بنابراین خانواده $\mathcal{U}$ از مجموعه های باز وجود دارد که A را می پوشاند و دارای هیچ زیرپوششی از A نیست. می توان فرض کرد به ازای هر $U \in \mathcal{U}$ ، $U \cap A \neq \emptyset$ و $(X - U) \cap A \neq \emptyset$. مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{F} = \{(X - U) \cap A : U \in \mathcal{U}\}.$$

توجه داشته باشد که خانواده $\mathcal{F}$ خانواده ای از زیرمجموعه های بسته A است و چون A را می پوشاند بنابراین طبق فرض $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. با این حال چون هیچ زیرخانواده ای متناهی از $\mathcal{U}$ ، A را نمی پوشاند نتیجه می شود که هر زیرگرایه متناهی $\mathcal{F}$ دارای اشتراک تهی است که تناقض است. ■

۱-۴ شمارش پذیری نوع اول و دوم

تعریف (۱۴).

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک باشد. گوئیم Ω شمارش پذیر نوع دوم^۱ است اگر دارای پایه ای شمارش پذیر باشد.

قضیه ۱-۱۱.

فرض کنید (X, Ω) یک فضای توپولوژیک شمارش پذیر نوع دوم باشد. اگر A زیرمجموعه

ای شمارش ناپذیر از X باشد آنگاه A دارای نقطه ای حدی است که عضو A می باشد.

■ برهان: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

تعریف (۱۵).

فرض کنید (X, Ω) فضایی توپولوژیک باشد. زیرمجموعه A از X را در X چگال^۱ نامیم هرگاه $X = \bar{A}$. همچنین (X, Ω) را جدایی پذیر^۲ نامیم هرگاه شامل زیرمجموعه ای چگال و شمارش پذیر باشد.

قضیه ۱-۱۲.

هر فضای توپولوژیک شمارش پذیر نوع دوم جدایی پذیر است.

■ برهان: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

قضیه ۱-۱۳.

اگر (X, Ω) فضایی شمارش پذیر نوع دوم باشد آنگاه هر پوشش باز X دارای زیرپوششی شمارش پذیر است.

■ برهان: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

تعریف (۱۶).

فرض کنید (X, Ω) فضایی توپولوژیک و $x \in X$ باشد. منظور از دستگاه همسایگی^۳ نقطه x گردایه $\mathcal{N}_x$ متشکل از تمام همسایگی های نقطه x است. همچنین یک پایه همسایگی^۴ برای نقطه x عبارت است از خانواده $\mathcal{B}_x$ از همسایگی های x با این ویژگی که هر عضو $\mathcal{N}_x$ شامل حداقل یکی از اعضای $\mathcal{B}_x$ باشد. اگر هر نقطه از X دارای پایه همسایگی شمارش پذیر باشد گوئیم (X, Ω) شمارش پذیر نوع اول^۵ است.

-
1. Dense
 2. Separable
 3. Neighborhood system
 4. Neighborhood basis
 5. First countable

قضیه ۱-۱۴.

فرض کنید (X, Ω) فضایی توپولوژیک شمارش پذیر نوع دوم باشد. در این صورت (X, Ω) شمارش پذیر نوع اول است.



برهان: به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

تعریف (۱۷).

فرض کنید (X, Ω) فضایی توپولوژیک، $A \subseteq X$ و $s: \mathbb{N} \rightarrow X$ یک دنباله باشد. گوئیم s مکرراً^۱ در A قرار دارد اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $m > n$ وجود داشته باشد به طوری که $s_m \in A$. همچنین گوئیم s سرانجام^۲ در A قرار دارد اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $m > n$ داشته باشیم $s_m \in A$.

تعریف (۱۸).

فرض کنید (X, Ω) فضایی توپولوژیک و $s: \mathbb{N} \rightarrow X$ یک دنباله باشد. نقطه $x \in X$ را یک نقطه انباشتگی^۳ دنباله s نامیم هرگاه به ازای هر همسایگی از x ، s مکرراً در آن همسایگی باشد. همچنین گوئیم s به نقطه x همگرا^۴ است اگر به ازای هر همسایگی از x ، s سرانجام در آن همسایگی باشد.

اگر (X, Ω) فضایی توپولوژیک باشد و دنباله s به نقطه $x \in X$ همگرا باشد گوئیم x حد دنباله s است (نسبت به Ω). این تعریف را با تعریف معمول همگرایی در ریاضیات عمومی مقایسه کنید. توجه داشته باشید که ما مفهوم نزدیک شدن به یک نقطه را بدون تعریف مفهوم فاصله و با استفاده از مجموعه‌های باز تعریف کردیم.

قضیه ۱-۱۵.

فرض کنید (X, Ω) فضایی توپولوژیک شمارش پذیر نوع اول باشد. اگر $x \in X$ و $A \subseteq X$ نقطه x یک نقطه حدی A است اگر و فقط اگر دنباله ای در $A - \{x\}$ باشد که به x همگراست.

-
1. Frequently
 2. Eventually
 3. Cluster point
 4. Converges